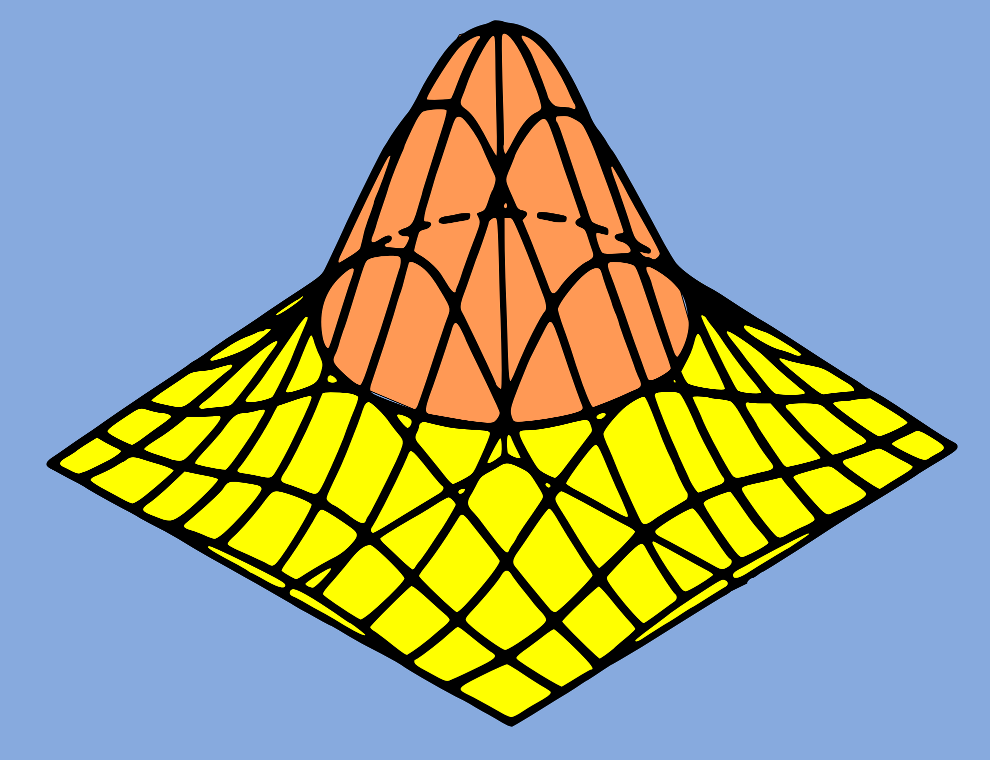
B. Lévine

Fondements Théoriques de la RADIOTECHNIQUE STATISTIQUE

Tome 1



Éditions Mir Moscou

Б. Р. ЛЕВИН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ

Том I

СОВЕТСКОЕ РАДИО·МОСКВА

B. LÉVINE

FONDEMENTS THÉORIQUES DE LA RADIOTECHNIQUE STATISTIQUE

Tome
I

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

CDU=621.39.1 : 519.27=40

Traduit du russe
par A. SOKOVA

на французском языке

Л $\frac{0341\text{-}260}{041(01)\text{-}73}$

PRÉFACE À L'ÉDITION FRANÇAISE

La radiotechnique statistique fait partie de la théorie de l'information entendue au sens large. La théorie de l'information est alors définie comme l'ensemble des applications mathématiques, principalement statistiques, aux problèmes de la description, du traitement, de la conservation, de la transmission et de la perception de l'information.

La conception probabiliste, en tant qu'instrument de la connaissance du monde qui nous entoure, nous vient de Pierre Simon Laplace, illustre savant déterministe du XVIIIe siècle. On voit réapparaître cette conception lors de la révolution en physique de notre siècle, lorsqu'en utilisant les idées d'Emile Borel affirmant que la théorie des probabilités peut être formalisée sur la base de la théorie de la mesure, André Kolmogorov a élaboré le système d'axiomes de cette théorie et a donné une interprétation abstraite et ensembliste des notions fondamentales. Dans tous les pays, y compris l'U.R.S.S., la France, les Etats-Unis, etc., on voit apparaître des écoles importantes de statisticiens.

On constate un lien étroit entre l'essor qu'ont pris ces dernières décennies la théorie des probabilités et la statistique mathématique, d'une part, et le développement rapide des domaines nouveaux de la technique, en particulier, de la radiotechnique, de l'autre. Certains problèmes techniques ardus ont pu être résolus grâce à l'utilisation fructueuse des méthodes mathématiques, le progrès technique stimulant de son côté le développement des mathématiques appliquées.

Avec l'augmentation considérable du nombre de publications et celui des spécialistes utilisant les méthodes statistiques pour la résolution des problèmes de radiotechnique, de commande automatique et des télécommunications, le besoin se fait sentir d'avoir des monographies généralisant et systématisant les résultats obtenus. Aux environs de 1950 de telles monographies apparaissent en France (A. Blanc-Lapierre, L. Foret. *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, 1953), en Union Soviétique (B. Lévine. *Théorie des processus aléatoires et son application à la radiotechnique*. Sovetskoe radio, Moscou, 1957; V. Pougatchev. *Théorie des fonctions aléatoires et ses applications aux problèmes de régulation automatique*. Gostechizdat, Moscou, 1957) et aux Etats-Unis (W. B. Davenport, W. L. Root. *An introduc-*

tion to the Theory of random Signals and Noise. New York, Mc Graw-Hill, 1958).

L'idée d'écrire cette monographie soumise aujourd'hui au jugement de nos lecteurs français, est née il y a une dizaine d'années, après la seconde édition de l'ouvrage précité de l'auteur. Qu'est-ce qui nous a incité à entreprendre ce travail énorme et y avait-il lieu d'espérer une récompense morale? Laissant de côté ces détails purement personnels comme l'enthousiasme créateur et l'intérêt scientifique, on peut, pour répondre à cette question, se souvenir de certaines idées qui régnaient à l'époque. Premièrement, il fallait souligner le caractère *statistique* de la radiotechnique théorique actuelle et mettre en évidence que ses applications diverses et variées étaient liées par une méthodologie statistique unique. Deuxièmement, il était indispensable de séparer les problèmes de l'*analyse probabiliste* apparaissant lorsque l'on connaît les modèles de la structure, des signaux et des bruits, des problèmes de la *synthèse statistique* où l'information a priori est incomplète. Enfin, il nous a paru utile de donner sur la base de notre longue expérience d'enseignement du cours de radiotechnique statistique aux ingénieurs, aux aspirants et aux étudiants, ainsi que des consultations données aux industriels, un exposé systématique, soigné du point de vue méthodologique de la question, compte tenu des besoins quotidiens d'un grand auditoire n'ayant pas reçu de formation mathématique spéciale.

L'introduction du premier volume contient une brève annotation de cette monographie. Certains paragraphes de l'édition russe ont été omis dans l'édition française. Les paragraphes en caractères petits peuvent être laissés de côté lors de la première lecture de l'ouvrage. Les deux volumes sont pourvus des annexes, des index alphabétiques des auteurs et des concepts ainsi que de la liste de symboles.

B. LÉVINE
Professeur à l'Institut Electrotechnique des communications de Moscou
Moscou, décembre 1971

PRÉFACE À L'ÉDITION RUSSE

Il y a environ quinze ans, lorsque les méthodes de la théorie des probabilités ont commencé la conquête glorieuse des domaines d'application de la radiotechnique, un de mes amis, ingénieur de grand talent, constructeur d'appareils radiotechniques compliqués, m'a dit que son désir d'utiliser l'appareil mathématique moderne dans ses études scientifiques se heurtait aux obstacles insurmontables des gros cours spécialisés. Un ingénieur ne peut pas en général, dans son travail quotidien, consacrer un temps plus ou moins important à l'étude systématique de ces cours. D'un côté, l'exposé de ces ouvrages, bien qu'il soit conséquent et rigoureux du point de vue mathématique, n'est pas orienté vers la résolution des problèmes pratiques, ne contenant pas d'exemples aptes à servir de modèles à un grand nombre de problèmes semblables.

C'est ainsi qu'il m'a été proposé de faire, en tant que mathématicien et ingénieur, une série de conférences destinées aux ingénieurs radio-électriciens, désirant s'initier aux branches mathématiques en plein essor, telles que la théorie des probabilités et la théorie des processus stochastiques, et d'illustrer les possibilités offertes par les méthodes probabilistes dans l'étude d'un certain nombre de problèmes. J'ai accepté cette proposition. L'expérience s'est trouvée être bonne, le cycle de conférences a été répété, il s'est développé, est devenu obligatoire pour les aspirants d'un grand nombre de disciplines radiotechniques et s'est trouvé à la base de l'ouvrage *Théorie des processus aléatoires et ses applications radiotechniques*, paru dans les éditions «Sovetskoe Radio» en 1957 et réédité (complété) trois ans plus tard.

Beaucoup de problèmes de radiotechnique ne peuvent être formulés que sur la base de modèles probabilistes, tandis que le traitement des données et des résultats des expériences n'est efficace que par des méthodes statistiques. La radiotechnique statistique a pour objet l'analyse des modèles probabilistes et des déductions statistiques dans leur aspect radiotechnique spécifique. L'actualité des problèmes a rendu nécessaire la parution d'un manuel consacré spécialement aux fondements de la radiotechnique statistique. Un certain nombre de monographies apparues ces dernières années peu-

vent être utilisées à ces fins *). Le présent ouvrage sur les fondements de la radiotechnique statistique est consacré aux questions d'analyse probabiliste des systèmes radiotechniques. Cet ouvrage est né de la révision fondamentale de la seconde édition, complétée et méthodiquement améliorée, de l'ouvrage cité ci-dessus *Théorie des processus aléatoires et ses applications radiotechniques*. En changeant le titre, l'auteur a voulu souligner non seulement une différence de principe dans le plan de l'ouvrage faisant ressortir les questions relatives à la synthèse statistique auxquelles est maintenant consacré un volume séparé (le second volume du présent ouvrage), mais surtout le fait que la radiotechnique moderne est essentiellement statistique. Il est évident que tous les aspects de la question n'ont pu être traités dans l'ouvrage, celui-ci étant presque exclusivement consacré aux méthodes mathématiques de la radiotechnique statistique laissant de côté les méthodes de la physique. Il nous a même paru parfois nécessaire de sacrifier la plénitude, la généralité et la rigueur des méthodes mathématiques pour atteindre notre but essentiel qui était de donner à l'ingénieur et au chercheur l'appareil analytique dont il a tant besoin.

Moscou, décembre 1964

*) D. Middleton. *An introduction to statistical theory of communications*. W. B. Davenport, W. L. Root. *An introduction to the theory of random signals and noise*. New York, Mc Graw-Hill, 1958. Ouvrage précité de l'auteur.

INTRODUCTION

Le déterminisme et le hasard. De longue date les études physiques ont été basées sur des principes déterministes, reposant du point de vue mathématique sur des systèmes d'équations différentielles, ceci pour des conditions initiales données. Cependant, bien qu'utilisées d'une manière judicieuse et conséquente, ces méthodes n'englobaient pas toute la complexité infinie des phénomènes réels. De nombreux processus, qui paraissaient pouvoir être étudiés par les méthodes classiques de la physique mathématique, ont exigé, lors d'une étude plus approfondie, l'emploi des *méthodes probabilistes*, c'est-à-dire qu'il a fallu renoncer à une description exacte des variations des systèmes physiques. L'introduction de la notion de probabilité en physique est une étape légitime et naturelle du processus infini de connaissance où « disparaissent des propriétés de la matière qui paraissaient auparavant absolues, immuables, fondamentales... et qui se trouvent maintenant être relatives, imputables seulement à certains états de la matière » *). Ainsi, parallèlement à la physique classique on voit apparaître la *physique statistique*, à côté de la mécanique classique, la *statistique quantique*. La radiotechnique, étudiant des processus macroscopiques ne fait pas en ce sens place à part. Les bruits aléatoires de tous les dispositifs radiotechniques, la structure statistique de toutes les sources d'information ont conduit à la nécessité d'introduire des méthodes probabilistes dans la radiotechnique théorique. Les processus aléatoires sont devenus le modèle mathématique de base des signaux porteurs d'information et des bruits l'accompagnant.

Appareil mathématique. Rien d'étonnant qu'en renonçant aux principes déterministes on ait eu besoin d'un appareil mathématique nouveau. Cependant, comme souvent dans l'histoire de la science, les nouvelles disciplines, dès leur naissance, ont trouvé à leur service l'appareil analytique nécessaire, celui-ci paraissant auparavant pure abstraction mathématique, permettant seulement de décrire une classe restreinte de phénomènes. Il en fut ainsi pour la théorie des probabilités qui, au stade initial, avant d'être utilisée en physique, en biologie et dans la technique, n'avait que des applications douteuses dans les jeux de hasard.

*) V. Lénine. Œuvres complètes (en russe), t. 18, p. 275, Moscou, 1961.

La notion même de probabilité est statistique. Le caractère statistique de cette notion se manifeste dans de multiples réalisations des conditions faisant apparaître un certain événement, et dans la fréquence d'apparition de cet événement. En fait les notions de fréquence et de probabilité sont étroitement liées entre elles. En caractérisant la probabilité d'un événement par un nombre, on ne peut attribuer à ce nombre une autre valeur réelle et un autre sens réel que la fréquence relative d'apparition de cet événement lors d'un grand nombre d'expériences.

On a recours aux méthodes probabilistes afin de pouvoir utiliser directement les lois régissant les effets de masse, sans étudier chaque phénomène à part. Les lois statistiques que l'on observe dans les expériences de masse reflètent des lois probabilistes inhérentes au phénomène étudié. Il devient alors possible d'étudier les lois probabilistes d'une manière purement empirique (ou statistique). Evidemment, on ne s'arrête pas là. Après avoir statistiquement établi certaines lois probabilistes, on peut en déduire statistiquement de nouvelles lois probabilistes, ceci par des déductions logiques ou des calculs, en utilisant à cet effet des règles générales. Ces lois *a priori* établies ainsi pour des phénomènes compliqués peuvent être ensuite confirmées ou infirmées par un traitement statistique des résultats des observations (traitement des données *a posteriori*).

La radiotechnique statistique. La radiotechnique statistique a pour objet l'analyse des modèles probabilistes *a priori* et les déductions statistiques *a posteriori* sous un aspect radiotechnique. Comme il n'existe pas de terme réunissant en lui seul la probabilité et la statistique, nous avons donné la préférence à la nomination « radiotechnique statistique » afin de souligner le parallélisme avec la notion de « physique statistique ».

L'analyse a priori est d'autant plus productive et réalisable que les modèles choisis reflètent mieux la réalité et sont suffisamment simples.

Les déductions statistiques sont toujours faites sur la base d'un nombre limité de données accumulées. Dans ces conditions il est indispensable d'indiquer à l'avance l'algorithme de traitement de l'information échantillonnée accumulée, permettant d'utiliser au mieux (dans un certain sens) cette information afin d'obtenir les renseignements requis sur les propriétés du phénomène étudié.

La radiotechnique statistique fait appel à l'appareil mathématique de la théorie des probabilités et des processus aléatoires, d'une part, et à la statistique mathématique et la théorie des décisions, de l'autre.

La théorie des probabilités et la théorie des processus aléatoires sont l'instrument mathématique de base permettant d'analyser les signaux accompagnés de bruits à la traversée des dispositifs radiotechniques, pour des modèles probabilistes donnés des signaux et des

bruits. Les méthodes de la statistique mathématique et de la théorie des décisions jouent un rôle fondamental dans la synthèse des dispositifs radiotechniques.

La théorie des processus aléatoires ainsi que la théorie des décisions sont apparues de nos jours et se sont développées en une certaine mesure indépendamment des applications techniques en tant que branches autonomes de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique. Ce développement est dans une grande mesure dû aux travaux des mathématiciens éminents A. Khintchine, A. Kolmogorov. J. Neumann. A. Wald. Cependant les problèmes nouveaux de la statistique radiotechnique ont exercé leur influence sur le développement des méthodes mathématiques mentionnées et ont favorisé et accru leur importance pratique.

L'évolution de la radiotechnique statistique est liée aux noms de V. Kotelnikov, N. Wiener, C. Shannon, A. Kharkévitch, V. Bounimovitch, S. Rice, D. Middleton et à de nombreux autres savants et ingénieurs, principalement soviétiques et américains.

Il est difficile, sinon impossible, et peut-être inutile d'établir une frontière entre la radiotechnique statistique et les domaines voisins de la science. Certains résultats et parfois des sections entières peuvent être rapportés non seulement à la radiotechnique statistique, mais également à la théorie de l'information (au sens général), à la théorie statistique des communications, à la commande automatique.

Les méthodes de la radiotechnique statistique ont été appliquées d'une manière très efficace dans la technique radar (dans les problèmes de détection, d'accompagnement et de discrimination des objectifs en présence de bruits) et dans les radiocommunications (en ondes courtes. multiplex. troposphérique et cosmique). Ces méthodes ont permi également de résoudre un grand nombre de problèmes intéressants de radiophysique, de radar sous-marin, de radio-astronomie. de sismologie, de la technique de radioguidage, de télémétrie, de navigation, de mesures radio-électriques, ainsi que de la théorie de la fiabilité et de la théorie des systèmes techniques complexes.

Analyse et synthèse. Les problèmes qu'on rencontre lors de l'élaboration des systèmes de transmission d'information et des éléments de ces systèmes sont essentiellement de deux types: les problèmes d'analyse et de synthèse. Sous leur forme la plus générale ces problèmes peuvent être formulés comme suit. Le problème d'analyse: connaissant les caractéristiques du système (de l'élément) ainsi que le processus appliqué à l'entrée, trouver les caractéristiques du processus à la sortie du système (de l'élément). Le problème de synthèse: connaissant les caractéristiques du processus d'entrée et celles du processus que l'on désire obtenir à la sortie. trouver le système qui pourrait réaliser la transformation requise.

La radiotechnique statistique a pour objet d'étude différents signaux et bruits qui sont généralement des réalisations de *processus*

aléatoires (les processus déterministes étant considérés comme cas particulier). Les problèmes d'analyse consistent alors à déterminer les caractéristiques probabilistes des processus à la sortie des systèmes linéaires et non linéaires si l'on se donne les caractéristiques et la construction des systèmes et la description probabiliste, plus ou moins détaillée, des processus d'entrée. A titre d'exemple, on peut mentionner le calcul du rapport de la puissance du signal à la puissance du bruit à la sortie du système, parfois utilisé en qualité de facteur d'invulnérabilité aux bruits.

La formulation statistique du problème d'une synthèse optimale s'énonce comme suit : déterminer la meilleure (en un certain sens) stratégie, permettant d'après la réalisation observée du signal d'entrée de prendre une décision sur les caractéristiques intéressantes du processus aléatoire (ensemble de réalisations) de sortie. Autrement dit, il y a lieu de chercher un système optimal (un algorithme de traitement du signal d'entrée observé) dont la sortie fournisse une solution ou (et) une estimation numérique caractérisant les propriétés inconnues du phénomène observé. Le résultat qu'on recueille à la sortie du système qu'il soit présenté sous la forme d'une solution ou sous la forme d'une estimation, est une fonctionnelle de la réalisation observée. Pour trouver les caractéristiques probabilistes de cette fonctionnelle on s'adresse aux méthodes utilisées pour la résolution des problèmes d'analyse.

Il faut spécialement souligner que la synthèse statistique en tant que recherche d'un système optimal ou d'un algorithme de traitement est avant tout liée à la définition de la notion d'optimisation. Cette notion comprend tant un critère de qualité que des conditions supplémentaires limitant la classe de systèmes admissibles. Le caractère plus ou moins général de l'optimisation dépend de la forme et du nombre de limitations imposées à la classe de systèmes admissibles. Le choix des critères de qualité et des limitations à imposer aux systèmes est basé sur l'expérience humaine, le bon sens et l'intuition, c'est-à-dire sur tout l'arsenal des moyens dont dispose l'heuristique.

Les méthodes de la synthèse statistique optimale donnent aux constructeurs de systèmes un instrument plus universel que celui dont ils disposaient auparavant, lorsque l'étude des processus était basée sur les caractéristiques énergétiques ne reflétant pas les particularités liées à l'élaboration et à la prise de décisions.

Il ne faut cependant pas oublier que les méthodes de la synthèse statistique ne sont que l'échelon suivant du processus de la connaissance, où on ne peut évidemment pas complètement rejeter l'étude approchée des phénomènes objectifs ni les compromis auxquels on doit inévitablement consentir quand il faut choisir les critères de qualité ou surmonter les difficultés dues à l'absence de données a priori suffisantes, aux impasses mathématiques, ainsi qu'aux complications liées à la réalisation des algorithmes optimaux.

Les différents critères, adaptés aux données a priori dont on dispose, donnent en général des algorithmes optimaux différents de traitement des résultats des observations, bien que certains algorithmes se trouvent parfois être optimaux pour plusieurs critères. C'est, par exemple, le cas des algorithmes linéaires (filtres adaptés) qui sont optimaux pour la détection et la discrimination des signaux déterministes noyés dans des bruits aléatoires additifs suivant une loi de distribution normale.

Les méthodes de la synthèse statistique optimale sont particulièrement efficaces dans le cas de l'indétermination a priori, car très souvent le constructeur du système d'information ne dispose pas de données indispensables sur la répartition des probabilités des signaux, des bruits, sur leur interaction ni sur le caractère des pertes dues à des décisions ou des estimations erronées.

Contenu de l'ouvrage. Le premier volume, consacré aux questions d'analyse probabiliste, contient douze chapitres qui peuvent être divisés en trois parties.

La première partie a pour but de donner au lecteur le strict minimum de connaissances nécessaires sur la théorie des variables et des processus aléatoires. Par tradition, cette partie figure dans presque tous les ouvrages traitant des applications techniques de la théorie des probabilités. Tout en nous conformant à cette tradition, nous avons pris soin de débarrasser cette partie (les quatre premiers chapitres) de tout ce que nous avons jugé superflu. L'exposé est ici orienté vers la préparation de l'étude des applications. Nous avons par conséquent réussi à la faire plus laconique.

La deuxième partie (chapitres 5 à 8) occupe la place centrale. Consacrée à l'analyse probabiliste des transformations fonctionnelles des processus aléatoires dans les éléments (linéaires et non linéaires) des circuits radio-électriques, elle est extrêmement utile pour la résolution d'un grand nombre de problèmes des applications. Comme la radiotechnique est essentiellement la technique de la transmission des signaux par ondes hertziennes de haute fréquence, nous avons étudié séparément et en détail les propriétés et la transformation d'un processus aléatoire *à bande étroite* de sa porteuse et de sa phase.

La troisième partie (les quatre derniers chapitres) traite ed certaines questions spéciales de radiotechnique statistique: le passage de processus aléatoires normaux par un circuit type (amplificateur — détecteur — filtre); les dépassements des processus aléatoires; les processus aléatoires impulsionnels, les spectres énergétiques des signaux modulés par des processus aléatoires. Les deux premières questions se rencontrent très fréquemment dans les recherches.

Le second volume de l'ouvrage est consacré aux questions de synthèse statistique optimale. Sa structure est analogue à celle du premier.

Les deux premiers chapitres (première partie) contiennent un minimum de notions sur la théorie des décisions (statistiques des

événements aléatoires) et la théorie des estimations des paramètres de distribution des variables aléatoires (statistique des variables aléatoires). Les renseignements exposés doivent permettre au lecteur de mieux assimiler le contenu des chapitres consacrés aux applications.

Deux autres chapitres (seconde partie) sont la base mathématique nécessaire à la résolution d'un grand nombre de problèmes de la synthèse statistique, fondée non seulement sur des échantillons discrets, mais également sur des réalisations continues d'un processus aléatoire. On étudie en détail les fondements de la statistique des processus aléatoires, notamment les développements orthogonaux des processus aléatoires, les fonctionnelles du rapport de vraisemblance, la vérification des hypothèses concernant les processus aléatoires, les estimations des paramètres de la distribution d'un processus aléatoire, les estimations des fonctions de corrélation et les spectres énergétiques. Les questions de filtrage linéaire et non linéaire des processus aléatoires sont également examinées.

Le reste du volume (troisième partie) illustre les applications particulières de la théorie de la synthèse statistique à la conception optimale des dispositifs de détection et d'extraction des signaux noyés dans les bruits. On suppose ici que les signaux sont à bande étroite.

Chaque chapitre des deux volumes de l'ouvrage se termine par un certain nombre de problèmes qui doivent être considérés non seulement comme des exercices de révision permettant au lecteur de vérifier qu'il a convenablement assimilé les points fondamentaux, mais également comme un résumé de résultats complémentaires qui, pour certaines raisons, ne peuvent figurer dans le texte principal. Cependant le lecteur qui sera capable, sans se référer aux sources, de démontrer ces résultats, peut être sûr qu'il est apte à poser et à résoudre lui-même de nouveaux problèmes.

Bibliographie. Dans les flux de plus en plus abondants de la littérature technico-scientifique, les ouvrages consacrés aux applications techniques des méthodes de la théorie des probabilités occupent une place importante. Il est vrai que l'abondance de la littérature scientifique éditée, preuve indiscutable du progrès scientifique, peut décourager ceux qui veulent être au courant des récents progrès. A l'heure actuelle, environ 100 000 articles sur des questions de radiotechnique sont publiés annuellement. En supposant même que chaque spécialiste ne soit intéressé que par 3 % de ces articles, il lui faut néanmoins lire 10 articles par jour. C'est pourquoi nous nous sommes limités dans la bibliographie aux références monographiques et à quelques articles parus ces dernières années et concernant directement le texte de l'ouvrage.

Nos lecteurs. Cet ouvrage s'adresse avant tout aux spécialistes occupés dans l'industrie radio-électrique, ingénieurs-chercheurs et

mathématiciens, désirant utiliser les méthodes de la radiotechnique statistique pour la résolution de leurs problèmes. Dans son ensemble, l'ouvrage peut servir de manuel aux aspirants de nombreuses spécialités de radiotechnique statistique et, certaines parties, aux étudiants des années supérieures suivant un cours spécial de théorie des systèmes radio-électriques.

Nous espérons également attirer l'attention d'un auditoire plus large s'intéressant aux applications techniques des méthodes probabilistes et statistiques.

Pour satisfaire un tel auditoire il est très difficile de trouver un compromis raisonnable et rendre cet ouvrage à la fois accessible et suffisamment rigoureux du point de vue mathématique. Il suffit à cet effet de citer A. Kolmogorov qui reconnaît qu'il rêve depuis longtemps de concilier les méthodes rigoureuses des mathématiciens purs et les raisonnements non rigoureux des spécialistes des mathématiques appliquées, des physiciens et des techniciens. Pour réaliser ce rêve il faut que les ingénieurs assimilent des concepts mathématiques nouveaux. Nous ne faisons pas appel à des branches complémentaires des mathématiques contemporaines (comme, par exemple, l'intégrale de Lebesgue, la théorie de la mesure, etc.) et nous supposons chez notre lecteur les connaissances du cours classique de mathématiques supérieures ainsi que des fondements de la radiotechnique. Dans certaines démonstrations nous avons omis les calculs intermédiaires et certaines affirmations ne sont pas expliquées en détail. Au besoin le lecteur peut lui-même les étudier en détail, bien que ce ne soit pas indispensable pour la compréhension de la théorie exposée. Il en est tout autrement quand il s'agit de l'utilisation pratique des résultats théoriques dans un problème concret, lorsque l'étude a pour but la construction du schéma synoptique du dispositif dont les caractéristiques doivent être données finalement sous forme numérique (ou graphique). Il faut ici, en parlant en termes imagés, nous plonger dans la forêt épaisse des mathématiques où l'on cherche les fruits des arbres autres que la théorie des probabilités ou la statistique, mais essentiellement de la théorie des équations intégrales linéaires et de l'algèbre linéaire.

L'exposé présenté de l'état actuel des bases théoriques de la radiotechnique statistique, bien qu'il n'ait pas de fondement mathématique irréprochable, peut servir de base analytique pour des études physiques et techniques ainsi que des calculs pratiques.

Chapitre premier

ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES

1.1. NOTION DE PROBABILITÉ ET RÈGLES FONDAMENTALES

1.1.1. Probabilité d'un événement aléatoire. Dans les recherches scientifiques, les applications techniques et industrielles, il est souvent difficile de prévoir les résultats des expériences, des épreuves ou de certaines opérations qui se répètent de nombreuses fois dans des conditions identiques. L'abandon de la description exacte est dû non pas tellement à ce que le phénomène étudié est trop compliqué mais surtout à l'ignorance de toutes les causes ayant provoqué son apparition ou à l'impossibilité de donner le nombre nécessaire de conditions initiales.

Considérons avant tout la notion d'*expérience*, ou d'*épreuve*. Dans la théorie mathématique exposée ici la nature de l'expérience ne joue aucun rôle. Seules importent les *conditions* des expériences et leurs *résultats*. Comme nous l'avons déjà noté, pour les recherches scientifiques et les applications techniques l'élément caractéristique est la répétition des expériences pour un ensemble de conditions données. S'il est possible de réaliser une longue suite d'expériences pour un certain ensemble de conditions, on parle de *grandes séries*. Dans le calcul des probabilités on se limite aux phénomènes de ce genre.

Les résultats des expériences peuvent être soit *prédéterminés*, c'est-à-dire que les conditions de l'expérience les déterminent complètement, soit *aléatoires*, c'est-à-dire différents d'un cas à l'autre. Dans ce cas, pour un même ensemble de conditions il se trouve impossible de prédire le résultat de chaque expérience isolée.

Le résultat de l'expérience peut être défini comme la réalisation ou la non-réalisation d'un certain événement appelé *événement aléatoire*. La science et la technique nous offrent de nombreux exemples d'événements aléatoires. Ainsi, le niveau des bruits à la sortie d'un dispositif électronique peut surpasser une certaine valeur donnée, un défaut peut survenir dans l'appareillage considéré. Ce sont là des exemples simples d'événements aléatoires. Ici ce n'est pas la nature de l'événement aléatoire qui nous intéresse mais le fait de son apparition, ainsi que sa fréquence de répétition dans la suite des expériences réalisées dans les mêmes conditions.

La théorie des probabilités vise à rechercher les lois régissant les événements aléatoires et les méthodes de leur description quantitative.

L'étude de longues séries de résultats d'expériences fait apparaître la loi suivante : les résultats des expériences isolées peuvent différer les uns des autres, mais les valeurs moyennes des séries d'expériences sont à peu près les mêmes, c'est-à-dire manifestent une certaine stabilité. Cette loi *statistique* observée, la stabilité des résultats moyens, est une manifestation de la loi de *probabilité* régissant tout événement aléatoire. Ainsi, il est impossible de prévoir avec précision si la durée de fonctionnement fiable d'un dispositif donné dépassera une valeur donnée. Cependant l'étude de grands lots de dispositifs identiques permet d'y déceler une loi statistique suivant laquelle *une partie plus ou moins déterminée* de dispositifs de chacun des lots répond à l'exigence concernant la durée de fonctionnement fiable. Cette loi statistique reflète une loi probabiliste qui met la *fiabilité* du dispositif en rapport avec ses particularités constructives et technologiques. Dans l'exposé qui suivra on supposera que les grandes séries de phénomènes étudiés sont régies par des lois probabilistes.

Nous allons maintenant essayer de donner une description quantitative de la stabilité statistique. Soit un certain événement aléatoire A, réalisable pour un certain ensemble de conditions. Supposons qu'on a effectué une série de N épreuves au cours desquelles l'événement A a été réalisé m fois exactement, et évidemment il n'a pas été réalisé $N-m$ fois. Le rapport du nombre de réalisations de l'événement A au nombre total N d'épreuves $\nu = \frac{m}{N}$ s'appelle la fréquence de l'événement A pour N épreuves. Evidemment, la valeur de ν dépend en général de N. Mais lorsque l'on observe la fréquence de réalisation de l'événement A dans de longues séries d'épreuves, on découvre une loi statistique, la stabilité de la fréquence, s'exprimant par des valeurs de ν à peu près identiques. Lorsque N est suffisamment grand, cette fréquence ν, qui varie avec l'augmentation de N, peut servir d'expression quantitative de la loi statistique de réalisation ou de non-réalisation de l'événement A. Pour caractériser quantitativement une loi de probabilité on introduit le nombre p, peu différent de ν pour des N grands, appelé *probabilité* $P\{A\}$ de l'événement A pour un ensemble donné de conditions. Ainsi l'affirmation selon laquelle pour chaque événement aléatoire il existe une probabilité donnée

$$p = P\{A\} \tag{1.1}$$

signifie que dans des séries suffisamment longues d'épreuves les fréquences de réalisation de l'événement A seront à peu près les mêmes et voisines de p. L'hypothèse de l'existence d'une telle grandeur pour une large classe de phénomènes se trouve confirmée par l'expérience et constitue ainsi la base expérimentale de la théorie des probabilités.

La fréquence de réalisation d'un événement satisfait à l'inégalité évidente $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Comme par définition toute probabilité p est approximativement égale à la fréquence ν, il est naturel de supposer que p satisfait à une inégalité analogue

$$0 \leqslant p \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Dans tous les calculs la probabilité doit rester dans les limites indiquées. Si on trouve, pour la probabilité, une valeur négative ou supérieure à l'unité, c'est que l'on a certainement commis une erreur.

Les valeurs limites de la probabilité correspondent à des résultats non aléatoires des épreuves: événement *impossible* ne pouvant se réaliser pour l'ensemble donné de conditions, et événement *certain* qui a lieu inévitablement pour l'ensemble donné de conditions. La probabilité d'un événement impossible est égale à zéro, celle d'un événement certain à l'unité.

Les divers résultats de l'épreuve peuvent être notés sous la forme d'un ensemble d'événements aléatoires $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On peut donc pour N épreuves exprimer comme suit le nombre de réalisations, la fréquence de réalisations et la probabilité des événements:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$
$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n,$$
$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Lorsque N est suffisamment grand les fréquences ν_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sont sensiblement constantes et diffèrent peu des probabilités correspondantes p_i. Il est évident que tout p_i doit satisfaire à l'inégalité (1.2).

1.1.2. Classification des événements. Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent coexister pour un ensemble donné de conditions. Si l'on sait avec certitude qu'au cours d'une expérience aléatoire il se produit l'un des n événements incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, l'ensemble de ces n événements est alors appelé groupe complet.

On appelle événements aléatoires *contraires* deux événements aléatoires incompatibles formant un groupe complet. On peut citer comme exemple simple d'événements contraires l'événement certain et l'événement impossible. L'événement contraire de l'événement A est noté par la même lettre surmontée d'un trait, c'est-à-dire $\overline{A}$.

Si la probabilité de l'événement A dépend de la réalisation d'un autre événement B, on dit que ces deux événements sont *dépendants*.

Deux événements aléatoires sont *indépendants* si la probabilité de l'un d'eux ne dépend pas de celle de l'autre.

Des événements sont *équiprobables* si leur probabilité de réalisation est la même.

On dit que l'événement A *implique* l'événement B si avec la réalisation de A, B se réalise obligatoirement. Si A implique B et B implique A, on dit que les événements A et B sont *équivalents*.

Pour conclure, considérons les événements obtenus à l'aide des opérations logiques « ou » et « et ». L'événement « A_1, *ou* A_2, *ou* . . ., *ou* A_n » se produit dans le cas et seulement dans le cas où au moins l'un des événements A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) est réalisé. L'événement «A_1, *et* A_2, *et* . . ., *et* A_n» a lieu dans le cas et seulement dans le cas où se réalisent tous les événements A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Il faut maintenant mentionner deux règles fondamentales de la théorie des probabilités. Il s'agit des règles d'addition et de multiplication découlant directement de l'interprétation fréquentielle de la notion de probabilité *).

1.1.3. Règle d'addition des probabilités des événements incompatibles. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements incompatibles, la probabilité de réalisation de l'un des événements A_1, ou A_2. ou . . ., ou A_n est égale à la somme des probabilités de ces événements

$$P\{A_1, \text{ ou } A_2, \text{ ou}\ldots, \text{ ou } A_n\} = \sum_{k=1}^{n} P\{A_k\}, \tag{1.3}$$

où $P\{A_k\}$ est la probabilité de la réalisation de l'événement A_k.

Si les événements incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un groupe complet, l'un d'eux doit obligatoirement se produire et, par conséquent,

$$P\{A_1, \text{ ou } A_2, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } A_n\} = 1.$$

Tenant compte de (1.3) on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} P\{A_k\} = 1, \tag{1.4}$$

c'est-à-dire que la somme des probabilités des événements aléatoires formant un groupe complet est égale à l'unité.

Un groupe complet peut être constitué par un ensemble infini, mais obligatoirement *dénombrable*, d'événements pour lesquels on doit avoir $P\{A_n\} \to 0$ pour $n \to \infty$ afin que la somme figurant dans (1.4) soit convergente.

Si un système complet se compose de deux événements A et $\bar{A}$, la relation (1.4) entraîne

$$P\{A\} = 1 - P\{\bar{A}\}. \tag{1.5}$$

*) On utilise souvent les notations symboliques empruntées à la théorie des ensembles: $A = B$ (A équivaut à B) ; $A \subset B$ (A inclus dans B) ; $A \cap B$ ou simplement AB (A et B) ; $A \cup B$ ou $A + B$ (A ou B).

Les deux événements A et $\bar{A}$ du groupe complet étant contraires, la formule (1.5) permet de trouver la probabilité de l'événement A, si l'on connaît la probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$.

Supposons que tous les n événements formant le groupe complet soient équiprobables, c'est-à-dire que l'on ait

$$P\{A_k\} = p$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$. La formule (1.4) permet alors de trouver la probabilité de réalisation de l'un des n événements équiprobables formant le groupe complet

$$\sum_{k=1}^{n} p = np = 1$$

ou

$$p = \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

La probabilité de réalisation de l'un des $m \leqslant n$ événements d'un groupe complet de n événements équiprobables est, conformément à (1.3) et (1.6), égale à

$$P\{A_1, \text{ ou } A_2, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } A_m\} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

Considérons maintenant l'exemple suivant. Dans un intervalle de temps T une impulsion apparaît dans l'une seulement des 10 positions fixes. Désignons par A_k l'événement aléatoire consistant en l'apparition de l'impulsion dans la k-ième position ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 10$). Comme il n'apparaît qu'une seule impulsion, tout couple d'événements A_k et A_r ($k \neq r$) se compose d'événements incompatibles. L'ensemble des événements A_i ($i = 1, 2, \ldots, 10$) forme un groupe complet, car l'apparition de l'impulsion est certaine. Supposons que l'apparition de l'impulsion en n'importe quelle position soit équiprobable. Dans ce cas la probabilité de son apparition en toute position donnée est, conformément à (1.6), égale à $p = 1/10$. La probabilité d'apparition d'une impulsion en l'une des trois premières positions $P\{A_1, \text{ ou } A_2, \text{ ou } A_3\}$ est en vertu de (1.7) égale à $P\{B_1\} = 3/10$, où B_1 désigne l'événement « A_1, ou A_2, ou A_3 ». Supposons maintenant qu'en les positions fixes puisse apparaître une impulsion provenant de cinq sources différentes et soit B_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$) l'événement consistant en ce que l'impulsion provenant de la source j apparaît en l'une des trois premières positions. Conservant l'hypothèse de l'équiprobabilité d'apparition des impulsions en toute position fixe pour toutes les sources on obtient $P\{B_j\} = 3/10$ pour j quelconque. Quelle est maintenant la probabilité qu'aux trois premières positions apparaisse au moins une impulsion, c'est-à-dire quelle est la probabilité de l'événement « B_1, ou B_2,

ou . . ., ou B_5 »? Si pour trouver cette probabilité on applique la règle d'addition des probabilités, on obtient

$$P\{B_1, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } B_5\} = \sum_{j=1}^{5} P\{B_j\} = 5 \cdot \frac{3}{10} = 1{,}5.$$

Ce résultat absurde est dû au fait que l'on a utilisé la règle d'addition des probabilités sans tenir compte des conditions de son *applicabilité*, car chaque couple d'événements B_j et B_k (j, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 5$) est compatible. Pour obtenir une réponse correcte il faut utiliser la règle d'addition des probabilités généralisée aux événements compatibles que nous allons étudier maintenant.

1.1.4. Règle de multiplication des probabilités. La probabilité de la réalisation de deux événements aléatoires A et B dépendants est égale au produit de la probabilité de l'un d'entre eux par la probabilité conditionnelle de l'autre, calculée en supposant que le premier des événements a eu lieu

$$P\{A \text{ et } B\} = P\{A\}\, P_A\{B\} = P\{B\}\, P_B\{A\}. \tag{1.8}$$

La formule (1.8) recèle deux types de probabilité : la probabilité *marginale* (inconditionnée) de l'événement A (ou de l'événement B) calculée en négligeant la réalisation ou la non-réalisation de l'événement B qui en dépend (événement A respectivement), et la probabilité *conditionnelle* de l'événement B (de l'événement A) calculée en supposant que l'événement A (événement B respectivement) a eu lieu. C'est pourquoi les probabilités marginales $P\{A\}$ et $P\{B\}$ sont parfois appelées probabilités *a priori*, et les probabilités conditionnelles $P_A\{B\}$ et $P_B\{A\}$ probabilités *a posteriori*.

Les relations (1.8) permettent d'obtenir directement les formules suivantes:

$$P_A\{B\} = \frac{P\{A \text{ et } B\}}{P\{A\}}, \tag{1.9}$$

$$P_B\{A\} = \frac{P\{A \text{ et } B\}}{P\{B\}}, \tag{1.9'}$$

pouvant servir de *définition aux probabilités conditionnelles*.

Par suite de (1.9) on a $P\{A \text{ et } B\} \leqslant P\{A\}$ et $P\{A \text{ et } B\} \leqslant$ $\leqslant P_A\{B\}$; on peut obtenir des inégalités analogues à partir de (1.9′) pour $P\{B\}$ et $P_B\{A\}$.

En divisant (1.9) par (1.9′) on obtient également

$$P_A\{B\} = \frac{P\{B\}\, P_B\{A\}}{P\{A\}}. \tag{1.10}$$

La formule (1.10) permet, à partir des probabilités marginales de deux événements et à partir de la probabilité conditionnelle de l'un d'eux, de trouver la probabilité conditionnelle de l'autre.

Un cas des plus importants est celui des événements A et B indépendants. Dans ce cas la réalisation de l'un d'eux n'influe aucunement sur la probabilité de réalisation de l'autre, c'est-à-dire que les probabilités a priori et a posteriori deviennent égales

$$P_A\{B\} = P\{B\}, \quad P_B\{A\} = P\{A\}. \tag{1.11}$$

Pour des événements indépendants la règle de multiplication s'exprime par la formule suivante:

$$P\{A \text{ et } B\} = P\{A\}\cdot P\{B\}. \tag{1.12}$$

Cette dernière égalité peut servir de *définition de l'indépendance* de deux événements aléatoires A et B.

La formule (1.12) s'étend au cas d'un nombre arbitraire d'événements mutuellement indépendants *) (dans leur ensemble) B_1, $B_2, \ldots, B_n$:

$$P\{B_1, \text{ et } B_2, \text{ et } \ldots, \text{ et } B_n\} = \prod_{k=1}^{n} P\{B_k\}. \tag{1.13}$$

En vertu de (1.12) pour deux événements dépendants A et B la différence $P\{A \text{ et } B\} - P\{A\}\cdot P\{B\}$ n'est pas nulle. Il est donc naturel de choisir pour mesure quantitative de la dépendance entre ces deux événements une grandeur proportionnelle à cette différence. Cette grandeur, appelée *coefficient de corrélation* entre les événements A et B, est définie par la formule **)

$$R_{AB} = \frac{P\{A \text{ et } B\} - P\{A\}\cdot P\{B\}}{\sqrt{P\{A\}\, P\{\bar{A}\}\, P\{B\}\, P\{\bar{B}\}}}. \tag{1.14}$$

Le coefficient de corrélation est positif si la probabilité de l'un des événements croît quand l'autre est réalisé, et négatif au cas contraire.

1.1.5. Règle d'addition des événements compatibles. Considérons d'abord un ensemble $B_1, \ldots, B_n$ d'événements mutuellement indépendants.

Soit $\bar{B}_k$ l'événement contraire de B_k. La réalisation de l'un quelconque des événements B_k exclut la possibilité de la réalisation simultanée de tous les événements $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_n$. Ainsi, conformément

---

*) Les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont dits mutuellement indépendants si pour tout i tel que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ on a

$$P\{B_{i_1}, \text{ et } B_{i_2}, \text{ et } \ldots, \text{ et } B_{i_r}\} = \prod_{k=1}^{r} P\{B_{i_k}\}.$$

Notons que de l'indépendance de couples d'événements B_i et B_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *ne découle pas* celle de l'ensemble d'événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

**) On peut montrer que l'on a toujours $|R_{AB}| \leqslant 1$ (voir, par exemple, [2]). $R_{AB} = 0$ dans le cas et seulement dans le cas où les événements A et B sont indépendants.

à (1.5) on a

$$P\{B_1, \text{ ou } B_2, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } B_n\} = 1 - P\{\overline{B}_1, \text{ et } \overline{B}_2, \text{ et } \ldots, \text{ et } \overline{B}_n\}.$$

Comme $\overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_n$ sont mutuellement indépendants, en vertu de la règle de multiplication (1.13) on a

$$P\{\overline{B}_1, \text{ et } \overline{B}_2, \text{ et } \ldots, \text{ et } \overline{B}_n\} = \prod_{k=1}^{n} P\{\overline{B}_k\}.$$

De plus

$$P\{\overline{B}_k\} = 1 - P\{B_k\}.$$

Par conséquent

$$P\{B_1, \text{ ou } B_2, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } B_n\} = 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - P\{B_k\}]. \quad (1.15)$$

La formule (1.15) permet de calculer la probabilité de réalisation de l'un au moins des événements compatibles et mutuellement indépendants $B_1, B_2, \ldots, B_n$ en fonction de leurs probabilités.

Les formules (1.15) permettent de trouver très facilement une solution correcte du problème posé ci-dessus, concernant la probabilité que, pour cinq sources indépendantes, on trouvera dans les trois premières positions au moins une impulsion. La probabilité cherchée est égale à

$$P\{B_1, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } B_5\} = 1 - \left(1 - \frac{3}{10}\right)^5 = 0{,}832.$$

Effectuons la multiplication dans le second membre de (1.15) et introduisons les notations suivantes:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P\{B_i\}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P\{B_i\} P\{B_j\}, \ldots,$$

$$S_r = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_r=1}^{n} P\{B_{i_1}\} \ldots P\{B_{i_r}\}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n.$$

(Chaque combinaison d'indices dans les sommes apparaît une seule fois, donc S_r contient $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ termes.) Le dernier terme s'écrit comme suit:

$$S_n = P\{B_1\} P\{B_2\} \ldots P\{B_n\}.$$

La formule (1.15) peut alors s'écrire sous la forme

$$P\{B_1, \text{ ou } B_2, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } B_n\} = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n. \quad (1.16)$$

Dans le cas particulier où $n = 2$ la formule (1.16) donne

$$P\{B_1, \text{ ou } B_2\} = S_1 - S_2 =$$
$$= P\{B_1\} + P\{B_2\} - P\{B_1\} P\{B_2\}. \qquad (1.16')$$

Comme la somme $S_1 = P\{B_1\} + P\{B_2\}$ contient deux fois les cas où les événements B_1 et B_2 se réalisent simultanément, on doit en retrancher la probabilité $S_2 = P\{B_1\} P\{B_2\}$ de la réalisation simultanée des événements indépendants B_1 et B_2. Pour un n arbitraire la formule (1.16) peut être interprétée d'une manière analogue en se basant sur le principe de l'inclusion et de l'exclusion : on inclut tout et on exclut ce qui est superflu, puis on inclut tout ce qui a été exclu par erreur, etc., c'est-à-dire qu'on procède alternativement à des inclusions et des exclusions. En utilisant ce principe, on peut facilement démontrer que la formule (1.16) *reste valable* pour un ensemble d'événements dépendants, si seulement dans les formules pour S_r on remplace les produits des probabilités par les probabilités de la réalisation simultanée des événements

$$S_r = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_r=1}^{n} P\{B_{i_1}, \text{ et } B_{i_2}, \text{ et } \ldots, \text{ et } B_{i_r}\},$$
$$i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n.$$

Le premier terme S_1 dans (1.16) est toujours égal à la somme des probabilités, c'est-à-dire qu'il correspond à l'incompatibilité des événements, et les autres termes apportent une correction tenant compte du fait qu'en réalité les événements sont compatibles. Ce n'est que dans le cas où l'on peut négliger la probabilité de la réalisation simultanée des événements par rapport aux probabilités a priori de ces événements que l'on peut, au lieu de la règle généralisée d'addition (1.16), utiliser, avec une certaine approximation, la règle ordinaire (1.3) pour les événements incompatibles.

1.1.6. Formule des probabilités totales. On a parfois besoin de déterminer la probabilité d'un événement A pouvant se produire simultanément avec l'un de n événements mutuellement incompatibles $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formant un groupe complet. Ces n événements mutuellement incompatibles sont parfois appelés hypothèses liées à l'apparition de l'événement A. Tout couple de combinaisons d'événements (A et B_i) et (A et B_j) pour $i \neq j$ étant incompatible, en utilisant la règle d'addition, on peut écrire la probabilité de l'événement A sous la forme d'une somme

$$P\{A\} = P\{A \text{ et } B_1, \text{ ou } A \text{ et } B_2, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } A \text{ et } B_n\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P\{A \text{ et } B_k\}. \qquad (1.17)$$

Conformément à la règle d'addition chacun des termes de cette somme est égal à

$$P\{A \text{ et } B_k\} = P\{B_k\} P_{B_k}\{A\}$$

et par conséquent

$$P\{A\} = \sum_{k=1}^{n} P\{B_k\} P_{B_k}\{A\}. \tag{1.18}$$

La relation (1.18) est appelée *formule des probabilités totales*. Cette formule permet de déterminer la probabilité de l'événement A si l'on connaît les probabilités a priori des hypothèses $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_n$ et les probabilités a posteriori de l'événement A dans le cas où l'une des hypothèses s'est trouvée confirmée.

Supposons maintenant que l'on doive trouver la probabilité a posteriori de l'hypothèse B_i à condition que l'événement A ait été réalisé. Il suffit pour cela d'utiliser la formule (1.10)

$$P_A\{B_i\} = \frac{P\{B_i\} P_{B_i}\{A\}}{P\{A\}}$$

et, en remplaçant $P\{A\}$ par sa valeur tirée de la formule des probabilités totales, on obtient la formule dite *de Bayes*

$$P_A\{B_i\} = \frac{P\{B_i\} P_{B_i}\{A\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} P\{B_k\} P_{B_k}\{A\}}. \tag{1.19}$$

1.2. SUITE D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

1.2.1. Formule binomiale. De nombreux problèmes dont les solutions ont un vaste champ d'applications pratiques s'inscrivent dans le cadre du schéma d'*une suite d'épreuves indépendantes*, appelé parfois schéma de Bernoulli. Supposons que l'on effectue n épreuves indépendantes, la probabilité de la réalisation de l'événement aléatoire A étant chaque fois la même et égale à p. La probabilité de la non-réalisation de l'événement A au cours de l'épreuve, c'est-à-dire la probabilité de la réalisation de l'événement contraire, est égale à $q = 1 - p$. Proposons-nous de trouver la probabilité de la réalisation de l'événement A exactement k fois ($k \leqslant n$) au cours de n épreuves. On résout ce problème en appliquant simplement les règles d'addition et de multiplication ou bien la formule des probabilités totales qui en découle.

Désignons par A_k l'événement consistant en ce que, durant n épreuves indépendantes, A soit réalisé exactement k fois. On peut émettre plusieurs hypothèses mutuellement incompatibles en ce qui concerne la réalisation de l'événement A_k. L'une de ces hypothèses

B_1 consiste en ce que l'événement A soit réalisé au cours des k premières épreuves et ne le soit pas durant les $n - k$ épreuves suivantes. Dans ce cas conformément à la règle de multiplication pour des épreuves indépendantes on trouve

$$P\{A_k \text{ et } B_1\} = \underbrace{pp \ldots p}_{k \text{ fois}} \underbrace{qq \ldots q}_{n-k \text{ fois}} = p^k q^{n-k}.$$

Une autre hypothèse B_2 consiste en ce que l'événement A n'est pas réalisé lors de la première épreuve, puis s'est produit k fois de suite et ne s'est pas produit lors de $n - k - 1$ épreuves restantes. Dans ce cas

$$P\{A_k \text{ et } B_2\} = q\underbrace{pp \ldots p}_{k \text{ fois}} \underbrace{qq \ldots q}_{n-k-1 \text{ fois}} = p^k q^{n-k}.$$

Il est évident que pour toute hypothèse B_s concernant l'ordre de la réalisation de l'événement A exactement k fois et de sa non-réalisation $n - k$ fois au cours de n épreuves indépendantes, la probabilité $P\{A_k$ et $B_s\}$ sera après permutation convenable des facteurs égale à $p^k q^{n-k}$.

Ainsi tout ordre de réalisation de l'événement A exactement k fois au cours de n épreuves indépendantes se trouve être équiprobable. Le nombre de possibilités diverses liées à la réalisation de l'événement A_k est égal au nombre de combinaisons de n éléments pris k à k. Cette grandeur est généralement désignée par le symbole C_n^k ou $\binom{n}{k}$ et s'exprime sous la forme du rapport de factorielles

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Comme les hypothèses $B_1, B_2, \ldots, B_{\binom{n}{k}}$ sont mutuellement incompatibles, en appliquant la formule des probabilités totales (1.17) on obtient l'expression suivante pour la probabilité cherchée de l'événement A_k:

$$P\{A_k\} = P_n(k) = \sum_{s=1}^{\binom{n}{k}} P\{A_k \text{ et } B_s\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \qquad (1.20)$$

On voit aisément que $P_n(k)$ est égale au coefficient de x^k dans le développement du binôme $(q + px)^n$ suivant les puissances de x. C'est pourquoi la formule (1.20) est souvent appelée *binomiale*.

L'ensemble des événements A_k forme un système complet d'événements incompatibles, car au cours des épreuves l'événement A ou bien n'est pas réalisé du tout ou bien est réalisé un certain nombre

de fois. Donc, conformément à (1.4) on a

$$\sum_{k=0}^{n} P\{A_k\} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1,$$

ce qui découle également du développement du binôme $(q + px)^n$ qui pour $x = 1$ donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1.$$

La fonction $P_n(k)$ est une fonction de l'argument entier k. Cette fonction est maximale pour une certaine valeur $k = k_0$ appelée *valeur la plus probable* du nombre de réalisations de l'événement A pour n épreuves indépendantes. La valeur la plus probable k_0 dépend aussi bien du nombre n d'épreuves indépendantes, que de la probabilité p de la réalisation de l'événement au cours de chaque épreuve.

Pour déterminer cette valeur la plus probable il suffit de considérer la relation

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{(n-k+1)\,p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)\,p-k}{kq}, \tag{1.21}$$

en vertu de laquelle la valeur la plus probable du nombre k_0 de réalisations de l'événement, pour lequel la probabilité $P_n(k)$ est maximale, doit être égale à la partie entière de la grandeur $(n + 1)\,p$, c'est-à-dire

$$k_0 = [(n + 1)\,p]. \tag{1.21'}$$

Le symbole $[x]$ désigne ici la partie entière du nombre x.

Si $(n + 1)\,p$ est un nombre entier, il existe deux probabilités maximales égales entre elles

$$P_n(k_0) = P_n(k_0 - 1).$$

Ce n'est pas tant la probabilité de réalisation de l'événement un certain nombre de fois qui présente un intérêt pratique, mais la probabilité que le nombre de réalisation de l'événement au cours de n épreuves soit compris dans les limites entre k_1 et k_2.

On trouve cette probabilité à partir de la règle d'addition

$$P_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2),$$

et tenant compte de (1.20) on a

$$P_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Il est évident que

$$P_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} = P\{0 \leqslant k \leqslant k_2\} - P\{0 \leqslant k < k_1\}.$$

La probabilité de la forme $P_n\{0 \leqslant k \leqslant m\}$ est égale au rapport de la *fonction bêta incomplète à la fonction bêta complète*, en effet

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = I_q(n-m,\ m+1) = \frac{B_q(n-m,\ m+1)}{B(n-m,\ m+1)}, \tag{1.22}$$

où la fonction bêta incomplète $B_q(x,\ y)$ et la fonction bêta complète $B(x,\ y)$ sont définies par les intégrales *)

$$B_q(x,\ y) = \int_0^q z^{x-1}(1-z)^{y-1}\,dz, \tag{1.22'}$$

$$B(x,\ y) = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}\,dz. \tag{1.22''}$$

Pour vérifier l'égalité (1.22) il suffit de substituer dans le second membre l'intégrale (1.22′), de dériver les deux membres par rapport à q et d'utiliser l'expression

$$B(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.2.2. Formule asymptotique de Moivre-Laplace. Lorsque le nombre d'épreuves indépendantes est grand, le calcul direct des probabilités à l'aide de la formule (1.20) est très difficile, car le calcul des coefficients du binôme se ramène à celui des factorielles pour de grands arguments. On peut obtenir les factorielles avec une précision suffisante en appliquant la *formule asymptotique de Stirling*. Cette dernière s'écrit comme suit **)

$$m! \sim \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m}. \tag{1.23}$$

Remarquons que même dans le plus défavorable des cas pour $m = 1$ la formule donne une erreur relative de 8 %, et pour $m = 100$ cette erreur se réduit à 0,08%. Pour un m arbitraire la valeur exacte de $m!$ ne diffère de sa valeur asymptotique calculée à l'aide de (1.23) que par le facteur e^{ε_m} où $0 < \varepsilon_m < \frac{1}{12m}$.

Posons $l = n - k$ et transformons la formule binomiale (1.20) au moyen de la formule de Stirling. On obtient alors

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{kl}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{l}\right)^l. \tag{1.24}$$

*) On peut trouver dans [10] les tables détaillées de la fonction bêta incomplète.

**) Le symbole $\sim$ (égalité asymptotique) signifie que le rapport des deux expressions reliées par ce symbole tend vers l'unité lorsque m tend vers l'infini. La formule de Stirling (1.23) est également valable pour la fonction gamma $\Gamma(m+1)$, où m n'est pas obligatoirement un nombre entier.

Introduisons également les désignations suivantes

$$x_{nk}=\frac{k-np}{\sigma}=\frac{nq-l}{\sigma}, \qquad (1.25)$$

$$\sigma=\sqrt{npq}. \qquad (1.26)$$

Remarquons que pour $n\gg 1$ et p donné la grandeur $k_0 = [(n+1)p]\approx np$ et, par conséquent, la différence $k-np$ est l'écart du nombre de réalisations de l'événement de sa valeur la plus probable, et x_{nk} la valeur normée (en divisant par σ) de cette différence.

Supposons que les grandeurs x_{nk} pour $n\to\infty$ restent bornées, c'est-à-dire que pour $n\to\infty$

$$k=np+\sigma x_{nk}\to\infty,\ l=nq-\sigma x_{nk}\to\infty.$$

Cette hypothèse entraîne

$$\frac{kl}{n}=n\left(p+\frac{\sigma x_{nk}}{n}\right)\left(q-\frac{\sigma x_{nk}}{n}\right)\sim npq=\sigma^2, \qquad (1.27)$$

$$\ln\left[\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{l}\right)^l\right]=-(np+\sigma x_{nk})\ln\left(1+\frac{\sigma x_{nk}}{np}\right)-$$
$$-(nq-\sigma x_{nk})\ln\left(1-\frac{\sigma x_{nk}}{nq}\right)=-(np+\sigma x_{nk})\times$$
$$\times\left[\frac{\sigma x_{nk}}{np}-\frac{1}{2}\frac{qx_{nk}^2}{np}+O(n^{-3/2})\right]+$$
$$+(nq-\sigma x_{nk})\left[\frac{\sigma x_{nk}}{nq}+\frac{1}{2}\frac{px_{nk}^2}{nq}+O(n^{-3/2})\right]=$$
$$=-\frac{x_{nk}^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (1.28)$$

On y trouve les deux premiers termes du développement en série entière des logarithmes. Le symbole $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ désigne la somme de tous les termes du développement, qui sont tous des infiniment petits d'ordre non inférieur à $\frac{1}{n^\alpha}$.

En substituant (1.27) et (1.28) dans (1.24) on obtient, aux infiniment petits d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près, l'égalité asymptotique suivante:

$$P_n(k)\sim\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}. \qquad (1.29)$$

La formule (1.29), appelée parfois théorème *local de Moivre-Laplace*, est l'approximation asymptotique recherchée de la probabilité $P_n(k)$, sa valeur exacte étant donnée par la formule binomiale (1.20).

Remarquons que pour des n et k donnés la précision maximale de l'approximation asymptotique (1.29) correspond à la valeur $p = q = 1/2$. Dans ce cas l'erreur devient un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{n}$.

Conformément à (1.29) la probabilité de la valeur la plus probable k_0 du nombre de réalisations de l'événement est

$$P_n(k_0) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \tag{1.30}$$

Utilisant (1.29) on peut facilement écrire l'expression de la probabilité pour que le nombre de réalisations de l'événement soit compris entre k_1 et k_2:

$$P_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} =$$
$$= P_n\left\{\frac{k_1-k_0}{\sigma} \leqslant x_{nk} \leqslant \frac{k_2-k_0}{\sigma}\right\} \sim \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}.$$

Remarquant que

$$\frac{1}{\sigma} = x_{n,\,k+1} - x_{nk} = \Delta x_{nk},$$

la dernière égalité peut s'écrire sous la forme

$$P_n\{a \leqslant x_{nk} \leqslant b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=k_1}^{k_2} \Delta x_{nk} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}, \tag{1.31}$$

où l'on a introduit les désignations suivantes

$$a = \frac{k_1-k_0}{\sigma}, \quad b = \frac{k_2-k_0}{\sigma}. \tag{1.32}$$

La somme se trouvant dans le second membre de (1.31) pour des n suffisamment grands différera peu de l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$.

Ainsi, la probabilité pour que le nombre de réalisations de l'événement au cours de n épreuves indépendantes soit compris entre k_1 et k_2 peut être calculée à l'aide de la formule asymptotique suivante :

$$P_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} = P\{a \leqslant x_{nk} \leqslant b\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz, \tag{1.33}$$

où les grandeurs finies a et b sont données par (1.32).

La formule (1.33) est l'expression analytique du *théorème intégral de Laplace*. Introduisant la désignation

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz, \tag{1.34}$$

on peut écrire (1.33) sous la forme

$$P\{a\leqslant x_{nk}\leqslant b\}\sim F(b)-F(a). \tag{1.35}$$

Dans l'annexe I on trouvera une table des valeurs de $F(x)$.

La fonction $F(x)$ joue un rôle très important dans la théorie des probabilités. Ces propriétés seront étudiées plus en détail dans le chapitre suivant.

1.2.3. Formule asymptotique de Poisson. Dans de nombreuses applications lorsque l'on a affaire à un grand nombre d'épreuves indépendantes ($n\gg 1$) répétées, la probabilité de réalisation de l'événement considéré lors d'une épreuve est relativement petite, de sorte que

$$p=\frac{\lambda}{n}, \tag{1.36}$$

où λ est une grandeur positive constante.

Dans ce cas l'expression asymptotique (1.30) de la probabilité $P_n(k)$ est entachée de fortes erreurs de sorte qu'il faut utiliser une autre formule asymptotique due à Poisson.

Considérons la probabilité de la non-réalisation de l'événement au cours de toutes les n épreuves. Conformément à (1.20) et (1.36) cette probabilité peut s'écrire de la manière suivante:

$$P_n(0)=(1-p)^n=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n,$$

d'où

$$\ln P_n(0)=n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)=-\lambda-\frac{\lambda^2}{2n}-\ldots$$

Si $n\gg\lambda$ on peut alors, dans le développement du logarithme en série, se limiter au premier terme; dans ce cas

$$P_n(0)\sim e^{-\lambda}. \tag{1.37}$$

Par suite de (1.21) pour k donné on a

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)}=\frac{\lambda-(k-1)p}{kq}\sim\frac{\lambda}{k}. \tag{1.38}$$

Pour $k=1$, (1.37) et (1.38) donnent

$$P_n(1)\sim\lambda e^{-\lambda}.$$

D'une manière analogue pour $k=2$ on a

$$P_n(2)\sim\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}.$$

On trouve ainsi la formule asymptotique

$$P_n(k) \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p(k, \lambda), \tag{1.39}$$

appelée *formule de Poisson*.

On peut trouver une table des valeurs de l'approximation de Poisson (1.39) pour la formule binomiale dans de nombreux ouvrages de la théorie des probabilités (voir, par exemple, [3]).

Ecrivons maintenant l'expression de la probabilité de m réalisations au maximum de l'événement. Utilisant (1.39) on obtient

$$P_n\{k \leqslant m\} = \sum_{k=0}^{m} P_n(k) \sim \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(m, \lambda). \tag{1.40}$$

La fonction $P(m, \lambda)$ peut être présentée sous forme intégrale

$$P(m, \lambda) = \frac{1}{m!} \int_{\lambda}^{\infty} z^m e^{-z} dz.$$

Pour $\lambda = 0$ cette intégrale représente la fonction gamma $\Gamma(m + 1)$, qui pour un argument entier est égale à la factorielle

$$\Gamma(m+1) = m! = \int_0^{\infty} z^m e^{-z} dz.$$

L'intégrale

$$\Gamma(m+1, \lambda) = \int_0^{\lambda} z^m e^{-z} dz = \Gamma(m+1) - \int_{\lambda}^{\infty} z^m e^{-z} dz \tag{1.41}$$

est appelée *fonction gamma incomplète* *). Cette fonction permet d'écrire la probabilité de la réalisation d'un événement m fois au maximum de la manière suivante:

$$P(m, \lambda) = 1 - \frac{\Gamma(m+1, \lambda)}{\Gamma(m+1)}. \tag{1.42}$$

Pour de grandes valeurs de m la fonction gamma incomplète peut, avec une précision suffisante, être remplacée par son expression asymptotique qui est une intégrale de Laplace [voir (1.34)]

$$\frac{\Gamma(m+1, \lambda)}{\Gamma(m+1)} \sim F\left(2\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{m+1}\right). \tag{1.43}$$

1.2.4. Formule polynomiale. Jusqu'à présent on a considéré une suite d'épreuves indépendantes caractérisée par la réalisation ou la non-réalisation d'un certain événement A au cours de chaque épreuve.

*) Il existe des tables détaillées de la fonction gamma incomplète [9, 11, 12] pour une gamme étendue de variations de ses arguments.

Dans certains cas le résultat de chaque épreuve peut être non pas l'un des deux événements A ou $\bar{A}$, mais un groupe complet de m événements incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Supposons que la probabilité de réalisation de l'événement A_i au cours de chaque épreuve soit égale à p_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Comme les événements $A_1, A_2, \ldots, A_m$ forment un système complet, on a $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Quelle est la probabilité pour que, durant n épreuves indépendantes, l'événement A_1 soit réalisé exactement k_1 fois, l'événement A_2 exactement k_2 fois, etc., l'événement A_m exactement m fois? La réponse à cette question est donnée par la formule *polynomiale*

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}, \tag{1.44}$$

généralisant la formule binomiale (1.20). Les nombres $k_1, k_2, \ldots, k_m$ doivent naturellement satisfaire à la condition

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = n. \tag{1.45}$$

La probabilité $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ est le coefficient des termes $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_m^{k_m}$ dans le développement du polynôme $(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_mx_m)^n$. Pour $n = 2$ la formule (1.44) devient (1.20).

A titre d'exemple du schéma généralisé des épreuves indépendantes on peut prendre la transmission successive des lettres d'un texte en langue française où chaque lettre est transmise indépendamment de la précédente. Le résultat de l'épreuve est l'apparition de l'une des $m = 26$ lettres de l'alphabet, qui, dans l'exemple considéré, représente un groupe complet d'événements. On peut se proposer de trouver la probabilité pour que, dans un texte de n lettres, la lettre A apparaisse k_1 fois, la lettre B k_2 fois, etc., la lettre Z k_m fois. La réponse à cette question se trouve dans la formule (1.44) et la table des probabilités (fréquences relatives) p_i de rencontrer la lettre considérée dans un texte en langue française.

La formule asymptotique de Laplace peut également être généralisée au cas polynomial. Introduisons les désignations

$$x_i = \frac{k_i - np_i}{\sigma_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} k_i = n,$$

$$\sigma_i^2 = np_iq_i, \quad q_i = 1 - p_i.$$

On obtient pour tout x_i fini

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{p_1p_2\ldots p_m}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} q_ix_i^2}. \tag{1.46}$$

La probabilité $P_n(G)$ pour que l'ensemble des nombres $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ appartienne à un certain domaine G de l'espace à m dimensions satisfait à l'égalité asymptotique

$$P_n(G) \sim \sqrt{\frac{q_1 q_2 \cdots q_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} p_m}} \int \ldots \int_G e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} q_i x_i^2} dx_1 \ldots dx_{m-1}. \quad (1.47)$$

Pour $m = 2$ les formules (1.46) et (1.47) se réduisent à (1.29) et (1.33) respectivement.

1.3. CHAÎNE SIMPLE DE MARKOV

L'exemple que nous avons donné de la transmission des lettres d'un texte peut servir d'illustration d'autres possibilités de généralisation du schéma des épreuves indépendantes. Cette généralisation est conditionnée par le fait que dans tout texte sensé la succession de lettres ne peut pas être assimilée à une suite d'épreuves indépendantes. Effectivement, il est peu probable que plusieurs voyelles se succèdent.

La forme la plus simple de dépendance stochastique consiste en ce que la probabilité conditionnelle de réalisation d'un événement quelconque A_j au cours de $(s + 1)$ épreuves ne dépend que de l'événement A_i qui a été réalisé lors de la s-ième épreuve et ne dépend pas des événements qui ont été réalisés lors des épreuves antérieures. Dans l'exemple avec les lettres d'un texte cela signifie qu'il n'existe une dépendance stochastique qu'entre deux lettres consécutives.

On appelle *chaîne simple de Markov* une suite d'épreuves pour lesquelles la probabilité conditionnelle $p_{ij}^{(s)}$ de réalisation de l'événement A_j au cours de la $(s + 1)$-ième épreuve dépend uniquement du résultat de la s-ième épreuve et ne dépend pas des événements réalisés lors des épreuves antérieures. Cette chaîne porte le nom du mathématicien russe ayant étudié ces suites d'événements aléatoires. Si la probabilité conditionnelle p_{ij} de passage (ou de transition) de l'événement A_i à l'événement A_j ne dépend que de ces événements, mais ne dépend pas du numéro de l'épreuve, la chaîne simple de Markov correspondante est appelée *homogène*.

Un cas plus compliqué se présente si l'on tient compte de la réalisation de deux ou d'un plus grand nombre d'événements antérieurs. Dans l'exemple de la transmission d'un texte cela veut dire que l'on tient compte des probabilités de combinaisons à trois ou quatre lettres, etc. En procédant de manière analogue on peut obtenir des chaînes de Markov de plus en plus compliquées.

Conformément à la définition donnée, pour décrire une chaîne simple homogène de Markov il faut spécifier les probabilités conditionnelles p_{ij} de réalisation de l'événement A_j après l'événement

A_i, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Ces probabilités sont dites *de transition* (ou de passage), on peut les disposer dans un tableau:

$$M_1 = \begin{Vmatrix} p_{11} p_{12} \ldots p_{1m} \\ p_{21} p_{22} \ldots p_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_{m1} p_{m2} \ldots p_{mm} \end{Vmatrix}. \tag{1.48}$$

Ce tableau est appelé *matrice des probabilités de transition* (ou matrice stochastique). Cette matrice contient toute l'information stochastique concernant les passages d'un événement à un autre au cours de l'épreuve suivante. Cependant l'information sera incomplète si l'on ne mentionne pas les probabilités a priori p_{0k} de réalisation de chacun des événements A_k au cours de la première épreuve. La matrice M_1 des probabilités de transition et les probabilités a priori p_{0k}, $k = 1, \ldots, m$ définissent complètement une chaîne simple homogène de Markov.

Considérons quelques relations simples de la théorie des chaînes de Markov. Puisque durant chaque épreuve l'un des événements A_k $(k = 1, \ldots, m)$ formant un groupe complet est nécessairement réalisé, la somme des probabilités de transition dans chaque ligne de la matrice M_1 doit être égale à l'unité, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1.49}$$

Pour une chaîne simple homogène de Markov outre la matrice des probabilités de transition (1.48) il y a lieu de considérer également la matrice de transition à n pas qui peut être présentée sous la forme

$$M_n = \begin{Vmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \ldots & p_{1m}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & \ldots & p_{2m}(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m1}(n) & p_{m2}(n) & \ldots & p_{mm}(n) \end{Vmatrix}, \tag{1.50}$$

où $p_{ij}(n)$ est la probabilité de réalisation de l'événement A_j au cours de la $(s + n)$-ième épreuve, si au cours de la s-ième épreuve c'est l'événement A_i qui a été réalisé.

La probabilité de passage de l'événement A_r au cours de la k-ième épreuve à l'événement A_j au cours de la n-ième épreuve avec les notations adoptées est égale à $p_{rj}(n - k)$. La formule des probabilités totales [voir (1.18)] donne alors la probabilité de passage de A_i se produisant au cours de l'épreuve initiale à A_j au cours de la n-ième épreuve

$$p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{m} p_{ir}(k)\, p_{rj}(n-k), \tag{1.51}$$

$$1 \leqslant k \leqslant n - 1.$$

Les relations (1.51) ne sont vraies que pour une chaîne simple de Markov; si la probabilité de transition dépendait également de l'histoire des événements, il n'y aurait pas de produit simple sous le signe de somme.

La formule (1.51) détermine la probabilité a posteriori de réalisation de A_j à la n-ième épreuve, si au cours de l'épreuve initiale l'événement A_i a été réalisé. La probabilité a priori $p_j(n)$ de réalisation de A_j lors de la n-ième épreuve, indépendamment du résultat de l'épreuve initiale, est, conformément à la formule des probabilités totales, égale à

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^{m} p_{0i} p_{ij}(n). \qquad (1.52)$$

Il découle de (1.52) que la probabilité a priori $p_j(n)$ dépend aussi bien de la grandeur n que des probabilités initiales p_{0i} ($i = 1, \ldots, m$).

Une chaîne de Markov caractérisée par les probabilités de transition $p_{ij}(n)$ ($0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant m$) est dite *transitive* s'il y a un $n > 0$ tel que $p_{ij}(n) > 0$ ($0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant m$). Autrement dit, pour une chaîne transitive il existe une épreuve pour laquelle le passage de tout événement quelconque à tout autre événement, appartenant à un ensemble fini d'événements $A_1, \ldots, A_m$, est possible. On a alors un théorème (voir, par exemple, [8]) suivant lequel pour une chaîne de Markov simple, transitive et homogène, la limite

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = p_j$$

existe et ne dépend pas de i. Conformément à ce théorème les probabilités a priori $p_j(n)$ de réalisation de l'événement A_j à la n-ième épreuve tendent également vers les mêmes limites p_j lorsque $n \to \infty$. Ainsi, pour une chaîne transitive il y a toujours une probabilité limite constante p_j de réalisation de l'événement A_j ($j = 1, \ldots, m$) quand le nombre d'épreuves est suffisamment grand. Si l'on peut vérifier que, pour une épreuve quelconque, toutes les probabilités de transition sont positives, on peut alors être assuré de l'existence des probabilités limites.

Problèmes

1.1. Dans la théorie de la *fiabilité* les éléments d'un système sont dits couplés en série si la panne d'un élément au moins entraîne la mise hors service de tout le système, et en parallèle si la panne du système n'est provoquée que par la panne de tous ses éléments. Soient p_{1j} la probabilité de fonctionnement sans défaillance du j-ième élément parmi n éléments indépendants mis en série, et p_{i1} la probabilité de fonctionnement sans défaillance du i-ième élément parmi m éléments indépendants couplés en parallèle. Montrer que la probabi-

lité de fonctionnement sans défaillance du système est

$$P_{1n} = \prod_{j=1}^{n} p_{1j} \quad (1)$$

lorsque les éléments sont reliés en série et

$$P_{m1} = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - p_{i1}) \quad (2)$$

lorsque les éléments sont mis en parallèle.

1.2. Un système de n éléments indépendants reliés en série est divisé en r groupes de s_k éléments $\left(\sum_{k=1}^{r} s_k = n\right)$. Lors de la panne de l'un quelconque des éléments du k-ième groupe ($k = 1, 2, \ldots, r$) le groupe est entièrement remplacé par un groupe de réserve. Supposons que le nombre de groupes de réserve du k-ième groupe soit égal à m_{k-1}. Montrer que la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système avec réserve est égale à *)

$$P = \prod_{k=1}^{r} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^{m_k} \left[1 - \prod_{j=S_{k-1}}^{S_k} p_{ij} \right] \right\}, \quad (3)$$

où p_{ij} est la probabilité de fonctionnement sans défaillance du j-ième élément du i-ième groupe,

$$S_l = \sum_{n=1}^{l} s_n, \quad S_r = n.$$

1.3. Considérons n blocs identiques et indépendants couplés en série et m blocs identiques de réserve, dont chacun peut en cas de nécessité remplacer le bloc en panne. Montrer que la probabilité de fonctionnement sans défaillance d'un tel système de blocs à réserve dynamique est égale à

$$P = 1 - I_q(m + 1, n), \quad (4)$$

où

$$I_q(m+1, n) = \frac{B_q(m+1, n)}{B(m+1, n)}$$

est le rapport des fonctions bêta incomplète et complète, $q = 1 - p$ la probabilité de fonctionnement sans défaillance d'un seul bloc.

1.4. Soient n blocs principaux identiques fonctionnant indépendamment, et m blocs identiques de réserve, chacun d'eux pouvant remplacer le bloc tombé en panne. Montrer que la probabilité de la panne est égale à

$$P = 1 - qI_q(n, m), \quad (5)$$

où $q = 1 - p$ est la probabilité de fonctionnement sans défaillance d'un bloc (principal ou de réserve).

1.5. Une ligne de télécommunication relie la localité M aux 10 abonnés de la localité N, chacun des abonnés occupant la ligne en moyenne 12 minutes par heure. Déterminer la probabilité pour que k abonnés simultanément aient besoin de la ligne ($k = 0, 1, \ldots, 10$). Trouver le nombre le plus probable d'appels simultanés des abonnés. Quel est le nombre de canaux à prévoir dans la ligne

*) Voir, par exemple, [14].

pour que sur mille appels il n'y en ait pas plus de 7 pour lesquels il ne se trouve pas de canal libre?

1.6. Dans les conditions du problème 1.5 le nombre des abonnés est égal à 1000 et chacun occupe la ligne en moyenne 6 minutes par heure. Déterminer la probabilité du nombre le plus probable d'appels. Quel est le nombre de canaux à prévoir pour que sur mille appels il n'y en ait pas plus de trois pour lesquels aucun canal ne soit libre? Quel est le nombre d'abonnés pouvant desservir dans ces conditions une ligne de 200 canaux? Quel est le nombre total de canaux nécessaires pour desservir dans les mêmes conditions 1000 abonnés à l'aide de deux lignes, chacune desservant 500 abonnés?

1.7. Le choix de l'un des 12 canaux d'un système étant équiprobable, on demande de déterminer le nombre d'épreuves nécessaires pour qu'avec une probabilité de 0,99 on passe au moins une fois par un canal donné?

1.8. On appelle *codes à poids constant* des codes binaires dont toutes les combinaisons de même longueur comportent un même nombre d'unités (poids identique). Toutes les combinaisons étant équiprobables, montrer que, pour un code à n chiffres de poids constant $m = \frac{n}{2}$, la probabilité de voir apparaître la k-ième unité (dans l'ordre, $k = 1, 2, \ldots, m$) dans la combinaison de code à la j-ième position ($j \geqslant k$, $j = 1, 2, \ldots, n$) est égale à

$$p_{kj} = \frac{\binom{j-1}{k-1}\binom{2m-j}{m-k}}{\binom{2m}{m}}. \tag{6}$$

Montrer également que la probabilité d'apparition simultanée de la k-ième unité dans la j-ième position et de la l-ième unité dans la q-ième position ($q > j$, $l > k$, $j > k$, $q > l$) est égale à

$$p_{kjlq} = \frac{\binom{q-j-1}{l-k-1}\binom{2m-q}{m-l}\binom{j-1}{k-1}}{\binom{2m}{m}}. \tag{7}$$

1.9. Soient n sources indépendantes de bruits; la probabilité d'apparition d'un bruit provenant d'une source est constante et égale à $p = 1/2$, et la probabilité d'interruption des communications dans le canal affecté par k bruits exactement est égale à $\frac{2^k-1}{2^n-1}$. Démontrer que la probabilité d'interruption des communications dans le canal est égale à $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^n-1}$.

Chapitre 2

VARIABLES ALÉATOIRES

2.1. FONCTIONS DE RÉPARTITION

2.1.1. Définitions. Le chapitre précédent était consacré aux *événements aléatoires* qui au cours des épreuves peuvent se réaliser ou ne pas se réaliser. Les événements aléatoires caractérisent qualitativement le résultat d'une épreuve. En pratique il est plus commode de représenter le résultat des épreuves quantitativement par une certaine grandeur réelle ξ appelée *variable aléatoire*. Tout comme on ne peut prévoir le résultat d'une expérience isolée, on ne peut prévoir la valeur exacte d'une variable aléatoire. On peut seulement établir les lois statistiques régissant les variables aléatoires, c'est-à-dire déterminer les probabilités des différentes valeurs d'une variable aléatoire.

Dans le cas le plus simple, lorsqu'à la suite d'une épreuve l'événement A est réalisé ou n'est pas réalisé, on peut lui faire correspondre une variable aléatoire ne prenant que deux valeurs: 1 ou 0 suivant que l'événement A est ou n'est pas réalisé. La probabilité pour que cette variable aléatoire soit égale à 1 s'identifiera à la probabilité de réalisation de l'événement A.

Le nombre d'événements pouvant être réalisés au cours de l'épreuve est un nombre positif quelconque; l'ensemble de ces événements peut même être infini mais doit obligatoirement être dénombrable. A chaque événement faisons correspondre d'une manière univoque un certain nombre réel. A un groupe complet d'événements correspondra une certaine variable aléatoire *discrète*, dont les valeurs possibles peuvent être numérotées à l'aide de nombres entiers. La probabilité pour la variable aléatoire discrète de prendre l'une des valeurs possibles est égale à la probabilité de réalisation de l'événement aléatoire correspondant à cette valeur.

Cependant la notion de variable aléatoire est plus générale que celle d'événement aléatoire. Ainsi, les résultats des mesures d'une grandeur physique peuvent appartenir à un continuum de valeurs, c'est-à-dire remplir intégralement des intervalles finis ou infinis de l'axe réel. Si les valeurs possibles d'une variable aléatoire remplissent de façon continue un intervalle, la notion de probabilité est difficile à introduire. Une variable aléatoire peut alors prendre une infinité de valeurs et il n'y a pas de sens à parler de la probabilité de réalisation de l'une de ces valeurs, car cette probabilité est nulle.

On peut diviser cependant l'intervalle des valeurs possibles de la variable aléatoire en un nombre fini de segments disjoints. L'ensemble des événements consistant en ce que la valeur de la variable aléatoire tombe dans l'un quelconque de ces segments forme alors un groupe complet. L'introduction de la notion de probabilité de l'événement consistant en ce que les valeurs d'une variable aléatoire appartiennent à un certain segment devient tout à fait équivalente au cas des variables discrètes. Ainsi, lorsqu'on parle de la probabilité d'une variable aléatoire, dont l'ensemble des valeurs possibles n'est pas dénombrable, il faut toujours envisager un certain segment de tout l'intervalle de ses valeurs possibles.

Pour se faire une idée assez précise des lois statistiques inhérentes à l'épreuve considérée, il faut connaître primo l'intervalle des valeurs possibles de la variable aléatoire caractérisant les résultats de l'épreuve et secundo les probabilités de ces valeurs.

On appelle *loi de distribution* des probabilités d'une variable aléatoire la loi suivant laquelle à chaque valeur possible d'une variable aléatoire discrète (ou à un certain domaine des valeurs de la variable aléatoire remplissant l'intervalle d'une manière continue) on fait correspondre la probabilité pour que la variable aléatoire prenne des valeurs déterminées (ou se trouve dans un certain domaine de l'intervalle des valeurs possibles).

Les *fonctions de répartition* sont l'expression analytique des lois de distribution ; elles peuvent être des fonctions soit de l'argument entier, soit de l'argument continu.

Les méthodes susmentionnées de définition des lois de distribution des probabilités sont univoques pour les variables aléatoires discrètes et ne le sont pas pour la variable aléatoire dont les valeurs possibles remplissent tout l'intervalle, car dans ce dernier cas la partition de l'intervalle en un nombre fini de segments disjoints est arbitraire. Soit maintenant une approche généralement adoptée pour définir de façon univoque la loi de distribution valable pour les variables aléatoires des deux types indiqués.

2.1.2. Fonction de répartition. Supposons que la variable aléatoire ξ puisse prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Cette hypothèse ne restreint pas la généralité des résultats exposés plus bas, car la variation de la variable aléatoire dans un intervalle limité de valeurs signifiera simplement que la probabilité de trouver sa valeur dans un domaine quelconque de l'axe numérique, hors de l'intervalle considéré, est égale à zéro. On peut faire la même remarque au sujet d'une variable aléatoire discrète pour laquelle les probabilités non nulles correspondent à un ensemble fini ou dénombrable de points discrets de l'axe numérique.

La partition est très simple : on fixe un certain niveau x et le domaine des valeurs possibles de la variable aléatoire se trouve divisé en deux parties. A l'une se rapportent les valeurs de ξ infé-

rieures à x, et les valeurs restantes à l'autre. On appelle fonction de répartition la fonction

$$F_1(x) = P\{\xi \leqslant x\}, \tag{2.1}$$

donnant la probabilité pour une valeur de la variable aléatoire de ne pas dépasser un certain niveau x *). Nous allons donner les propriétés essentielles des fonctions de répartition. Leurs valeurs qui sont des probabilités doivent se trouver entre 0 et 1, de plus

$$F_1(-\infty) = P\{\xi \leqslant -\infty\} = 0 \tag{2.2}$$

est la probabilité d'un événement impossible, et

$$F_1(\infty) = P\{\xi \leqslant \infty\} = 1 \tag{2.3}$$

la probabilité d'un événement certain. La propriété exprimée par l'égalité (2.3) est analogue à la propriété d'un groupe complet d'événements.

Si une variable aléatoire se trouve au-dessous du niveau $x_2 > x_1$, on a deux possibilités incompatibles: cette variable aléatoire peut se trouver soit au-dessous du niveau x_1, soit entre x_1 et x_2. Appliquant la règle d'addition on obtiendra alors

$$P\{\xi \leqslant x_2\} = \{\xi \leqslant x_1 \text{ ou } x_1 < \xi \leqslant x_2\} = \\ = P\{\xi \leqslant x_1\} + P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\},$$

d'où

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} = P\{\xi \leqslant x_2\} - P\{\xi \leqslant x_1\}, \tag{2.4}$$

ou, tenant compte de (2.1),

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} = F_1(x_2) - F_1(x_1). \tag{2.5}$$

Ainsi, *la probabilité pour une variable aléatoire de se trouver dans certaines limites est égale à la différence des valeurs de sa fonction de répartition aux limites supérieure et inférieure.*

Comme le premier membre de l'égalité (2.5) ne peut être négatif, pour $x_2 \geqslant x_1$ on a

$$F_1(x_2) \geqslant F_1(x_1). \tag{2.6}$$

Par conséquent, la fonction de répartition est toujours une *fonction non décroissante.*

Les conditions (2.2), (2.3) et (2.6) sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction satisfaisant à ces conditions soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Ceci signifie que pour toute variable aléatoire la fonction de répartition satisfait à ces conditions, et inversement, toute fonction non décroissante variant de zéro à

*) Dans la suite les variables aléatoires seront désignées par les lettres grecques ξ, η, ζ, . . ., et les arguments de leurs fonctions de distribution par des lettres latines x, y, z, . . .

l'unité est une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire.

La définition de la loi de distribution d'une variable aléatoire à l'aide de la fonction de répartition $F_1(x)$ permet de passer à toute autre définition. Ainsi, la probabilité p_k pour une variable aléatoire discrète de prendre la valeur x_k est

$$p_k = P\{\xi = x_k\} = F_1(x'_k) - F_1(x'_{k-1}), \tag{2.7}$$

$$x'_{k-1} < x_k < x'.$$

Inversement, connaissant les grandeurs p_k, on peut déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

$$F_1(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k. \tag{2.7'}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète ξ est discontinue, elle croît par sauts aux points x qui sont les valeurs possibles de ξ. La fonction en escalier représentée sur la figure 2.1 est une fonction de répartition typique d'une variable aléatoire discrète.

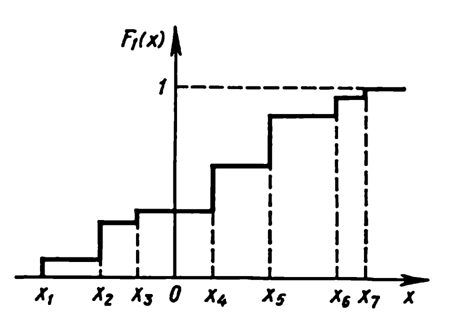


Fig. 2.1. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Considérons par exemple le nombre k de réalisations d'un certain événement lors de n épreuves indépendantes. Ce nombre est une variable aléatoire discrète, dont les valeurs possibles sont $k=0, 1, \ldots, n$. Comme nous l'avons déjà vu au chapitre précédent, la probabilité pour qu'un événement se réalise k fois lors de n épreuves indépendantes est égale à

$$P\{k=n\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Cette formule établit la loi suivant laquelle à chaque valeur possible k de la variable aléatoire on fait correspondre la probabilité $P\{k = n\}$, c'est-à-dire une loi de distribution des probabilités du nombre de réalisations de l'événement lors de n épreuves indépendantes. Cette loi est souvent appelée *loi binomiale*. Conformément à (2.7′) la fonction (1.22) donne la fonction de répartition de la loi binomiale. De même la fonction $P(m, \lambda)$ [voir (1.42)] donne la fonction de répartition de la *distribution de Poisson*.

2.1.3. Densité de probabilité. Si la fonction de répartition d'une variable aléatoire est continue et dérivable (à l'exception, peut être,

de certains points discrets), celle-ci est dite *continue*. La dérivée

$$w_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} \tag{2.8}$$

est appelée *densité de probabilité* d'une variable aléatoire continue.

Le terme « densité de probabilité » devient évident si l'on considère les variations d'une variable aléatoire continue dans des limites assez restreintes entre x et $x + \Delta x$. On a alors

$$w_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} \approx \frac{F_1(x+\Delta x) - F_1(x)}{\Delta x},$$

ou, compte tenu de (2.5), *)

$$w_1(x) \approx \frac{P\{x < \xi \leqslant x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Pour Δx petit la fonction $w_1(x)$ a le sens d'une densité de probabilité, car c'est le rapport de la probabilité pour une variable aléatoire de se trouver dans l'intervalle $(x, x + \Delta x)$ à la longueur de cet intervalle.

La densité de probabilité, en tant que dérivée d'une fonction non décroissante (de la fonction de répartition), ne peut prendre de valeurs négatives, c'est-à-dire que l'on a toujours

$$w_1(x) \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Intégrant les deux membres de (2.8) de $-\infty$ à x et compte tenu de (2.2), on obtient une formule donnant la fonction de répartition en fonction de la densité:

$$P\{\xi \leqslant x\} = F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} w_1(x)\, dx. \tag{2.10}$$

Dans le cas particulier, où $x = \infty$, on a en vertu de (2.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, dx = 1. \tag{2.11}$$

Les conditions (2.9) et (2.11) sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction y satisfaisant soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue. En d'autres termes, la densité de probabilité de toute variable aléatoire continue satisfait à ces conditions, et inversement, toute fonction non négative, normée conformément à (2.11), est la densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire continue.

*) Comme la probabilité est une grandeur sans dimension, la densité $w_1(x)$ a toujours la dimension de $\frac{1}{x}$.

Sur la figure 2.2 on peut trouver les courbes représentatives typiques de distribution d'une variable aléatoire continue (densité et fonction de répartition).

Utilisant (2.5) et (2.10) on trouve

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} w_1(x)\,dx. \tag{2.12}$$

Ainsi, la probabilité pour que la valeur d'une variable aléatoire se trouve à l'intérieur d'un certain intervalle est égale à l'aire de la surface limitée par la courbe de la densité de probabilité de cette variable aléatoire dans l'intervalle considéré (voir la partie hachurée sur la figure 2.2, *a*). Conformément à (2.11), l'aire totale de la surface limitée par la courbe de la densité de probabilité sera toujours égale à l'unité.

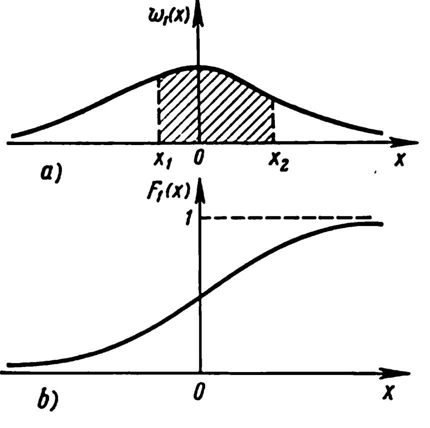


Fig. 2.2. Densité de probabilité (*a*) et fonction de répartition (*b*) d'une variable aléatoire continue

La courbe représentative de la densité de probabilité peut avoir un ou plusieurs maxima. La valeur $x = x_m$ pour laquelle la densité de probabilité est maximale s'appelle *mode*. Le point de l'axe des abscisses pour lequel l'aire de la surface limitée par la courbe de la densité de probabilité est divisée en deux s'appelle *médiane*.

On caractérise souvent la distribution des probabilités des variables aléatoires par les *quantiles*. On appelle *quantile* d'ordre p la valeur $x = x_p$ pour laquelle $F(x_p) = p$. Par exemple, la médiane est le quantile d'ordre $p = 0{,}5$.

Pour une variable aléatoire discrète la fonction de répartition $F_1(x)$ n'est pas dérivable au sens usuel. On peut cependant étendre la notion de densité de probabilité aux variables aléatoires discrètes en utilisant la fonction delta *). En introduisant la notation $p_i = P\{\xi = x_i\}$ on obtient **) [comparer avec (2.7′)]

$$F_1(x) = \sum_j p_j u(x - x_j), \tag{2.13}$$

*) Comme dans la suite nous utiliserons souvent la fonction delta, nous donnons dans l'annexe 3 ses propriétés essentielles.

**) Lorsque les limites d'une somme peuvent être aussi bien finies qu'infinies, on donne seulement l'indice de sommation.

où $u(x)$ est l'échelon unité déterminé comme suit:

$$u(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

En introduisant la fonction delta $\delta(x)=\frac{du(x)}{dx}$, on peut à partir de (2.13) trouver la densité de probabilité d'une variable aléatoire discrète

$$w_1(x)=\sum_j p_j\delta(x-x_j). \tag{2.14}$$

La densité de probabilité d'un nombre constant a est égale à

$$w_1(x)=\delta(x-a). \tag{2.14'}$$

Remarquons que la fonction delta satisfait aux conditions imposées aux densités de probabilité, en particulier,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1.$$

Dans le cas général, la densité de probabilité d'une variable aléatoire peut avoir tant une partie continue qu'une partie discrète, c'est-à-dire qu'elle peut être la somme des fonctions de la forme (2.8) et (2.14)

$$w_1^*(x)=a_1w_1(x)+a_2\sum_j p_j\delta(x-x_j), \tag{2.15}$$

$$a_1\geqslant 0,\ a_2\geqslant 0,\ a_1+a_2=1.$$

On peut facilement montrer les propriétés notées des fonctions de distribution des variables aléatoires continues (fonction de répartition et densité de probabilité) pour le cas de la distribution *uniforme* (fig. 2.3). La densité de probabilité est alors

$$w_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & x<a,\ x>b,\end{cases}$$

c'est-à-dire qu'elle reste constante dans l'intervalle (a, b) d'où le terme de distribution uniforme.

Fig. 2.3. Distribution uniforme d'une variable aléatoire continue

2.1.4. Distribution conjointe de deux variables aléatoires. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le cas de la loi de distribution des probabilités d'une seule variable aléatoire ξ. On peut d'une

manière analogue considérer la distribution conjointe des probabilités de deux variables aléatoires dépendantes ξ et η

$$P\{\xi \leqslant x, \eta \leqslant y\} = F_2(x, y), \tag{2.16}$$

donnant la probabilité de réalisation simultanée des deux événements suivants : la variable aléatoire ξ se trouve au-dessous du niveau x et la variable aléatoire η au-dessous du niveau y. La fonction $F_2(x, y)$ est appelée *fonction de répartition bidimensionnelle.*

Si dans (2.16) on pose $y = \infty$, la fonction $F_2(x, \infty)$ sera la probabilité pour ξ de se trouver au-dessous du niveau x quel que soit η, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ

$$F_2(x, \infty) = F_{1\xi}(x). \tag{2.17}$$

D'une manière analogue *) on a

$$F_2(\infty, y) = F_{1\eta}(y). \tag{2.18}$$

En vertu de (2.16) on a également

$$F_2(-\infty, y) = F_2(x, -\infty) = 0 \tag{2.19}$$

et

$$F_2(\infty, \infty) = 1. \tag{2.20}$$

On peut donner une interprétation géométrique en faisant correspondre aux variables aléatoires ξ et η les coordonnées d'un point sur un plan (fig. 2.4) ou les composantes d'un vecteur aléatoire. La fonction de répartition bidimensionnelle $F_2(x, y)$ donne alors la valeur de la probabilité pour le point de coordonnées aléatoires (ξ, η) de se trouver dans la partie hachurée du plan (voir fig. 2.4). La probabilité pour ce point de se trouver à l'intérieur du rectangle dont les sommets sont aux points (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2) sera

$$P\{x_1 < \xi \leqslant x_2, y_1 < \eta \leqslant y_2\} =$$
$$= F_2(x_1, y_1) - F_2(x_2, y_1) + F_2(x_2, y_2) - F_2(x_1, y_2). \tag{2.21}$$

La formule (2.21) généralise la formule correspondante (2.5) pour le cas unidimensionnel ; pour $y_1 = -\infty$, $y_2 = \infty$ la formule (2.21) devient (2.5).

Si la fonction de répartition bidimensionnelle $F_2(x, y)$ est continue et admet une dérivée partielle du second ordre, on peut trouver la densité de probabilité bidimensionnelle du couple de variables

*) Dans les cas où la densité de probabilité unidimensionnelle est affectée d'un indice double, le premier correspond au numéro d'ordre de la courbe, et le second à la variable aléatoire dont la distribution se trouve déterminée par la densité considérée.

aléatoires ξ et η

$$w_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x\, \partial y}. \tag{2.22}$$

La densité de probabilité bidimensionnelle, tout comme la densité unidimensionnelle, n'est jamais négative

$$w_2(x, y) \geqslant 0. \tag{2.23}$$

La fonction de répartition bidimensionnelle s'exprime en fonction de la densité de probabilité à l'aide de l'intégrale double suivante :

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} w_2(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.24}$$

On peut représenter la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x, y)$ comme une certaine surface (fig. 2.5). La probabilité

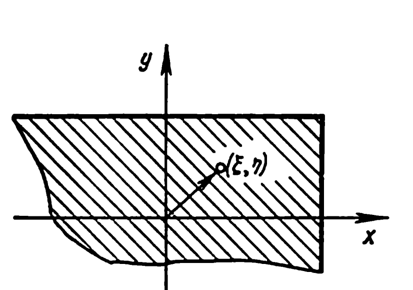


Fig. 2.4. Deux variables aléatoires comme coordonnées d'un point sur un plan

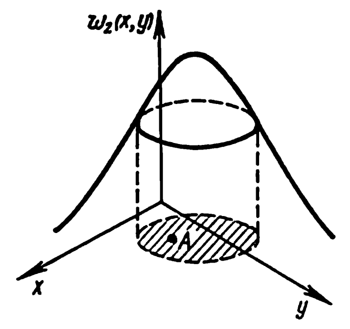


Fig. 2.5. Densité de probabilité conjointe de deux variables aléatoires

$P\{A\}$ pour le point A de coordonnées aléatoires, dont la densité de probabilité est $w_2(x, y)$, de se trouver dans un certain domaine G du plan est alors égale au volume limité par la partie de la surface $w_2(x, y)$ dont la projection sur le plan coïncide avec le domaine G, c'est-à-dire

$$P\{A \in G\} = \iint_G w_2(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.25}$$

Le volume total limité par la courbe représentative de la densité superficielle, en vertu de (2.20), est toujours égal à l'unité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{2.26}$$

Les conditions (2.23) et (2.26) sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de deux variables y satisfaisant soit la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires.

La densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x, y)$ permet de trouver facilement les lois de distribution (marginales) de chacune des variables aléatoires. En effet, (2.17) et (2.24) donnent pour la variable aléatoire ξ

$$F_{1\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{x} w_{1\xi}(x)\, dx, \qquad (2.27)$$

où

$$w_{1\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dy. \qquad (2.28)$$

De même, pour la variable aléatoire η on a

$$F_{1\eta}(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{y} w_{1\eta}(y)\, dy, \qquad (2.29)$$

où

$$w_{1\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dx. \qquad (2.30)$$

Ainsi, pour obtenir à partir de la densité de probabilité $w_2(x, y)$ du couple de variables aléatoires la densité de probabilité de l'une d'elles, il suffit d'intégrer la fonction $w_2(x, y)$ sur l'argument correspondant à l'autre variable aléatoire. La figure 2.6 donne l'interprétation géométrique de cette règle. L'aire de la section de la surface de distribution par un plan parallèle au plan (w_2, y) et passant par le point $x = x_0$ donne la valeur de la densité de probabilité $w_{1\xi}(x)$ au point $x = x_0$.

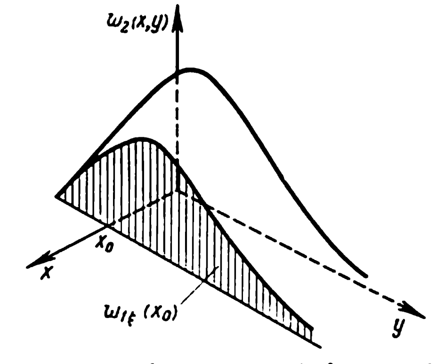


Fig. 2.6. Détermination de la densité de probabilité unidimensionnelle à partir de la densité de probabilité bidimensionnelle

Les variables aléatoires ξ et η sont dites *indépendantes*, si

$$F_2(x, y) = F_{1\xi}(x)\, F_{1\eta}(y). \qquad (2.31)$$

On obtient une formule analogue pour la densité de probabilité bidimensionnelle des variables aléatoires indépendantes:

$$w_2(x, y) = w_{1\xi}(x)\, w_{1\eta}(y). \qquad (2.32)$$

Ainsi deux variables aléatoires sont indépendantes si leur densité de probabilité bidimensionnelle est égale au *produit des densités de probabilité individuelles.*

On peut donner un exemple très simple de densité de probabilité bidimensionnelle

$$w_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d, \\ 0, & x < a, \ x > b, \ y < c, \ y > d, \end{cases}$$

où

$$s = (b - a)(d - c)$$

correspond à la distribution uniforme de deux variables aléatoires indépendantes dans le rectangle $G(a, b, c, d)$. La probabilité pour le point A de coordonnées ξ et η de se trouver dans un certain domaine g se trouvant à l'intérieur du rectangle G sera égale, conformément à (2.25), au quotient de l'aire du domaine g par l'aire du rectangle G égale à s.

2.1.5. Densités de probabilité conditionnelles (liées). Si les variables aléatoires ξ et η sont dépendantes, il existe une probabilité conditionnelle (a posteriori) pour l'une de ces variables aléatoires de se trouver au-dessous d'un certain niveau y lorsque l'autre se trouve dans l'intervalle $x < \xi \leqslant x_1$. Cette probabilité $P\{\eta \leqslant y \mid x < < \xi \leqslant x_1\}$ s'obtient par la règle de multiplication

$$P\{\eta \leqslant y \mid x < \xi \leqslant x_1\} = \frac{P\{x < \xi \leqslant x_1, \ \eta \leqslant y\}}{P\{x < \xi \leqslant x_1\}}. \qquad (2.33)$$

Si la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x, y)$ des variables aléatoires est donnée, compte tenu de (2.24) et (2.27), on peut écrire (2.33) comme suit:

$$P\{\eta \leqslant y \mid x < \xi \leqslant x_1\} = \frac{\int\limits_{x}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{y} w_2(x, y)\, dx\, dy}{\int\limits_{x}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dx\, dy}. \qquad (2.34)$$

En passant dans (2.34) à la limite $x_1 \to x$, on obtient la fonction *)

$$F_2(y \mid x) = \lim_{x_1 \to x} P\{\eta \leqslant y \mid x < \xi \leqslant x_1\} =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} w_2(x, y)\, dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dy} = \frac{1}{w_{1\xi}(x)} \int\limits_{-\infty}^{y} w_2(x, y)\, dy, \qquad (2.35)$$

*) Les fonctions de répartition conditionnelles (liées) sont désignées par les mêmes symboles que les fonctions bidimensionnelles. La différence est soulignée par le trait vertical séparant les arguments d'une fonction de répartition conditionnelle.

que l'on appelle *fonction de répartition conditionnelle* de la variable aléatoire η pour la condition que $\xi = x$. Si cette fonction de répartition admet une dérivée partielle par rapport à y, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial F_2(y \mid x)}{\partial y} = w_2(y \mid x), \tag{2.36}$$

cette dérivée est appelée densité de probabilité *conditionnelle* (a posteriori) de la variable aléatoire η pour la condition $\xi = x$. En dérivant le second membre de (2.35) par rapport à y on trouve

$$w_2(y \mid x) = \frac{w_2(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dy} = \frac{w_2(x, y)}{w_{1\xi}(x)}. \tag{2.37}$$

Les densités de probabilité conditionnelles (a posteriori) ont toutes les propriétés des densités de probabilité unidimensionnelles marginales. En particulier, (2.37) donne

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(y \mid x)\, dy = 1. \tag{2.38}$$

L'égalité (2.37) permet d'exprimer la densité de probabilité marginale de η en fonction de la densité de probabilité marginale de ξ et de la densité de probabilité conditionnelle de η lorsque ξ est donné

$$w_{1\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi}(x)\, w_2(y \mid x)\, dx. \tag{2.39}$$

La formule (2.39) peut être appelée *formule des probabilités totales des variables aléatoires* [comparer avec (1.18)].

En intégrant (2.39) sur y on obtient la fonction de répartition de la variable aléatoire η

$$F_{1\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi}(x)\, F_2(y \mid x)\, dx. \tag{2.39'}$$

On définit d'une manière analogue la distribution conditionnelle de la variable aléatoire ξ pour une valeur donnée de η. Ainsi, la densité de probabilité conditionnelle de ξ pour $\eta = y$ est égale à

$$w_2(x \mid y) = \frac{w_2(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dx} = \frac{w_2(x, y)}{w_{1\eta}(y)}. \tag{2.40}$$

Si les variables aléatoires ξ et η sont indépendantes, on a $w_2(x, y) = w_{1\xi}(x)\, w_{1\eta}(y)$ et, comme le montrent (2.37) et (2.40), la densité de probabilité conditionnelle coïncide avec la densité de probabilité marginale de la variable aléatoire.

En utilisant (2.37), (2.39) et (2.40) on peut aisément établir la relation existant entre les densités de probabilité marginale et conditionnelle des variables aléatoires:

$$w_2(x \mid y) = \frac{w_{1\xi}(x)\, w_2(y \mid x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi}(x)\, w_2(y \mid x)\, dx}. \qquad (2.41)$$

La relation (2.41) est la *généralisation de la formule de Bayes aux variables aléatoires continues* [voir (1.19)].

2.1.6. Répartition multidimensionnelle d'un ensemble de variables aléatoires. L'étude des lois de la distribution conjointe des variables aléatoires peut être étendue à un ensemble fini arbitraire de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Dans ce cas la fonction de répartition à n dimensions $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donne la probabilité pour la variable aléatoire ξ_1 de se trouver au-dessous du niveau x_1, la variable aléatoire ξ_2 étant en même temps au-dessous du niveau x_2, etc., et la variable aléatoire ξ_n au-dessous du niveau x_n, c'est-à-dire

$$P\{\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, \xi_n \leqslant x_n\} = \\ = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (2.42)$$

Les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont dites *mutuellement indépendantes* *) si

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{1\xi_k}(x_k), \qquad (2.43)$$

où $F_{1\xi_k}(x_k)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. La formule (2.43) généralise la formule (2.31).

Si m des n arguments de la fonction (2.42) deviennent infinis, c'est-à-dire si l'on sait que m des n variables aléatoires peuvent prendre des valeurs quelconques, cette fonction devient alors la fonction de répartition des $n - m$ variables aléatoires restantes. Par exemple

$$F_n(\infty, \ldots, \infty, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \\ = F_{n-m}(x_{m+1}, \ldots, x_n). \qquad (2.44)$$

---

*) Il suit de l'indépendance *mutuelle* des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$ d'un ensemble l'indépendance *deux à deux* de toutes variables aléatoires ξ_i et ξ_j, $i, j = 1, \ldots, n$. Dans le cas général l'inverse n'est pas vrai (voir également § 1.1.4).

Par définition d'une fonction de répartition multidimensionnelle on a

$$F_n(-\infty, x_2, \ldots, x_n) = F_n(x_1, -\infty, \ldots, x_n) = \\ = F_n(x_1, x_2, \ldots, -\infty) = 0. \qquad (2.45)$$

$$F_n(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1. \qquad (2.46)$$

Si la fonction de répartition à n dimensions admet une dérivée

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}, \qquad (2.47)$$

cette dérivée s'appelle densité de probabilité à n dimensions des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

La fonction de répartition s'exprime en fonction de la densité de probabilité à l'aide de l'intégrale multiple

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (2.48)$$

L'ensemble des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ peut être interprété étant les coordonnées d'un point ou les composantes d'un vecteur aléatoire ξ dans l'espace à n dimensions. La probabilité $P\{A\}$ pour le point A de coordonnées aléatoires dont la densité de probabilité est $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de se trouver dans le domaine G de l'espace est

$$P\{A \in G\} = \int \underset{G}{\ldots} \int w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (2.49)$$

Utilisant (2.46) on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1. \qquad (2.50)$$

Si les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont mutuellement indépendantes, conformément à (2.43) on a

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} w_{1\xi_k}(x_k), \qquad (2.51)$$

où $w_{1\xi_k}(x_k)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire ξ_k.

Soient ξ et η deux vecteurs aléatoires dans l'espace à n dimensions. Pour que ces vecteurs soient statistiquement indépendants il faut et il suffit que la distribution conjointe de leurs composantes soit égale au produit des distributions des composantes respectives,

c'est-à-dire *)

$$w(X, Y) = w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \\ = w_n(x_1, \ldots, x_n)\, w_n(y_1, \ldots, y_n) = w(X)\, w(Y). \qquad (2.51')$$

Conformément à (2.44) et (2.48), pour $m \leqslant n$ on a

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty) = \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} w_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m, \qquad (2.52)$$

où

$$w_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \\ = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m \text{ fois}} w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{m+1} \ldots dx_n. \qquad (2.53)$$

Ainsi, connaissant la densité de probabilité à n dimensions on peut toujours trouver la densité de probabilité d'un groupe quelconque de m variables aléatoires $(1 \leqslant m \leqslant n)$ par intégration sur des limites infinies de la densité de probabilité à n dimensions sur les autres $n - m$ variables.

Si la densité de probabilité à n dimensions $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est donnée, on peut trouver la densité de probabilité conditionnelle (liée) d'un ensemble de k de ces variables aléatoires à condition que les autres $n - k$ variables aléatoires prennent des valeurs données $\xi_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \xi_n = x_n$:

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) = \\ = \frac{w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{k \text{ fois}} w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_k} = \frac{w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{w_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}. \qquad (2.54)$$

La formule (2.37) donnée plus haut est un cas particulier de la formule (2.54) pour $n = 2$. Bien que les densités de probabilité marginale et conditionnelle (liée) soient désignées par le même symbole w_n, elles sont faciles à distinguer d'après l'écriture des

*) Pour surmonter les difficultés liées au fait que la quantité de symboles est limitée, ici et ci-dessous les différentes densités de probabilités seront désignées par le même symbole et ne différeront que par leur argument.

arguments. Conformément à (2.54) on a

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w_1(x_1)\, w_2(x_2 \mid x_1) \times$$
$$\times\, w_3(x_3 \mid x_1, x_2) \ldots w_n(x_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}). \qquad (2.54')$$

Pour des variables aléatoires indépendantes on a

$$w_{n-k+1}(x_k \mid x_{k+1}, \ldots, x_n) = w_{1\xi_k}(x_k)$$

et en vertu de (2.54′) on a (2.51).

2.2. LOI NORMALE

2.2.1. Loi normale multidimensionnelle. La distribution conjointe de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ réparties suivant une *loi normale multidimensionnelle* joue un rôle particulièrement important pour les applications pratiques. *Par définition* la densité de probabilité correspondant à la loi normale multidimensionnelle est *)

$$w_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik} \frac{x_i - a_i}{\sigma_i} \frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right\}. \qquad (2.55)$$

Dans la formule (2.55), les a_i sont des nombres réels arbitraires, $\sigma_i > 0$, D est un déterminant d'ordre n de la forme

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \qquad (2.56)$$

$$r_{ik} = r_{ki}, \quad |r_{ik}| \leqslant 1,$$

et D_{ik} est le cofacteur de l'élément r_{ik} dans le déterminant D. Ainsi, la loi normale multidimensionnelle dépend de $2n$ paramètres (a_i, σ_i) et de $\frac{1}{2}n(n-1)$ paramètres (r_{ik}), c'est-à-dire en tout de $\frac{n^2+3n}{2}$ paramètres **).

*) Ici et dans ce qui suit on utilisera souvent la notation $\exp\{M\} = e^M$.

**) Le sens probabiliste de ces paramètres sera donné au § 2.3. Remarquons que a_i sont des nombres réels, σ_i des nombres positifs quelconques, et les paramètres r_{ik} sont non seulement en valeur absolue inférieurs à l'unité, mais doivent également satisfaire aux conditions $D_{ik}^2 \leqslant D_{ii}D_{kk}$.

La forme quadratique de l'exposant de l'exponentielle dans le second membre de (2.55) est *toujours positive*, c'est-à-dire

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{ik}}{D} \frac{x_i - a_i}{\sigma_i} \frac{x_k - a_k}{\sigma_k} > 0$$

pour toutes les valeurs de x_i sauf $x_i = a_i$. Par conséquent $D > 0$.

On peut simplifier l'écriture de la formule (2.55) et rendre plus aisée son utilisation en introduisant la *représentation matricielle* *) de la forme quadratique par rapport aux variables $x_i - a_i$. Introduisons la matrice carrée **M** dont les éléments sont les nombres $\sigma_i \sigma_k r_{ik}$. Le déterminant de cette matrice est évidemment égal à

$$\det \mathbf{M} = \sigma_1^2 \ldots \sigma_n^2 D.$$

Les nombres $\frac{D_{ik}}{\sigma_i \sigma_k D}$ forment également une matrice carrée d'ordre n que l'on appelle matrice *inverse* de **M** et que l'on désigne par $\mathbf{M}^{-1}$. Introduisons de plus le vecteur colonne

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \begin{Vmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \cdots \\ x_n - a_n \end{Vmatrix}$$

et le vecteur transposé, c'est-à-dire le vecteur ligne

$$\mathbf{x}' - \mathbf{a}' = (x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \ldots,\ x_n - a_n).$$

Compte tenu de la loi de multiplication des matrices on peut écrire (2.55) sous la forme suivante:

$$w_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{M}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}' - \mathbf{a}')\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})}. \qquad (2.57)$$

2.2.2. Variable aléatoire normale. La formule (2.55) pour $n = 1$ permet de trouver la densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une distribution normale dépendant de deux paramètres a et σ

$$w_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2.58)$$

La figure 2.7 donne la courbe représentative de la densité de probabilité d'une variable aléatoire normale **). Cette courbe a un

---

*) On utilise ici des notions élémentaires et les résultats de l'algèbre linéaire (voir, par exemple, ch. 11 dans [4]).

**) La courbe $y = ce^{-\beta x^2}$ s'appelle courbe gaussienne. La loi normale de distribution est souvent aussi appelée loi *gaussienne*.

maximum au point $x = a$, de plus

$$w_1(a) = w_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \tag{2.59}$$

A la distance 3σ du mode $x = a$ la densité de probabilité n'est que 0,004 et la surface limitée par la courbe $w_1(x)$ dans la bande $a \pm 3\sigma$ est 99,7 % de la surface totale limitée par la courbe de densité,

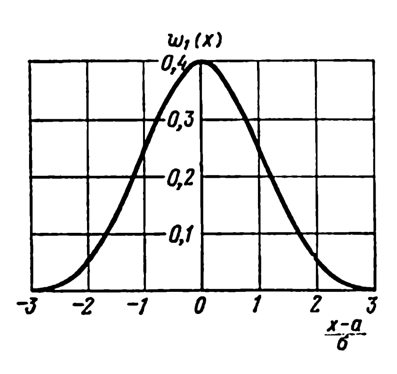


Fig. 2.7. Densité de probabilité de la loi normale

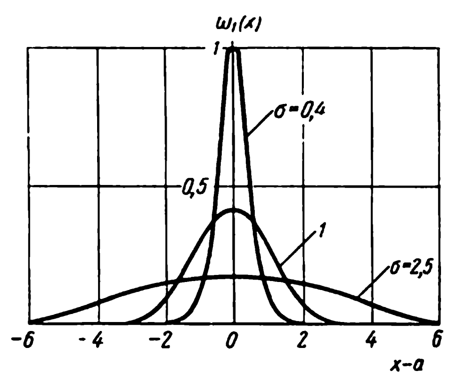


Fig. 2.8. Courbes des densités de probabilité de la loi normale pour différentes valeurs du paramètre σ

c'est-à-dire que l'on peut, avec une probabilité égale à 0,997, admettre que toute variable aléatoire distribuée suivant la loi normale est comprise entre $a - 3\sigma$ et $a + 3\sigma$.

On peut montrer facilement que les points d'inflexion où la courbe de densité a une courbure maximale sont donnés par l'égalité

$$x = a \pm \sigma. \tag{2.60}$$

Les expressions (2.59) et (2.60) montrent que plus le paramètre σ est grand, plus la densité maximale de probabilité est petite et plus loin du mode se trouve le point d'inflexion, c'est-à-dire plus étalée est la courbe de la fonction $w_1(x)$. Inversement, plus le paramètre σ est petit, plus la densité de probabilité maximale est grande et plus le point d'inflexion est près du mode, c'est-à-dire plus restreinte est la zone des valeurs importantes de la fonction $w_1(x)$ et plus grande est la probabilité pour une variable aléatoire normalement distribuée de se trouver dans une bande de largeur comprenant le point $x = a$.

A titre de comparaison on a donné sur la figure 2.8 les courbes des densités de probabilité de la distribution normale pour trois valeurs de σ. L'enveloppe de la famille de ces courbes est le couple d'hyperboles

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{1}{x-a},$$

dont les asymptotes sont la droite verticale $x = a$ et l'axe des abscisses. Pour $\sigma \to \infty$ la courbe des densités est confondue avec l'axe des abscisses, et pour $\sigma \to 0$ elle se transforme en la fonction delta

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \delta(x-a).$$

La table des valeurs de la densité de la loi normale est donnée dans l'annexe I.

La fonction de répartition, c'est-à-dire la probabilité pour une variable aléatoire normalement distribuée de se trouver au-dessous du niveau x sera

$$F_1(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (2.61)$$

Au chapitre précédent lors de l'étude de l'approximation asymptotique de Laplace pour la loi binomiale nous avons considéré la fonction (2.61) pour $a = 0$ et $\sigma = 1$.

La table des valeurs de la fonction $F(x)$ est donnée dans l'annexe I (voir également [6]). Cette table ne contient que les arguments positifs, car la fonction sous le signe de l'intégrale

$$\frac{dF(x)}{dx} = w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

est paire, et les valeurs $F(-x)$ sont données par la relation

$$F(-x) = 1 - F(x). \quad (2.62)$$

Sur la figure 2.9 on trouvera la courbe de la fonction de répartition $F(x)$ correspondant à (2.61) pour $a = 0$, $\sigma = 1$. Cette fonction est monotone croissante de 0 à 1, à l'origine des coordonnées on a

$$F(0) = \frac{F(\infty)}{2} = \frac{1}{2}.$$

La somme des valeurs de cette fonction en deux points disposés symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées est égale à l'unité, ce qui correspond à la formule (2.62) donnée ci-dessus.

Au voisinage de l'origine des coordonnées la fonction de répartition $F(x)$ est presque linéaire et peut assez bien être décrite par les premiers termes d'un développement en série suivant les puissances de x

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{2^{k-1}(2k-1)(k-1)!}. \quad (2.63)$$

Pour des valeurs assez grandes de l'argument on a le développement asymptotique suivant :

$$F(x) \sim 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} - \frac{15}{x^7} + \dots \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k!} \frac{1}{x^{2k+1}} \right] e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (2.64)$$

Remarquons que si dans une série alternée on se limite aux premiers termes, l'erreur commise sera inférieure au premier terme rejeté. Ainsi (2.64) donne

$$1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} < F(x) < 1 - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

A titre de comparaison on donne sur la figure 2.10 les courbes de la fonction de répartition pour les mêmes valeurs de σ que sur la figure 2.8. Lorsque $\sigma \to 0$ les courbes représentatives des fonctions de

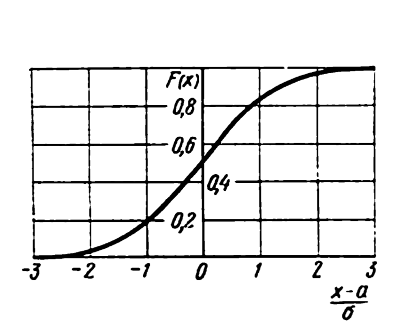


Fig. 2.9. Fonction de répartition normale

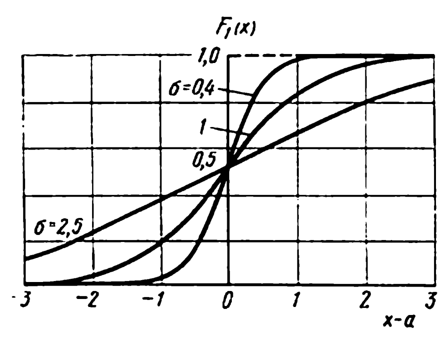


Fig. 2.10. Fonction de répartition normale pour différentes valeurs du paramètre σ

répartition tendent asymptotiquement vers l'axe des abscisses pour $x < a$ et vers une droite parallèle $F = 1$ pour $x > a$. La courbe limite a au point $x = a$ la forme d'un échelon unité.

Souvent au lieu de la fonction $F(x)$ on considère et on tabule l'*intégrale de probabilité* (fonction des erreurs, fonction de Kramp) *)

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz = 2F(x\sqrt{2}) - 1 \qquad (2.65)$$

*) On utilise parfois au lieu de $\Phi(x)$ la notation erf (x).

et la fonction

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (2.66)$$

pour laquelle la formule (2.62) devient la relation plus simple de parité

$$F_0(-x) = -F_0(x). \quad (2.66')$$

Si on a un ensemble de variables aléatoires indépendantes ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$, toutes normalement distribuées et de paramètres respectifs a_k, σ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), en vertu des relations (2.51) et (2.58) la distribution conjointe à n dimensions de ces variables aléatoires indépendantes est donnée par la densité de probabilité

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}}$$

ou

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - a_k)^2}{\sigma_k^2}\right\}. \quad (2.67)$$

La formule (2.67) est un cas particulier de la formule générale (2.55) pour $r_{ik} = 0$, $i \neq k$, où $D_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ et $D_{ik} = 1$ pour $i = k$ et $D = 1$.

2.2.3. Couple de variables aléatoires normalement distribuées. Considérons maintenant la loi normale de distribution d'un couple de variables aléatoires. La densité de probabilité bidimensionnelle dépend dans ce cas des cinq paramètres a_1, a_2, σ_1, σ_2, $r_{12} = r$. Le déterminant D est égal à

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^2,$$

les cofacteurs étant $D_{11} = D_{22} = 1$, $D_{12} = D_{21} = -r$.

La formule générale (2.55) pour $n = 2$ donne l'expression suivante pour la densité de probabilité bidimensionnelle de deux variables aléatoires normalement distribuées:

$$w_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \quad (2.68)$$

La surface de la distribution normale bidimensionnelle correspondant à (2.68) est représentée sur la figure 2.11. Au point $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ la densité de probabilité est maximale et égale à

$$w_2(a_1, a_2) = w_{2\,\max} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \qquad (2.69)$$

A partir de ce point la surface de distribution tend d'une manière monotone vers le plan (x_1, x_2). Toute section verticale de la surface $z = w_2(x_1, x_2)$ par un plan passant par le point de densité de probabilité maximale est une courbe de Gauss (voir la note à la page 56). La densité de probabilité conserve des valeurs constantes le long des ellipses qui sont les sections horizontales de la surface (2.68). Pour l'équation d'une famille d'ellipses d'égales densités de probabilité on a

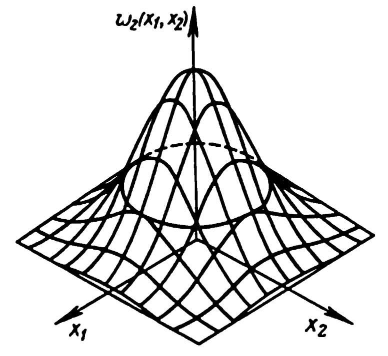


Fig. 2.11. Distribution normale bidimensionnelle

$$Q(x_1, x_2) = \frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2} = \lambda^2. \qquad (2.70)$$

A des valeurs différentes du paramètre $\lambda > 0$ correspondent des valeurs de la densité de probabilité différentes mais constantes pour un λ donné en tous les points de l'ellipse (2.70). Pour $\lambda = 0$ l'ellipse se transforme en un point $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ de densité maximale, et au fur et à mesure de l'augmentation de λ le plan horizontal sécant descend de plus en plus bas et respectivement la valeur de la densité sur les ellipses d'égales probabilités diminue.

La probabilité pour le point (x_1, x_2) du plan de coordonnées aléatoires, distribuées suivant une loi normale bidimensionnelle, de se trouver à l'intérieur de l'ellipse d'égales probabilités pour une valeur fixe du paramètre λ est en vertu de (2.49) égale à

$$P(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \iint\limits_{g(\lambda)} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}Q(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2, \qquad (2.70')$$

où $g(\lambda)$ est le domaine du plan (x_1, x_2) limité par l'ellipse (2.70).

Pour calculer l'intégrale (2.70') on passe aux coordonnées polaires. On obtient

$$P(\lambda) = 1 - e^{-\frac{\lambda^2}{2(1-r^2)}}. \qquad (2.70'')$$

La fonction de répartition bidimensionnelle de la distribution normale s'écrit à l'aide d'une intégrale double, soit:

$$F_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{(u-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(u-a_1)(v-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}} e^{-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}} du\,dv. \qquad (2.71)$$

Dans le cas où $\frac{x_1-a_1}{\sigma_1} = \frac{x_2-a_2}{\sigma_2} = h$ en utilisant la formule (2.21) on peut transformer l'intégrale (2.71) pour qu'elle devienne tabulaire [5]

$$K(r, h) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_h^{\infty}\int_h^{\infty} e^{-\frac{u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}} du\,dv.$$

On a

$$F_2(h, h;\ r) = K(r - h),$$

$$K(r, h) = F_2(h, h;\ r) + 1 - 2F(h), \qquad (2.72)$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace.

Dans l'annexe I on trouvera une table de $K(r, h)$ pour plusieurs valeurs de r et de h.

Il est facile de voir que si la distribution conjointe de deux variables aléatoires interdépendantes suit une loi normale bidimensionnelle, chacune de ces variables est normale *).

*) L'affirmation inverse n'est en général pas vraie. Deux variables aléatoires normales n'ont pas obligatoirement une distribution conjointe normale. Supposons, par exemple, que la densité de probabilité bidimensionnelle de deux variables aléatoires soit

$$w_2^*(x, y) = w_2(x, y) + af(x, y),$$

où

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}},$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \quad |y| > 1, \end{cases}$$

$$a < w_2(1, -1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{1-r}\right\}.$$

Bien que la densité de probabilité totale ne soit pas normale, chacune des varia-

En substituant (2.68) dans (2.28) on trouve

$$w_{1\xi_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1,\ x_2)\,dx_2=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2(1-r^2)}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}-2r\,\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}dx_2.$$

En complétant l'expression entre crochets pour en faire un carré complet on trouve

$$w_{1\xi_1}(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}-r\,\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}dx_2,$$

d'où

$$w_{1\xi_1}(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

D'une manière analogue on a

$$w_{1\xi_2}(x_2)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Si les variables aléatoires sont indépendantes, conformément à (2.32) on a

$$w_2(x_1\ x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \quad (2.73)$$

La formule (2.73) est un cas particulier de (2.68) pour $r=0$.

On aurait pu également démontrer dans le cas général, en intégrant la fonction (2.55) $n-1$ fois sur des limites infinies, que chacune des n variables aléatoires interdépendantes de l'ensemble normal est également normale.

2.2.4. Loi de Rayleigh *). Comme le montre (2.70) pour $\sigma_1=$ $=\sigma_2=\sigma$ les ellipses d'égales probabilités se transforment en cer-

---

bles aléatoires est normalement distribuée, en effet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dy=0.$$

Voir également les théorèmes démontrés par Papoulis, Proc. IEEE, 1963, 51, n° 7, p. 1049.

*) La distribution de Rayleigh et ses généralisations seront étudiées plus en détail aux chapitres 3 et 8. Dans tous les cas on note que la distribution de Rayleigh provient de la distribution normale.

cles de rayon $\rho = \lambda\sigma$. Evaluons la probabilité pour le point d'un plan dont les coordonnées sont des variables aléatoires indépendantes normales de paramètres (a_1, σ) et (a_2, σ) de se trouver à l'intérieur du cercle de rayon ρ avec le centre au point (a_1, a_2). Conformément à (2.70″) pour $r = 0$ et $\lambda = \frac{\sigma}{\rho}$ cette probabilité est égale à

$$F_1(\rho) = 1 - e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}, \quad \rho > 0. \tag{2.74}$$

La densité de probabilité correspondant à la fonction de répartition (2.74) est égale à

$$w_1(\rho) = \frac{dF_1(\rho)}{d\rho} = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}, \quad \rho > 0. \tag{2.75}$$

La densité de probabilité (2.75) qui porte souvent le nom *de Rayleigh* donne la probabilité pour deux variables aléatoires indépendantes normalement distribuées de paramètres identiques $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ de se trouver à l'intérieur d'un anneau limité par deux

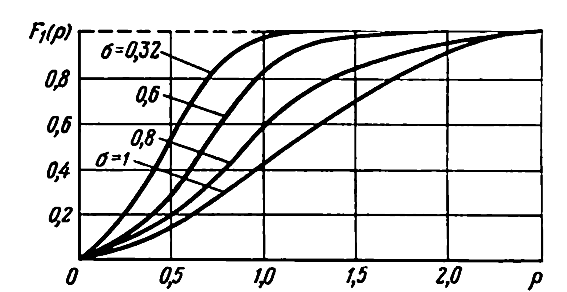


Fig. 2.12. Fonction de répartition de la loi de Rayleigh

cercles concentriques de rayons ρ et $\rho + d\rho$, dont le centre se trouve au point de densité maximale de ces variables aléatoires.

Sur la figure 2.12 on trouvera plusieurs courbes de fonctions de répartition de Rayleigh, et sur la figure 2.13 les courbes correspondantes de la densité de probabilité. La densité maximale $w_{max} = (e\sigma^2)^{-1/2}$ correspond à $\rho = \sigma$. Ce point est un point d'inflexion de la courbe de la fonction de répartition. La tangente de la pente de la tangente (au sens géométrique) à la courbe de densité de probabilité à l'origine des coordonnées est égale à $w_1'(0) = \sigma^{-2}$. L'enveloppe de la famille de courbes des densités de probabilité de Rayleigh est une hyperbole d'équation $y = 2(e\rho)^{-1}$.

2.2.5. Densité de probabilité conditionnelle de la distribution normale. La densité de probabilité conditionnelle (liée) de l'une

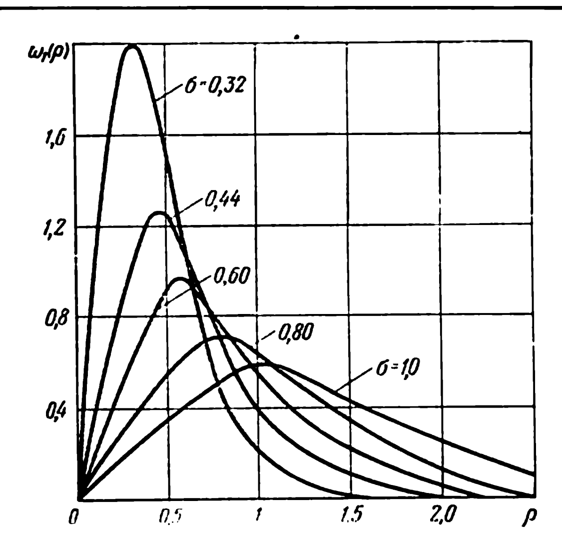


Fig. 2.13. Densité de probabilité de la loi de Rayleigh

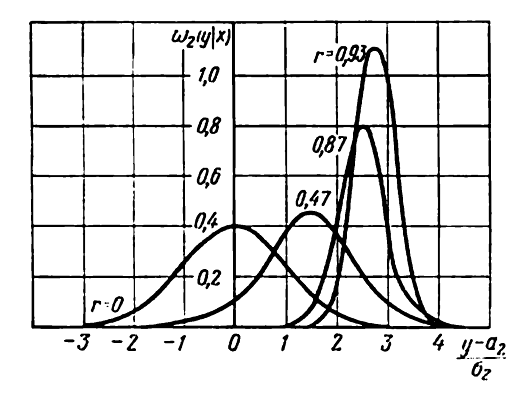


Fig. 2.14. Densités de probabilité conditionnelles de la loi normale

des variables aléatoires ξ_2 normale pour une valeur donnée $\xi_1 = x$ de l'autre est en vertu de (2.37) égale à

$$w_2(y \mid x) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right] + \frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} .$$

Après simplification dans l'exposant de l'exponentielle on a

$$w_2(y\,|\,x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}r-\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}. \qquad (2.76)$$

Pour $r = 0$, ce qui correspond au cas des variables aléatoires indépendantes, la densité de probabilité conditionnelle (2.76) se transforme en une fonction unidimensionnelle correspondant à la loi de distribution normale d'une seule variable aléatoire. Pour $r \to 1$ on a

$$w_2(y\,|\,x)\to\delta\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}-\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right).$$

Sur la figure 2.14 on trouvera les courbes des densités de probabilité conditionnelles de la loi normale construites à partir de (2.76) pour $x = a_1 + 3\sigma_1$ et plusieurs valeurs du paramètre r.

2.3. CARACTÉRISTIQUES NUMÉRIQUES

2.3.1. Moments. La fonction de répartition, aussi bien que sa dérivée, la densité de probabilité, que nous avons étudiées dans les paragraphes précédents donnent une caractéristique complète d'une variable aléatoire, car elles montrent dans quelles limites varient les valeurs de la variable aléatoire et avec quelle probabilité on peut la trouver dans certains domaines de cette gamme. Cependant, dans de nombreux cas on n'a pas besoin de tant de renseignements sur la variable aléatoire, des notions générales suffisent.

Il en serait de même si, au lieu de donner une description détaillée de la forme géométrique d'un corps solide, on se limite à des caractéristiques numériques telles que la longueur, la largeur, la hauteur, le volume, le moment d'inertie, etc.

En théorie des probabilités les caractéristiques numériques d'une variable aléatoire sont des grandeurs constantes obtenues à partir de la fonction de répartition d'après les règles bien déterminées. Considérons les caractéristiques numériques appelées *moments*. Pour des variables aléatoires continues les moments d'ordre k ($k = 1, 2, \ldots$) sont donnés par la formule suivante *):

$$m_k\{\xi\}=\int_{-\infty}^{\infty}x^k w_1(x)\,dx \qquad (2.77)$$

*) Le symbole $m_k\{\xi\}$ désigne non pas une fonction de la variable aléatoire ξ, mais indique que l'on prend la moyenne de la grandeur ξ^k sur l'ensemble de ses valeurs possibles [comparer avec la formule (3.43)].

supposant que l'intégrale impropre converge en valeur absolue, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k w_1(x)\,dx$ est finie. Du point de vue géométrique les nombres m_k peuvent être interprétés comme les moments d'inertie d'ordres correspondants d'une figure plane limitée par l'axe des abscisses et la courbe $y = w_1(x)$.

Si la variable aléatoire considérée est discrète et prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec respectivement les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$, son moment d'ordre k est *)

$$m_k\{\xi\} = \sum_{r=1}^{n} x_r^k p_r, \qquad (2.78)$$

la série du second membre de (2.78) étant absolument convergente.

Soulignons qu'il n'est pas toujours possible de caractériser une variable aléatoire par ses moments, car ceux-ci n'existent pas pour toutes les distributions. Ci-dessous nous donnerons des exemples des distributions pour lesquelles les moments ou bien n'existent point [l'intégrale (2.77) ou la somme (2.78) sont divergentes], ou bien seuls des moments d'ordre inférieur existent. Ainsi, dans chaque cas particulier il y a lieu de vérifier si les moments existent. Remarquons que s'il existe un moment d'ordre n il s'ensuit évidemment que tous les moments d'ordre $k < n$ existent également. Si le moment d'ordre n n'existe pas, aucun moment d'ordre $k > n$ n'existe non plus.

2.3.2. Valeur moyenne. La plus simple des caractéristiques d'une variable aléatoire est le moment du premier ordre, donnant l'abscisse du centre de gravité de la figure limitée par la courbe des densités, que l'on appelle *espérance mathématique* ou *valeur moyenne de la variable aléatoire*. Conformément à la définition générale, la valeur moyenne d'une variable aléatoire continue est égale à

$$m_1\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x)\,dx, \qquad (2.79)$$

et celle d'une variable aléatoire discrète est :

$$m_1\{\xi\} = \sum_{r=1}^{n} x_r p_r. \qquad (2.80)$$

*) Si l'on suppose que la densité de probabilité d'une variable aléatoire peut être représentée par des fonctions delta [voir (2.14)], l'expression (2.77) se trouve être une formule générale, et (2.78) son cas particulier.

On peut transformer la formule (2.79) en introduisant au lieu de la densité $w_1(x)$ la fonction de répartition $F_1(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x dF_1(x) - \int_{0}^{\infty} xd\,[1 - F_1(x)].$$

Après intégration par parties on obtient

$$m_1\{\xi\} = \int_{0}^{\infty} [1 - F_1(x)]\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_1(x)\,dx. \qquad (2.81)$$

Le calcul de la valeur moyenne d'une variable aléatoire se trouve parfois simplifié si l'on utilise (2.81).

Si la courbe des densités est symétrique le moment du premier ordre est égal à la distance séparant le mode de l'origine des coordonnées. Mais dans le cas général il n'en est pas ainsi : par exemple, pour la distribution de Rayleigh le centre de gravité est disposé un peu plus à droite du mode.

La valeur moyenne d'une variable aléatoire caractérise seulement la *disposition* de la courbe de répartition, mais non ses particularités géométriques. Il suffit de placer l'origine au centre de gravité pour que la valeur moyenne soit nulle.

La valeur moyenne d'une variable aléatoire continue distribuée suivant la loi normale est, conformément à (2.79), égale à

$$m_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (u+a)\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = a.$$

Ainsi, la valeur moyenne d'une variable aléatoire normalement distribuée est comme on pouvait s'y attendre égale au paramètre a de cette loi, car la distribution normale est symétrique par rapport au point $x = a$.

Il est également très facile de trouver la valeur moyenne d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Rayleigh :

$$m_1 = \frac{1}{\sigma^2} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \qquad (2.82)$$

Nous allons donner également un exemple de calcul de la valeur moyenne d'une variable aléatoire conformément à la formule (2.80). Calculons la valeur moyenne d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi binomiale *) :

$$m_1 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

---

*) La sommation commence à partir de $k = 1$, car pour $k = 0$ le terme correspondant dans la somme est égal à zéro.

Mais comme

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k},$$

on a

$$m_1=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}=np\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}p^rq^{n-1-r}.$$

La dernière somme est la somme des probabilités d'un groupe complet d'événements, elle est par conséquent égale à l'unité, donc

$$m_1 = np. \qquad (2.83)$$

En comparant (2.83) et (1.21′) on en conclut que la valeur moyenne du nombre de réalisations d'un événement lors de n épreuves indépendantes diffère du nombre le plus probable k_0 de réalisations de cet événement d'une grandeur inférieure à l'unité.

On appelle *écart* d'une variable aléatoire la différence

$$\Delta_\xi = \xi - m_1\{\xi\}$$

entre cette variable aléatoire et sa valeur moyenne.

Les moments de distribution des probabilités des écarts des variables aléatoires sont dits moments *centrés* et sont désignés par $M_k\{\xi\}$. Conformément à (2.77) on a

$$M_k\{\xi\} = m_k\{\Delta_\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)^k w_1(x)\,dx. \qquad (2.84)$$

Au contraire des moments $m_k\{\xi\}$ de la distribution par rapport à l'axe des coordonnées, appelés moments *initiaux*, ou non centrés, les moments centrés sont les moments de la distribution par rapport à l'axe passant par le centre de gravité de la surface sous la courbe de distribution.

Pour une variable aléatoire discrète les moments centrés sont donnés par la somme

$$M_k\{\xi\}=\sum_{r=1}^{n}(x_r-m_1)^k p_r. \qquad (2.85)$$

Si la valeur moyenne d'une variable aléatoire est nulle, on a $\Delta_\xi = \xi$ et les moments centrés de la distribution coïncident avec les moments non centrés. Il est évident que le moment centré du premier ordre est toujours nul.

2.3.3. Variance. Par définition le moment non centré du second ordre est égal à :

pour une variable aléatoire continue

$$m_2\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x)\, dx, \tag{2.86}$$

pour une variable aléatoire discrète

$$m_2\{\xi\} = \sum_{r=1}^{n} x_r^2 p_r. \tag{2.87}$$

Le moment centré de distribution du second ordre est appelé *variance* de la variable aléatoire ξ et, conformément à (2.84) et (2.85), est donné par les formules suivantes :

pour une variable aléatoire continue

$$M_2\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 w_1(x)\, dx, \tag{2.88}$$

pour une variable aléatoire discrète

$$M_2\{\xi\} = \sum_{r=1}^{n} (x_r - m_1)^2 p_r. \tag{2.89}$$

La grandeur $\sqrt{M_2}$ est appelée *écart quadratique moyen*, ou écart type, de la variable aléatoire ξ de sa valeur moyenne. On appelle *écart normé* d'une variable aléatoire le rapport de l'écart de cette variable aléatoire à l'écart quadratique moyen.

Le moment centré et le moment non centré du second ordre sont liés par une relation découlant directement de (2.88) [et, d'une manière analogue, de (2.89) pour une variable aléatoire discrète]

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2m_1 x + m_1^2)\, w_1(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x)\, dx - \\ -2m_1 \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x)\, dx + m_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, dx,$$

d'où

$$M_2 = m_2 - m_1^2. \tag{2.90}$$

Ainsi, la variance d'une variable aléatoire est égale à la différence entre son moment non centré du second ordre et le carré de la valeur moyenne.

Soit $w_1(x)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire ξ ayant un moment du second ordre fini. Nous allons calculer la probabilité pour le module de ξ de dépasser un certain nombre positif ε,

c'est-à-dire

$$P\{|\xi| \geqslant \varepsilon\} = \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} w_1(x)\,dx.$$

Comme dans le domaine d'intégration $\frac{x^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1$, on a

$$P\{|\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} x^2 w_1(x)\,dx.$$

Ayant en vue que $w_1(x) \geqslant 0$, on peut étendre les limites d'intégration de $-\infty$ à ∞. La valeur de l'intégrale ne pouvant pas diminuer, donc

$$P\{|\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x)\,dx = \frac{m_2\{\xi\}}{\varepsilon^2}. \qquad (2.91)$$

En particulier, si au lieu de la variable aléatoire ξ on substitue son écart de la moyenne, c'est-à-dire $\xi - a$, on a

$$P\{|\xi - a| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M_2\{\xi\}}{\varepsilon^2}. \qquad (2.92)$$

La relation (2.92) est appelée *inégalité de Tchébychev.*

Conformément à (2.92), on a

$$P\{|\xi - a| \geqslant k\sqrt{M_2}\} \leqslant \frac{1}{k^2}, \qquad (2.92')$$

c'est-à-dire qu'un écart de ξ de sa valeur moyenne dépassant notablement l'écart quadratique moyen est peu probable.

Ainsi, la variance d'une variable aléatoire caractérise la manière dont sont dispersées ses valeurs par rapport à la moyenne.

Déterminons la variance d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale. Conformément à (2.88) on a

$$M_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\,de^{-\frac{u^2}{2}},$$

et après intégration par parties on obtient :

$$M_2 = \sigma^2.$$

Le sens attribué aux deux paramètres de la distribution normale se trouve ainsi déterminé, l'un d'eux est la valeur moyenne de la variable aléatoire, et l'autre σ^2 sa variance.

La variance d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Rayleigh [voir (2.82)] est égale à

$$M_2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty \left(x - \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2}$$

ou

$$M_2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2. \qquad (2.93)$$

La formule (2.90) permet de trouver la variance d'une variable aléatoire discrète distribuée suivant une loi binomiale. Pour cela calculons le moment non centré du second ordre, soit

$$m_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-k+1} =$$

$$= np \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) \binom{n-1}{r} p^r q^{n-r-1} =$$

$$= np \sum_{r=0}^{n-1} r \binom{n-1}{r} p^r q^{n-r-1} + np \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} p^r q^{n-r-1}.$$

La première somme est égale à $(n-1)\,p$, car c'est le nombre moyen de réalisations de l'événement lors de $n - 1$ épreuves, et la seconde est la somme des probabilités d'un groupe complet d'événements. Ainsi

$$m_2 = np\,(n-1)\,p + np.$$

La valeur de la variance M_2 du nombre de réalisations des événements pour n épreuves indépendantes est égale à

$$M_2 = np\,(n-1)\,p + np - n^2p^2 = np\,(1-p)$$

ou

$$M_2 = npq. \qquad (2.94)$$

Comparant (2.94) et (1.26) on peut se rendre compte que le paramètre σ^2 dans la formule asymptotique de Laplace est la variance du nombre de réalisations de l'événement pour n épreuves indépendantes.

2.3.4. Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. La moyenne et la variance ne peuvent à elles seules refléter toutes les particularités de la courbe de distribution. Entre autres elles ne montrent pas la symétrie ou l'asymétrie de la courbe de distribution par rapport à l'axe passant par le centre de gravité. En vertu de (2.88) pour toute distribution symétrique tous les moments centrés d'ordre impair sont nuls. C'est pourquoi le plus simple des moments impairs, le moment centré du troisième ordre, peut en première approximation caractériser l'asymétrie de la courbe de distribution.

Le moment centré du troisième ordre

$$M_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^3 w_1(x)\, dx \qquad (2.95)$$

peut être exprimé en fonction des moments non centrés des trois premiers ordres, tout comme la variance s'exprime en fonction des moments non centrés du premier et du second ordre. En élevant au cube le binôme se trouvant dans l'expression sous le signe de l'intégrale (2.95), on trouve

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3. \qquad (2.96)$$

L'asymétrie de la courbe de distribution s'exprime généralement par le rapport sans dimension

$$\mathrm{k} = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}}, \qquad (2.97)$$

appelé *coefficient d'asymétrie.*

La distribution de Rayleigh peut servir d'exemple de distribution asymétrique. Le moment non centré du troisième ordre de cette distribution est égal à

$$m_3 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = 3\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc

$$M_3 = 3\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 3\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, 2\sigma^2 + 2\sigma^3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = (\pi - 3) \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \sigma^3$$

et, par conséquent, le coefficient d'asymétrie de la loi de Rayleigh [voir (2.93)] est égal à

$$\mathrm{k} = 2\frac{\pi - 3}{4 - \pi} \sqrt{\frac{\pi}{4 - \pi}} \approx 0{,}63. \qquad (2.98)$$

Pour caractériser l'aplatissement de la courbe de distribution au voisinage du mode on utilise le *coefficient d'aplatissement*, grandeur sans dimension,

$$\gamma = \frac{M_4}{M_2^2} - 3. \qquad (2.99)$$

Pour la loi normale on a

$$M_4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^4 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4 e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 \, de^{-\frac{u^2}{2}} =$$

$$= \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 3\sigma^4 = 3M_2^2.$$

L'égalité (2.99) donne alors $\gamma = 0$. Ainsi le coefficient d'aplatissement de la distribution normale est nul. Si γ est positif, ceci veut dire qu'au voisinage du mode la courbe de distribution a un sommet plus haut et plus aigu que la loi normale de même centre de gravité et de même variance. Si le coefficient d'aplatissement est négatif, cela veut dire que la courbe de distribution est plus plate que la courbe correspondante de la loi normale.

Tout comme M_2 et M_3, le moment centré du quatrième ordre peut s'exprimer en fonction des moments non centrés. On a

$$M_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4. \qquad (2.100)$$

Calculons, par exemple, le coefficient d'aplatissement de la distribution de Rayleigh. Pour cela calculons d'abord la grandeur

$$m_4 = \frac{1}{\sigma^2} \int_{0}^{\infty} x^5 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 8\sigma^4$$

et, compte tenu des valeurs obtenues de m_1, m_2, m_3 pour la distribution de Rayleigh, en utilisant (2.100), on a

$$M_4 = 8\sigma^4 - 4\cdot 3\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 6\cdot 2\sigma^2\sigma^2 \frac{\pi}{2} - 3\sigma^4 \frac{\pi^2}{4} = \frac{32-3\pi^2}{4}\sigma^4.$$

Conformément à (2.99) le coefficient d'aplatissement est égal à

$$\gamma = \frac{32-3\pi^2}{(4-\pi)^2} - 3 \approx 0{,}23,$$

c'est-à-dire que la courbe de la distribution de Rayleigh au voisinage du mode est plus haute et plus aiguë que la courbe de la distribution normale de moyenne $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et de variance $2\sigma^2$.

2.3.5. Caractéristiques numériques d'un couple de variables aléatoires. Considérons le couple de variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 dont la densité de probabilité bidimensionnelle est égale à $w_2(x_1, x_2)$. En utilisant (2.28) et (2.79), on peut trouver la valeur moyenne de chacune de ces variables aléatoires:

$$m_1\{\xi_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_{1\xi_1}(x_1)\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2, \qquad (2.101)$$

$$m_1\{\xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 w_{1\xi_2}(x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 w_2(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2. \quad (2.102)$$

D'une manière analogue la densité de probabilité bidimensionnelle permet de trouver la variance de chacune des variables aléatoires

$$M_2\{\xi_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1\{\xi_1\}]^2\, w_{1\xi_1}(x_1)\,dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1\{\xi_1\}]^2\, w_2(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2, \quad (2.103)$$

$$M_2\{\xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - m_1\{\xi_2\}]^2\, w_{1\xi_2}(x_2)\,dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - m_1\{\xi_2\}]^2\, w_2(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2. \quad (2.104)$$

Pour un couple, en plus de la variance de chacune des deux variables aléatoires, on peut définir encore un moment du second ordre, soit :

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1\{\xi_1\}]\,[x_2 - m_1\{\xi_2\}] \times$$

$$\times\, w_2(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 -$$

$$- m_1\{\xi_1\}\, m_1\{\xi_2\}, \quad (2.105)$$

appelé moment *mixte* du second ordre ou *covariance* des deux variables aléatoires ξ_1 et ξ_2.

Si ξ_1 et ξ_2 sont des variables aléatoires indépendantes, on a $w_2(x_1, x_2) = w_{1\xi_1}(x_1)\, w_{1\xi_2}(x_2)$, et, en vertu de (2.105), on obtient

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_1\{\xi_1\}]\, w_{1\xi_1}(x_1)\,dx_1 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - m_1\{\xi_2\}]\, w_{1\xi_2}(x_2)\,dx_2 = 0,$$

car chacune des intégrales s'annule. Ainsi, les valeurs du moment mixte du second ordre peuvent servir de mesure de la dépendance

existant entre deux variables aléatoires. Souvent on estime cette interdépendance à l'aide du rapport sans dimension

$$R=\frac{M_2\{\xi_1\xi_2\}}{\sqrt{M_2\{\xi_1\}M_2\{\xi_2\}}}, \qquad (2.106)$$

appelé *coefficient de corrélation* entre les variables aléatoires ξ_1 et ξ_2.

Si à la place de ξ_1 et ξ_2 on introduit leurs écarts normés

$$\tilde{\xi}_1=\frac{\xi_1-m_1\{\xi_1\}}{\sqrt{M_2\{\xi_1\}}},\quad \tilde{\xi}_2=\frac{\xi_2-m_1\{\xi_2\}}{\sqrt{M_2\{\xi_2\}}},$$

le coefficient de corrélation s'écrit sous la forme suivante

$$R=m_1\{\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2\}=\frac{m_1\{[\xi_1-m_1\{\xi_1\}][\xi_2-m_1\{\xi_2\}]\}}{\sqrt{M_2\{\xi_1\}M_2\{\xi_2\}}}. \qquad (2.106')$$

Soit la grandeur toujours positive $m_1\{(\tilde{\xi}_1\pm\tilde{\xi}_2)^2\}$. Comme

$$M_2\{\tilde{\xi}_1\}=M_2\{\tilde{\xi}_2\}=1,$$

on a (voir § 3.1.5)

$$m_1\{(\tilde{\xi}_1\pm\tilde{\xi}_2)^2\}=M_2\{\tilde{\xi}_1^2\}+M_2\{\tilde{\xi}_2^2\}\pm 2m_1\{\tilde{\xi}_1\tilde{\xi}_2\}=$$
$$=2(1\pm R)\geqslant 0.$$

Il s'ensuit que le coefficient de corrélation se trouve toujours dans l'intervalle $-1\leqslant R\leqslant 1$ *).

Les valeurs limites de R égales à ± 1 ne peuvent être atteintes que si $\tilde{\xi}_1=\pm\tilde{\xi}_2$.

Si les variables aléatoires sont indépendantes, on a $R=0$. L'affirmation inverse, d'après laquelle ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes pour $R=0$, n'est en général pas vraie. Deux variables aléatoires dont le coefficient de corrélation est nul sont dites *non corrélées*. Ainsi, des variables aléatoires indépendantes sont toujours non corrélées, mais l'inverse n'est pas obligatoirement vrai.

Si $m_1\{\xi_1\xi_2\}=0$ on dit que les variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 sont *orthogonales*. Il est évident que si les moyennes des variables aléatoires sont nulles, les notions d'orthogonalité et de non-corrélation des variables aléatoires coïncident. Certains auteurs appellent les variables non corrélées linéairement indépendantes, ceci pour les distinguer des variables aléatoires statistiquement indépendantes pour lesquelles $w_2(x_1, x_2)=w_{1\xi_1}(x_1)\,w_{1\xi_2}(x_2)$.

Soit par exemple $\xi_1=\cos\varphi$, $\xi_2=\sin\varphi$, où φ est une variable aléatoire uniformément distribuée de 0 à 2π. Il est évident que ξ_1

*) La limitation $|R|\leqslant 1$ découle également de l'inégalité $|M_2\{\xi_1\xi_2\}|\leqslant\sqrt{M_2\{\xi_1\}M_2\{\xi_2\}}$, qui est une forme particulière de l'*inégalité de Bouniakovski-Schwartz* [voir [4], formule (9.5.1)].

et $\xi_2 = \sqrt{1 - \xi_1^2}$ ne sont pas indépendantes, cependant leur covariance $m_1\{\xi_1\xi_2\}$ (et, par conséquent, leur coefficient de corrélation) est nulle *)

$$m_1\{\xi_1\xi_2\} = m_1\{\cos\varphi \sin\varphi\} = \frac{1}{2} m_1\{\sin 2\varphi\} = 0,$$

car

$$m_1\{\cos\varphi\} = m_1\{\sin\varphi\} = m_1\{\sin 2\varphi\} = 0.$$

Nous allons trouver le moment mixte du second ordre de deux variables aléatoires normalement distribuées. Compte tenu de (2.105), on obtient

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1-a_1)(x_2-a_2) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} dx_1dx_2.$$

Faisant sortir de l'expression entre crochets l'expression d'un carré complet et en procédant au changement de variables

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1} - r\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right), \quad v = \frac{x_2-a_2}{\sigma_2},$$

on a

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = \frac{r\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du +$$

$$+ \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

d'où

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = r\sigma_1\sigma_2. \qquad (2.107)$$

*) Généralisant cet exemple, considérons la variable aléatoire ξ_1 ayant une distribution symétrique $w_1(x)$, et soit $\xi_2 = f(\xi_1)$, f étant une fonction paire. La covariance des variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 est égale à [voir (3.117)]

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x[f(x) - m_1\{\xi_2\}]\,\delta[f(x) - y]\,w_1(x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x[f(x) - m_1\{\xi_2\}]\,w_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,w_1(x)\,dx = 0,$$

car $xf(x)w_1(x)$ est une fonction impaire. Ainsi $M_2\{\xi_1\xi_2\} = 0$, bien qu'il y ait une relation fonctionnelle entre ξ_1 et ξ_2.

Etant donné que σ_1^2, σ_2^2 sont les variances des variables aléatoires ξ_1, ξ_2 et vu la définition du coefficient de corrélation, on obtient

$$R = r.$$

Ainsi se trouve élucidé le sens de tous les cinq paramètres de la distribution normale bidimensionnelle, ce sont les moyennes a_1, a_2, les variances σ_1^2, σ_2^2 de chacune des deux variables aléatoires et leur coefficient de corrélation r.

Comme nous l'avons déjà noté, deux variables aléatoires normales pour lesquelles $r = 0$ sont statistiquement indépendantes. Par conséquent, des variables aléatoires *normales non corrélées* sont obligatoirement *indépendantes*.

Nous allons maintenant donner les *caractéristiques numériques conditionnelles* des variables aléatoires. On appelle moyenne conditionnelle de la variable aléatoire ξ_2 pour $\xi_1 = x_1$ la grandeur

$$m_1\{\xi_2 \mid x_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 w_2(x_2 \mid x_1)\, dx_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_2 w_2(x_1, x_2)\, dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2)\, dx_2}. \tag{2.108}$$

La variance conditionnelle de la variable aléatoire ξ_2 pour $\xi_1 = x_1$ est égale à

$$M_2\{\xi_2 \mid x_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - m_1\{\xi_2 \mid x_1\}]^2 w_2(x_2 \mid x_1)\, dx_2 =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - m_1\{\xi_2 \mid x_1\}]^2 w_2(x_1, x_2)\, dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2)\, dx_2}. \tag{2.109}$$

Calculons la moyenne et la variance conditionnelles des variables aléatoires normales. Conformément à la formule (2.108) et compte tenu de (2.76), on a

$$m_1\{\xi_2 \mid x_1\} = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} r - \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} dx_2 = a_2 + r(x_1 - a_1)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Si $r = 0$ ou $x_1 = a_1$, la moyenne conditionnelle coïncide avec la moyenne non conditionnelle. Pour $x_1 = a_1 + 3\sigma_1$ on trouve $m_1\{\xi_2 | x_1\} = a_2 + 3r\sigma_2$. Cette grandeur donne les abscisses des maxima de la famille des densités de probabilité conditionnelles représentées sur la figure 2.14 (page 65).

On trouve la variance conditionnelle à partir de la formule (2.109) :

$$M_2\{\xi_2 \mid x_1\} = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-r^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_2 - a_2 - r(x_1 - a_1)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right]^2 \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}r - \frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} dx_2 = \sigma_2^2(1-r^2).$$

Ainsi, la variance conditionnelle de la variable aléatoire ξ_2 ne dépend pas de la valeur de la variable aléatoire ξ_1, et ne dépend que du coefficient de corrélation des variables aléatoires ξ_1 et ξ_2. Pour $r = 0$ la variance conditionnelle coïncide avec la variance non conditionnelle $M_2\{\xi_2 \mid x_1\} = M_2\{\xi_2\} = \sigma_2^2$.

2.3.6. Généralisation pour un ensemble dénombrable arbitraire de variables aléatoires. Dans le cas général, si on a un ensemble de n variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dont la densité de probabilité est $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la moyenne de ξ_k est donnée par l'expression

$$m_1\{\xi_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_k w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (2.110)$$

Le moment centré du second ordre (covariance) de ξ_j et ξ_k est égal à

$$M_2\{\xi_j\xi_k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [x_j - m_1\{\xi_j\}] \times$$

$$\times [x_k - m_1\{\xi_k\}]\, w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad (2.111)$$

$$j,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pour $j = k$ ce moment est égal à la variance de ξ_k.

Le rapport sans dimension

$$R_{jk} = \frac{M_2\{\xi_j\xi_k\}}{\sqrt{M_2\{\xi_j\} M_2\{\xi_k\}}} \quad (2.112)$$

est appelé coefficient de corrélation des variables aléatoires ξ_k et ξ_j.

Tout comme pour (2.107) dans le cas général il est facile de montrer que dans l'expression générale (2.55) de la densité de probabilité normale les paramètres r_{jk} sont les coefficients de corrélation des variables aléatoires ξ_j et ξ_k. Si tous ces paramètres sont nuls, c'est-à-dire si les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ d'un ensemble ne sont pas corrélées deux à deux, ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.

En plus des moments du premier et du second ordre, pour un ensemble de n variables aléatoires on peut déterminer les moments

d'un ordre quelconque

$$m_{k_1, k_2, \ldots, k_n}\{\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} w_n(x_1, x_2, \ldots$$
$$\ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \qquad (2.113)$$

où k_j sont des nombres positifs quelconques (y compris zéro), $j = 1, 2, \ldots, n$.

2.3.7. Variables aléatoires complexes. En général, dans les applications on n'envisage que des variables aléatoires réelles. Cependant, pour simplifier certaines recherches théoriques, il est parfois commode de considérer le cas général des variables aléatoires complexes définies par l'égalité

$$\xi = \eta + i\zeta, \qquad (2.114)$$

où η et ζ sont des variables aléatoires réelles.

La moyenne d'une variable aléatoire complexe est un nombre complexe défini comme suit

$$m_1\{\xi\} = m_1\{\eta\} + im_1\{\zeta\}. \qquad (2.115)$$

Par définition, la variance d'une variable aléatoire complexe de moyenne nulle est égale à

$$M_2\{|\xi|\} = m_1\{|\xi|^2\}. \qquad (2.116)$$

Si η et ζ sont indépendantes, on a

$$M_2\{|\xi|\} = M_2\{\eta\} + M_2\{\zeta\}. \qquad (2.117)$$

Si l'on se donne deux variables aléatoires complexes ξ_1 et ξ_2 de moyenne nulle, le coefficient de corrélation de ces variables aléatoires est donné par la formule

$$R = \frac{M_2\{\xi_1\bar{\xi}_2\}}{\sqrt{M_2\{|\xi_1|\}\, M_2\{|\xi_2|\}}}, \qquad (2.118)$$

où

$$M_2\{\xi_1\bar{\xi}_2\} = m_1\{\xi_1\bar{\xi}_2\} = m_1\{\eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2\} +$$
$$+ im_1\{\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1\}, \qquad (2.119)$$

le trait au-dessus des lettres indique la grandeur complexe conjuguée.

2.4. DÉVELOPPEMENT ORTHOGONAL DES DENSITÉS DE PROBABILITÉ

2.4.1. Développement de la densité de probabilité unidimensionnelle. Dans certains cas il se trouve commode de présenter la densité de probabilité sous la forme d'un développement en série suivant des fonctions orthogonales normées *).

On choisit en tant que fonction de pondération $\varphi(x)$ donnant l'ensemble des fonctions orthogonales $Q_n(x)$, une densité de probabilité quelconque unidimensionnelle simple et bien connue. Du point de vue formel, la série mentionnée, qui représente une densité de probabilité arbitraire $w_1(x)$, peut s'écrire comme suit:

$$w_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x) Q_k(x). \qquad (2.120)$$

Pour obtenir les coefficients c_k de la série il faut multiplier les deux membres de (2.120) par $Q_n(x)$ et les intégrer en utilisant la condition d'orthogonalité. Dans cette somme tous les termes, sauf un pour $k = n$, disparaissent et l'on obtient

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) Q_n(x) \, dx. \qquad (2.121)$$

Si $\{Q_n(x)\}$ est l'ensemble des polynômes orthogonaux ($n \geqslant 0$), on a

$$Q_n(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r.$$

D'où

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} a_r m_r \qquad (2.122)$$

et

$$w_1\{x\} = \varphi(x) \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x) \sum_{l=0}^{k} a_l m_l, \qquad (2.123)$$

á condition, évidemment, que les moments m_r de la variable aléatoire existent.

Dans chaque cas il est indispensable de vérifier la convergence de la série (2.123). Par conséquent, l'expression (2.123) n'est pas vraie pour toutes les distributions et toutes les fonctions de pondération. Cependant, pour un grand nombre de problèmes la convergence de ladite série n'a pas d'importance. Il s'agit de l'approximation d'une densité de probabilité inconnue $w_1(x)$, si l'on ne connaît que plu-

*) Dans l'annexe IV on trouvera la définition et des exemples de fonctions orthogonales.

sieurs moments de cette distribution. C'est pourquoi il importe de savoir si les premiers termes de la série (2.123) donnent une approximation convenable de $w_1(x)$. On peut alors laisser de côté les questions de convergence. Il se peut que la série (2.123) soit divergente, que les moments d'ordres plus élevés n'existent pas, et que néanmoins l'approximation de $w_1(x)$ obtenue à l'aide des premiers termes soit meilleure que quand la série est convergente.

2.4.2. Séries suivant des polynômes orthogonaux. Nous allons étudier le développement d'une densité de probabilité unidimensionnelle en série suivant certains polynômes normés orthogonaux (voir annexe IV).

Pour ne pas compliquer les expressions obtenues nous allons supposer que $w_1(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire normée de moyenne nulle et de variance unité. Passant à une distribution de moyenne a et de variance σ^2 arbitraires, on obtient $\frac{1}{\sigma^2} w_1\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Nous allons commencer par le développement suivant les *polynômes d'Hermite* (série de Gram-Charlier). Dans le cas considéré on a $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (densité de probabilité normale). Compte tenu de la condition de normalisation [voir (5) de l'annexe IV], on obtient conformément à (2.120)

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{k!}} H_k(x), \tag{2.124}$$

où

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) H_k(x)\, dx, \tag{2.125}$$

avec $c_0 = 1$, et en vertu de la condition de normalisation adoptée pour la variable aléatoire on a $c_1 = c_2 = 0$. Le polynôme d'Hermite permet d'écrire (2.124) sous la forme suivante:

$$w_1(x) = \varphi(x) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{c_k}{\sqrt{k!}} \varphi^{(k)}(x), \tag{2.126}$$

où $\varphi^{(k)}(x)$ est la dérivée d'ordre k de la densité de probabilité normale. Les premiers coefficients c_k dans (2.126) sont

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{3!}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x) w_1(x)\, dx = \frac{M_3}{\sigma^3 \sqrt{3!}} = \frac{\mathrm{k}}{\sqrt{3!}}.$$

$$c_4=\frac{1}{\sqrt{4!}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x^4-6x^2+3)\,w_1(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{4!}}\left(\frac{M_4}{\sigma^4}-3\right)=\frac{\gamma}{\sqrt{4!}}$$

$$c_5=\frac{1}{\sqrt{5!}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x^5-10x^3+15x)\,w_1(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{5!}}\left(\frac{M_5}{\sigma^5}-10\frac{M_3}{\sigma^3}\right).$$

Les premiers termes du développement (2.126) peuvent alors s'écrire de la manière suivante:

$$w_1(x)=\varphi(x)-\frac{k}{3!}\varphi^{(3)}(x)+\frac{\gamma}{4!}\varphi^{(4)}(x)-\ldots \tag{2.127}$$

A l'aide de (2.127) on peut également écrire le développement de la fonction de répartition

$$F_1(x)=F(x)-\frac{k}{3!}\varphi^{(2)}(x)+\frac{\gamma}{4!}\varphi^{(3)}(x)-\ldots, \tag{2.128}$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace.

Considérons aussi le développement de la densité de probabilité d'une variable aléatoire non négative en série suivant les *polynômes de Laguerre*. Ici $\varphi(x)=\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$, $x\geqslant 0$, $\alpha>0$ (distribution gamma). Compte tenu de la condition de normalisation [voir (10) de l'annexe IV], on obtient en vertu de (2.120)

$$w_1(x)=\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\sqrt{\binom{n+\alpha}{n}}}L_k^{(\alpha)}(x), \tag{2.129}$$

où

$$c_k=\frac{1}{\sqrt{\binom{n+\alpha}{n}}}\int\limits_0^{\infty}w_1(x)\,L_k^{(\alpha)}(x)\,dx. \tag{2.130}$$

Comme pour une variable aléatoire non négative on a $m_1>0$, on peut normer toutes les valeurs de cette variable aléatoire en divisant par m_1. Les premiers coefficients c_k dans (2.129) pour $\alpha=0$ sont

$$c_0=\int\limits_0^{\infty}w_1(x)\,dx=1,$$

$$c_1=\int\limits_0^{\infty}(1-x)\,w_1(x)\,dx=0,$$

$$c_2 = \int_0^\infty \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) w_1(x)\, dx = \frac{m_2 - 2m_1^2}{6m_1^2}.$$

$$c_3 = \int_0^\infty \left(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right) w_1(x)\, dx = -\frac{m_3 - 9m_2m_1 + 12m_1^3}{6m_1^3}.$$

Par conséquent, les premiers termes du développement (2.129) s'écrivent comme suit :

$$w_1(x) = e^{-x}\left[1 + \frac{m_2 - 2m_1^2}{2m_1^2}\left(1 - 2x + \frac{x^2}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{m_3 - 9m_2m_1 + 12m_1^3}{m_1^3}\left(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right) + \ldots\right]. \qquad (2.131)$$

Considérons maintenant le développement suivant les *polynômes de Tchébychev*. Dans ce cas on a $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, |x| \leqslant 1$. Compte tenu de la condition de normalisation [voir (15) de l'annexe IV], on obtient en vertu de (2.120)

$$w_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x)\right], \qquad (2.132)$$

où

$$c_k = \sqrt{2}\int_{-1}^{+1} w_1(x)\, T_k(x)\, dx. \qquad (2.133)$$

On a, par exemple, d'après (2.133) :

$$c_1 = \sqrt{2}\int_{-1}^{+1} x w_1(x)\, dx = m_1\sqrt{2},$$

$$c_2 = \sqrt{2}\int_{-1}^{+1} (2x^2 - 1)\, w_1(x)\, dx = (2m_2 - 1)\sqrt{2},$$

$$c_3 = \sqrt{2}\int_{-1}^{+1} (4x^3 - 3x)\, w_1(x)\, dx = (4m_3 - 3m_1)\sqrt{2},$$

$$c_4 = \sqrt{2}\int_{-1}^{+1} (8x^4 - 8x^2 + 1)\, w_1(x)\, dx = (8m_4 - 8m_2 + 1)\sqrt{2}.$$

Les premiers termes du développement (2.132) s'écrivent alors de la manière suivante :

$$w_1(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\{1+2[m_1T_1(x)+(2m_2-1)T_2(x)+$$
$$+(4m_3-3m_1)T_3(x)+\ldots]\}. \quad (2.134)$$

2.4.3. Séries de Fourier. Supposons que la densité de probabilité unidimensionnelle d'une variable aléatoire soit une fonction à support borné, c'est-à-dire ne diffère de zéro que dans un intervalle fini (a, b). Dans cet intervalle on peut alors la représenter sous la forme d'une *série de Fourier*

$$w_1(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-\frac{2\pi ikx}{h}}, \quad (2.135)$$
$$h=b-a, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

où

$$c_k=\frac{1}{h}\int_a^b w_1(x)\,e^{\frac{2\pi ikx}{h}}\,dx. \quad (2.136)$$

La série (2.135) est évidemment un cas particulier de (2.120) pour la fonction de pondération $\varphi(x)\equiv 1$ dans l'intervalle (a, b) et $Q_k(x)=e^{\frac{2\pi ikx}{h}}$. Si $a=-b$ et $w_1(x)$ est une fonction paire, on a

$$w_1(x)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{2\pi kx}{h}, \quad (2.137)$$

$$a_k=\frac{2}{h}\int_0^b w_1(x)\cos\frac{2\pi kx}{h}\,dx. \quad (2.138)$$

2.4.4. Développement de la densité de probabilité bidimensionnelle. Soit $w_2(x_1, x_2)$ la densité de probabilité bidimensionnelle d'un couple de variables aléatoires. Tout comme pour (2.120) on peut, du point de vue formel, représenter $w_2(x_1, x_2)$ sous la forme d'une série, soit

$$w_2(x_1, x_2)=\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} c_{kr}Q_{1k}(x_1)\,Q_{2r}(x_2), \quad (2.139)$$

où $Q_{1k}(x_1)$ et $Q_{2r}(x_2)$ sont des polynômes orthogonaux normés correspondant aux fonctions de pondération $\varphi_1(x_1)$ et $\varphi_2(x_2)$. Pour obtenir les coefficients c_{kr} il faut multiplier les deux membres de (2.139) par $Q_{1m}(x_1)\,Q_{2n}(x_2)$ et intégrer deux fois sur x_1 et x_2 dans le domaine déterminé par les fonctions de pondération en utilisant la condition d'orthogonalité. Tous les termes de la somme sauf un ($k=m$,

$r = n$) s'annulent alors et on obtient

$$c_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2)\, Q_{1m}(x_1)\, Q_{2n}(x_2)\, dx_1 dx_2. \qquad (2.140)$$

Il est parfois commode d'utiliser les densités de probabilité unidimensionnelles des variables aléatoires

$$\varphi_1(x) = w_{11}(x), \quad \varphi_2(x) = w_{12}(x)$$

en qualité de fonctions de pondération. De plus, souvent dans la pratique on a $c_{mn} = 0$ pour $m \neq n$ et les formules mentionnées se simplifient. Le développement se trouve alors remplacé par une somme de la forme

$$w_2(x_1, x_2) = w_{11}(x_1)\, w_{12}(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_{1n}(x_1)\, Q_{2n}(x_2), \qquad (2.141)$$

où

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2)\, Q_{1n}(x_1)\, Q_{2n}(x_2)\, dx_1 dx_2. \qquad (2.142)$$

La relation (2.141) permet de trouver le développement des densités de probabilité conditionnelles, soit:

$$w_2(x_2 \mid x_1) = \frac{w_2(x_1, x_2)}{w_{11}(x_1)} = w_{12}(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_{1n}(x_1)\, Q_{2n}(x_2), \qquad (2.143)$$

$$w_2(x_1 \mid x_2) = \frac{w_2(x_1, x_2)}{w_{12}(x_2)} = w_{11}(x_1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_{1n}(x_1)\, Q_{2n}(x_2). \qquad (2.143')$$

Comme $Q_{10}(x_1) = Q_{20}(x_2) = c_0 = 1$, en vertu de (2.141) le premier terme du développement correspond à l'hypothèse de l'indépendance des variables aléatoires, et les termes suivants donnent l'apport tenant compte de la corrélation éventuelle.

Si les lois de distribution unidimensionnelles des variables aléatoires sont identiques, le développement (2.141) prend la forme

$$w_2(x_1, x_2) = w_1(x_1)\, w_1(x_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_n(x_1)\, Q_n(x_2), \qquad (2.144)$$

où

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2)\, Q_n(x_1)\, Q_n(x_2)\, dx_1 dx_2. \qquad (2.145)$$

Ici $Q_n(x)$ sont des polynômes orthogonaux normés par rapport à la fonction de pondération $w_1(x)$.

Comme exemple de développement orthogonal on peut citer la représentation d'une densité de probabilité bidimensionnelle de deux variables aléatoires normales normées dont le coefficient de corrélation est égal à R, soit:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\exp\left\{-\frac{x_1^2-2Rx_1x_2+x_2^2}{2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}H_n(x_1)H_n(x_2), \quad (2.146)$$

où $Q_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!}}H_n(x)$ sont des polynômes d'Hermite normés (voir annexe IV) et $c_n = R^n$.

Problèmes

2.1. Démontrer que les moments initiaux de la *distribution de Weibull*

$$w_1(x) = \lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^a}, \quad (1)$$

$$F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x^a}, \quad (1')$$

$$x > 0, \quad \lambda > 0, \quad a > 0$$

peuvent être calculés à l'aide de la formule

$$m_k=\lambda^{-\frac{k}{a}}\Gamma\left(1+\frac{k}{a}\right). \quad (2)$$

Etudier les cas particuliers: $a = 1$ (distribution *exponentielle*) et $a = 2$, $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$ (*distribution de Rayleigh*).

2.2. Démontrer que les moments initiaux de la distribution *gamma*

$$w_1(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}, \quad (3)$$

$$x > 0, \quad \lambda > 0, \quad n > 0$$

peuvent être calculés à l'aide de la formule

$$m_k=\lambda^{-k}\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)}, \quad (3')$$

et que les moments de la distribution *bêta* [voir (1.22)]

$$w_1(x)=\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)}, \ a>0, \ b>0, \ 0<x<1 \quad (4)$$

peuvent être calculés à l'aide de la formule

$$m_k=\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}=\frac{B(a+k, b)}{B(a, b)}. \quad (4')$$

2.3. Montrer que pour la *distribution de Cauchy*

$$w_1(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad (5)$$

aucun moment n'existe.

2.4. Montrer que pour la distribution normale *unilatérale*

$$w_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geqslant 0 \tag{6}$$

la moyenne et la variance sont respectivement

$$m_1 = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad M_2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2. \tag{7}$$

Etablir la formule générale pour les moments initiaux

$$m_k = (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{8}$$

2.5. Montrer que pour la *distribution de Laplace*

$$w_1(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0 \tag{9}$$

on a les formules suivantes:

$$m_{2k+1} = 0, \quad m_{2k} = M_{2k} = \frac{(2k)!}{\lambda^{2k}}. \tag{10}$$

2.6. Soit ξ une variable aléatoire dont le moment du second ordre est fini et c une constante arbitraire. Indiquer pour quelle valeur de c la grandeur $m_1\{(\xi - c)^2\}$ est minimale.

2.7. Utiliser la formule (2.39) et montrer que la densité de probabilité de la variable aléatoire $\xi = \zeta\cos\varphi$, où ζ suit une distribution de Rayleigh $W_{1\zeta}(y) = y e^{-\frac{y^2}{2}}$, et φ est uniformément distribuée sur l'intervalle $|\vartheta| \leqslant \pi$, est normale

$$w_{1\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2.8. Vérifier les formules [voir (2.72)]

$$K(r, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arccos r, \tag{11}$$

$$0 < \arccos r \leqslant \pi,$$

$$K(0, h) = [1 - F(h)]^2, \tag{12}$$

$$\lim_{r\to 1} K(r, h) = 1 - F(h), \tag{13}$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace.

2.9. Montrer que la convolution de l'intégrale de Laplace $F(t)$ et de sa dérivée $w(t) = F'(t)$ est [voir (3.36)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t-a) F(t)\, dt = F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right). \tag{14}$$

Démontrer les inégalités

$$F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2}{2}}<\int_{-\infty}^{\infty} w(t-a)F^2(t)\,dt<F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{4+\pi}}e^{-\frac{2a^2}{4+\pi}},$$

$$F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2}{2}}>F^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)>2F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-1.$$

2.10. Montrer que pour une variable aléatoire non négative η on a

$$P\{\eta>1\}<m_1\{\eta\}. \qquad (15)$$

En utilisant (15) démontrer que l'on peut généraliser l'inégalité de Tchébychev de la manière suivante: pour tout $\varepsilon>0$ et une fonction $f(\xi)$ non négative de la variable aléatoire ξ

$$P\{f(\xi)\geqslant\varepsilon\}<\frac{m_1\{f(\xi)\}}{\varepsilon}. \qquad (16)$$

2.11. Trouver à partir de (2.55) pour $n=3$ la densité de probabilité à trois dimensions d'un triplet de variables aléatoires normales

$$w_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3(2\pi)^{3/2}\sqrt{D}}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\left[D_{11}\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+D_{22}\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}+\right.\right.$$
$$+D_{33}\frac{(x_3-a_3)^2}{\sigma_3^2}+2D_{12}\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+2D_{23}\frac{(x_2-a_2)(x_3-a_3)}{\sigma_2\sigma_3}+$$
$$\left.\left.+2D_{31}\frac{(x_3-a_3)(x_1-a_1)}{\sigma_3\sigma_1}\right]\right\}, \qquad (17)$$

où

$$D=1-r_{12}^2-r_{23}^2-r_{31}^2+2r_{12}r_{23}r_{31},$$
$$D_{11}=1-r_{23}^2,\ D_{22}=1-r_{31}^2,\ D_{33}=1-r_{12}^2,$$
$$D_{12}=r_{23}r_{31}-r_{12},\ D_{23}=r_{31}r_{12}-r_{23},$$
$$D_{31}=r_{12}r_{23}-r_{31}. \qquad (18)$$

Noter que les trois nombres donnés r_{12}, r_{23}, r_{32} peuvent être les coefficients de corrélation d'une certaine distribution à trois dimensions, si

$$1-r_{12}^2-r_{23}^2-r_{31}^2+2r_{12}r_{23}r_{31}>0 \qquad (19)$$

(voir la note à la page 55).

Chapitre 3

FONCTIONS DE LA VARIABLE ALÉATOIRE

3.1. LOIS DE DISTRIBUTION DES FONCTIONS DES ARGUMENTS ALÉATOIRES

3.1.1. Généralités. Dans de nombreuses applications de la théorie des probabilités le problème se pose de déterminer, connaissant la fonction de répartition d'un ensemble de variables aléatoires, les fonctions de répartition d'un autre ensemble de variables aléatoires. obtenu à partir du premier par une transformation fonctionnelle donnée.

Il faut souligner que le problème en question n'est étudié que pour des variables aléatoires continues. Les transformations fonctionnelles d'une variable aléatoire discrète ne changent que ses valeurs possibles sans en changer la distribution. Les transformations fonctionnelles des variables aléatoires continues modifient leurs fonctions de répartition.

Ainsi le problème se formule comme suit : connaissant la densité de probabilité conjointe $w_n(x_1, \ldots, x_n)$ des variables aléatoires continues $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et l'ensemble de fonctions continues univoques $f_1, \ldots, f_m$ de n variables, trouver à partir des variables aléatoires initiales les m variables aléatoires suivantes:

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_m = f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Il s'agit de trouver la densité de probabilité $W_m(y_1, \ldots, y_m)$ de ces variables aléatoires.

3.1.2. Transformations fonctionnelles d'une variable aléatoire. Supposons que l'on connaisse la densité de probabilité $w_1(x)$ de la variable aléatoire ξ et qu'il ait lieu de trouver la densité de probabilité $W_1(y)$ de la variable aléatoire $\eta = f(\xi)$. Supposons que la fonction $f(x)$ soit dérivable et que la fonction inverse $\xi = \varphi(\eta)$ existe, c'est-à-dire qu'entre les variables aléatoires ξ et η il y ait une relation univoque. Dans ce cas si une variable aléatoire se trouve dans les limites

$$x_0 < \xi \leqslant x_0 + dx, \tag{3.1}$$

on a obligatoirement

$$y_0 < \eta \leqslant y_0 + dy, \quad y_0 = f(x_0) \tag{3.2}$$

et, inversement, (3.2) entraîne (3.1). C'est pourquoi ces inégalités sont vérifiées avec les mêmes probabilités. La probabilité de l'inégalité (3.1) est égale à l'aire S_x (fig. 3.1), et la probabilité de l'inégalité (3.2) à l'aire S_y. Si dx et dy sont suffisamment petits, on a

$$S_x = w_1(x)\,dx, \quad S_y = W_1(y)\,dy.$$

Comme ces aires doivent être égales entre elles, on trouve

$$W_1(y) = w_1(x)\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

qui est la densité de probabilité cherchée de la variable aléatoire η exprimée en fonction de la densité de probabilité de la variable aléatoire ξ et de la dérivée de la fonction connue $y = f(x)$. Comme $W_1(y) \geqslant 0$, $w_1(x) \geqslant 0$, dans la formule obtenue on doit toujours porter la valeur absolue de la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

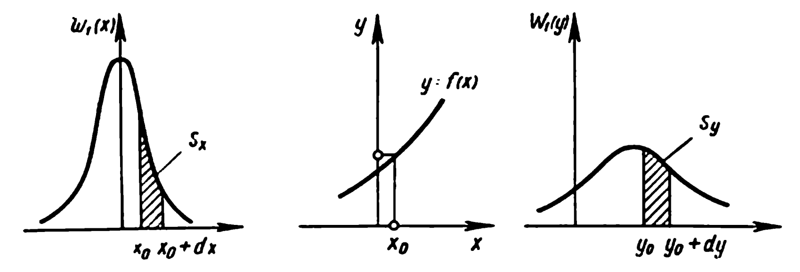


Fig. 3.1. Transformation fonctionnelle d'une variable aléatoire

Outre la démonstration géométrique ci-dessus on peut également donner une démonstration analytique. Si la relation fonctionnelle entre ξ et η est univoque, la fonction $y = f(x)$ doit être monotone, c'est-à-dire que $\frac{dy}{dx}$ doit conserver son signe. Supposons que $\frac{dy}{dx} > 0$, les fonctions de répartition de ξ et de η coïncident alors

$$P\{\eta \leqslant y\} = P\{\xi \leqslant x\}.$$

Quant aux densités de probabilité, elles sont liées par la relation

$$W_1(y) = \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\varphi(y)} w_1(x)\,dx = w_1(x)\frac{dx}{dy}.$$

Si $\frac{dy}{dx} < 0$ on a

$$P\{\eta \leqslant y\} = P\{\xi \geqslant x\},$$

$$W_1(y) = \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\infty} w_1(x)\,dx = -w_1(x)\frac{dx}{dy}.$$

Ces deux égalités (pour $y' > 0$ et $y' < 0$) donnent

$$W_1(y) = w_1(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = w_1[\varphi(y)]\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|. \qquad (3.3)$$

Dans ce qui suit on donnera la préférence aux démonstrations géométriques, car elles sont plus claires.

Si la fonction $y = f(x)$ est telle que sa fonction inverse $x = \varphi(y)$ n'est pas univoque, à une valeur de y correspondent plusieurs branches de la fonction $\varphi(y)$. Désignons celles-ci par $x_1(y)$, $x_2(y)$, . . .

Dans ce cas si

$$y < \eta \leqslant y + dy, \qquad (3.4)$$

on a l'une des possibilités incompatibles

$$\begin{aligned} x_1 < \xi \leqslant x_1 + dx_1, &\quad \text{ou} \\ x_2 < \xi \leqslant x_2 + dx_2, &\quad \text{ou} \qquad (3.5) \\ \dots\dots\dots\dots & \end{aligned}$$

En vertu de la règle d'addition, on trouve que la probabilité de l'inégalité (3.4) doit être égale à la somme des probabilités de chacune des inégalités (3.5). Chacune de ces probabilités étant égale respectivement aux aires S_y et S_{x1}, S_{x2}, . . ., on a

$$S_y = S_{x1} + S_{x2} + \dots$$

ou

$$W_1(y)\,dy = \sum_k w_1(x_k)\,dx_k.$$

La dernière égalité donne la formule cherchée pour la densité de probabilité $W_1(y)$ dans le cas où $x = \varphi(y)$ est multivoque

$$W_1(y) = \sum_k w_1(x_k)\left|\frac{dx_k}{dy}\right|. \qquad (3.6)$$

Si à partir de la variable aléatoire ξ on a obtenu deux variables aléatoires $\eta_1 = f_1(\xi)$ et $\eta_2 = f_2(\xi)$ avec $\xi = \varphi_1(\eta_1)$, on a $\eta_2 = f_2[\varphi_1(\eta_1)] = \Phi(\eta_1)$ et la distribution conjointe de η_1 et de η_2 est

$$W_2(y_1, y_2) = W_1(y_1)\,\delta[y_2 - \Phi(y_1)]. \qquad (3.7)$$

La formule (3.7) découle directement de (2.37). En effet, si $\eta_2 = \Phi(\eta_1)$, pour n'importe quel $\eta_1 = y_1$ la variable aléatoire η_2 est, avec une probabilité unité, égale à $\eta_2 = \Phi(y_1) = y_2$. Par conséquent, la densité de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire η_2 pour $\eta_1 = y_1$ est égale à (voir § 2.1.5)

$$W_2(y_2 \mid y_1) = \delta[y_2 - \Phi(y_1)],$$

ce qui permet de trouver (3.7).

D'une manière analogue pour l'ensemble des variables aléatoires $\eta_i = f_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, on a

$$W_m(y_1, \ldots, y_m) = W_1(y_1) \prod_{k=1}^{m-1} \delta[y_{k+1} - \Phi_k(y_1)]. \qquad (3.7')$$

Nous allons encore donner quelques exemples d'utilisation des formules (3.3) et (3.6) lorsque la transformation $\eta = f(\xi)$ s'opère à l'aide de fonctions élémentaires.

La transformation linéaire $\eta = a\xi + b$ de la variable aléatoire est univoque. En vertu de (3.3) on a alors

$$W_1(y) = \frac{1}{|a|} w_1\left(\frac{y-b}{a}\right). \qquad (3.8)$$

Ainsi, lors d'une transformation linéaire d'une variable aléatoire sa densité de probabilité se trouve déplacée de b, et les échelles suivant les axes de coordonnées sont multipliées par a.

Lors d'une transformation quadratique $\eta = \xi^2$ de la variable aléatoire à chaque valeur de η, qui est toujours positive, correspondent deux valeurs de la variable aléatoire ξ

$$\xi_1 = \sqrt{\eta}, \quad \xi_2 = -\sqrt{\eta}.$$

En vertu de la formule (3.6) on trouve (pour $y > 0$)

$$W_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} w_1(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} w_1(-\sqrt{y}).$$

Ainsi, la densité de probabilité du carré d'une variable aléatoire est de la forme *)

$$W_1(y) = \begin{cases} \dfrac{w_1(\sqrt{y}) + w_1(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \qquad (3.9)$$

Supposons que la variable aléatoire ξ soit distribuée normalement. Après transformation quadratique la densité de probabilité sera en vertu de (3.9) (fig. 3.2)

$$W_1(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-a)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}+a)^2}{2\sigma^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y+a^2}{2\sigma^2}} \operatorname{ch}\left(\frac{a\sqrt{y}}{\sigma^2}\right), \quad y > 0. \qquad (3.10)$$

*) Dans ce qui suit pour simplifier l'écriture on omettra le domaine des valeurs nulles de la densité de probabilité [dans l'exemple de (3.9) on n'écrira la seconde ligne]. C'est pourquoi si l'on donne la densité de probabilité avec limitation de l'argument, ceci signifie qu'en dehors des limites indiquées, la fonction est identiquement nulle.

Pour $a = 0$ on a

$$W_1(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \quad y > 0. \tag{3.10'}$$

La densité de probabilité du carré d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Rayleigh est en vertu de (3.9) égale à

$$W_1(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{2\sigma^2} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, \quad y > 0. \tag{3.11}$$

C'est la loi de distribution *exponentielle*.

Considérons maintenant la distribution d'une *fonction périodique* de la variable aléatoire ξ. Soit $y = f(x)$ une fonction périodique de période a. Comme la fonction inverse de $f(x)$ est infiniment multivoque (à chaque y correspond un ensemble dénombrable de valeurs de x), en vertu de (3.6) on trouve

$$W_1(y) = \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_1[x(y) + ka], \tag{3.12}$$

où $x(y)$ est la valeur principale d'une fonction multivoque (sur l'intervalle de la périodicité). La fonction

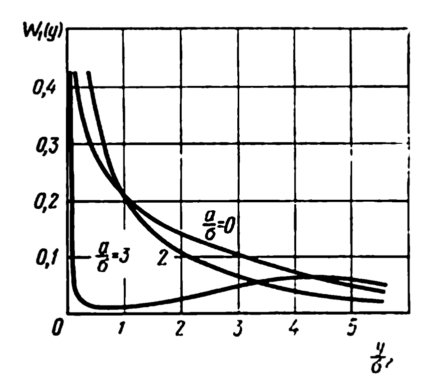


Fig. 3.2. Densité de probabilité du carré d'une variable aléatoire normale

$$w_1^*(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_1(x + ka) \tag{3.13}$$

peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire *rapportée à l'intervalle de la périodicité*. Cette densité est égale à la limite

$$w_1^*(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P\{\ldots A_{k-1}, \text{ ou } A_k, \text{ ou } A_{k+1}, \text{ ou} \ldots\},$$

où l'événement A_k consiste en ce que

$$x + ka < \xi < x + ka + \Delta x, \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$
$$\ldots, \ 0 < x < a.$$

Considérons, par exemple, la transformation trigonométrique $\eta = a \sin \xi$ d'une variable aléatoire (cette fonction représente une oscillation harmonique de phase aléatoire). Dans cette transforma-

tion à chacune des valeurs possibles de η se trouvant entre $-a$ et $+a$ correspond l'ensemble des valeurs de ξ

$$\xi_k = \pi k + (-1)^k \arcsin \frac{\eta}{a}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En vertu de la formule (3.12) on a

$$W_1(y) = \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_1\left(\pi k + (-1)^k \arcsin \frac{y}{a}\right), \quad |y| < a. \tag{3.14}$$

Supposons, par exemple, que la variable aléatoire ξ soit uniformément distribuée sur l'intervalle $|x| \leqslant \pi$ *), c'est-à-dire $w_1(x) = \frac{1}{2\pi}$ pour $|x| \leqslant \pi$ et $w_1(x) \equiv 0$ pour $|x| > \pi$. Dans ce cas, dans la somme infinie (3.14) seuls trois termes correspondant

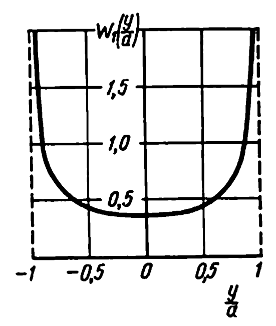


Fig. 3.3. Densité de probabilité des valeurs d'une sinusoïde à phase aléatoire

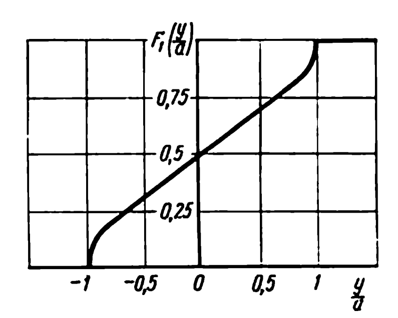


Fig. 3.4. Fonction de répartition des valeurs d'une sinusoïde à phase aléatoire

à $k = 0$ pour $|y| < a$, $k = 1$ pour $0 < y < a$ et $k = -1$ pour $-a < y < 0$ seront différents de zéro.

La densité de probabilité de la variable aléatoire $\eta = a \sin \xi$ sera alors (fig. 3.3):

$$W_1(y) = \frac{1}{\pi a \sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}, \quad |y| < a. \tag{3.15}$$

La fonction de répartition correspondant à (3.15) est (fig. 3.4)

$$F_1(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y}{a}, \quad |y| \leqslant a. \tag{3.15'}$$

*) Voir également le problème 3.6.

On est parfois obligé d'introduire la transformation fonctionnelle suivante:

$$y = \begin{cases} f_1(x), & x \leqslant x_1, \\ 0, & x_1 < x < x_2, \\ f_2(x), & x \geqslant x_2. \end{cases}$$

Dans ce cas la fonction inverse $x = \varphi(y)$ n'existe pas, car à *toutes les valeurs* de l'intervalle (x_1, x_2) correspond une seule valeur $y = 0$. Cependant, introduisant la fonction delta on peut également étendre les formules de changement de variables dans les fonctions de répartition à la transformation en question. Nous allons nous limiter au cas où $f_1(x)$ est une fonction monotone décroissante, et $f_2(x)$ une fonction monotone croissante. On a alors

$$P\{\eta \geqslant 0\} = P\{\xi \leqslant x_1\} + P\{x_1 < \xi < x_2\} + P\{\xi \geqslant x_2\} = 1$$

et

$$P\{0 \leqslant \eta \leqslant y\} = P\{x^{(1)} \leqslant \xi \leqslant x_1\} + \\ + u(y) \int_{x_1}^{x_2} w_1(x)\,dx + P\{x_2 \leqslant \xi \leqslant x^{(2)}\},$$

où $x^{(1)}(y)$ et $x^{(2)}(y)$ sont les fonctions inverses de $f_1(x)$ et de $f_2(x)$, et $u(x)$ est un échelon unité [voir (2.13)]. La densité de probabilité de la variable aléatoire $\eta = f(\xi)$ est

$$W_1(y) = \frac{d}{dy} P\{0 \leqslant \eta \leqslant y\} = w_1[x^{(1)}(y)] \left| \frac{dx^{(1)}}{dy} \right| + \\ + \delta(y) \int_{x_1}^{x_2} w_1(x)\,dx + w_1[x^{(2)}(y)] \left| \frac{dx^{(2)}}{dy} \right|, \quad y > 0. \quad (3.16)$$

Pour les fonctions linéaires $f_1(x) = x_1 - x$, $f_2(x) = x - x_2$ la formule (3.16) devient

$$W_1(y) = w_1(x_1 - y) + w_1(x_2 + y) + \delta(y) \int_{x_1}^{x_2} w_1(x)\,dx, \quad y > 0. \quad (3.17)$$

Considérons enfin la transformation

$$\eta = \begin{cases} (\xi - x_0)^\nu, & \xi > x_0, \quad \nu > 0, \\ 0, & \xi \leqslant x_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire η il y a lieu d'utiliser la formule (3.16) pour $f_1 \equiv 0$. Comme dans le

cas considéré pour $x \geqslant x_0$ on a ,

$$\frac{dy}{dx} = \nu (x - x_0)^{\nu-1} = \nu y^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

on a également

$$W_1(y) = \delta(y) \int_{-\infty}^{x_0} w_1(x)\,dx + \frac{1}{\nu y^{\frac{\nu-1}{\nu}}} w_1(x_0 + y^{\frac{1}{\nu}}), \quad y > 0. \qquad (3.19)$$

Dans le cas particulier d'une transformation *homographique* ($\nu = 1$) d'une variable aléatoire *normale* de moyenne nulle on obtient à partir de (3.19)

$$W_1(y) = \delta(y) F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0, \qquad (3.20)$$

où $F(x)$ est la fonction de Laplace [voir (2.61)].

3.1.3. Transformations fonctionnelles de deux variables aléatoires. Supposons que l'on connaisse la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x_1, x_2)$ des variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 et que l'on doive

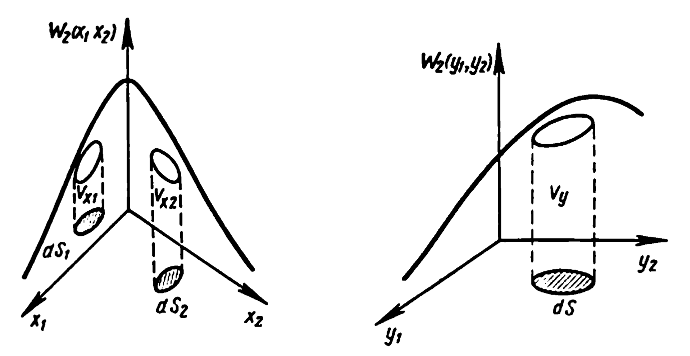


Fig. 3.5. Transformation de la surface de distribution de deux variables aléatoires

trouver la densité de probabilité bidimensionnelle des variables aléatoires η_1 et η_2, obtenues à partir de ξ_1 et ξ_2 par les transformations fonctionnelles

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2). \qquad (3.21)$$

Si la transformation inverse

$$\xi_1 = \varphi_1(\eta_1, \eta_2), \quad \xi_2 = \varphi_2(\eta_1, \eta_2) \qquad (3.22)$$

n'est pas univoque et a plusieurs branches $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{1k}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \ldots, \varphi_{2k}, \ldots$, et si le point A de coordonnées η_1, η_2 se trouve dans un certain domaine dS (fig. 3.5), le point B de coordonnées ξ_1, ξ_2 se trouve alors soit dans le domaine ds_1, soit dans ds_2, soit dans . . . En vertu de la loi d'addition, la probabilité de trouver le point A dans le domaine dS est égale à la somme des probabilités de trouver le point B dans chacun des domaines ds_k ($k = 1, 2, \ldots$). Ces probabilités sont respectivement égales aux volumes V_y et $V_{x1}, V_{x2}, \ldots$ (fig. 3.5) et par conséquent

$$V_y = \sum_k V_{x_k}$$

ou

$$W_2(y_1, y_2)\, dS = \sum_k w_2(x_{1k}, x_{2k})\, ds_k.$$

Le rapport des surfaces élémentaires ds et dS lorsque l'on passe des variables (x_1, x_2) aux variables (y_1, y_2) est égal au *jacobien* de la transformation

$$\frac{ds}{dS} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (y_1, y_2)},$$

avec

$$\frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (y_1, y_2)} = \frac{1}{\frac{\partial (y_1, y_2)}{\partial (x_1, x_2)}}.$$

Par conséquent

$$W_2(y_1, y_2) = \sum_k w_2(x_{1k}, x_{2k}) \left| \frac{\partial (x_{1k}, x_{2k})}{\partial (y_1, y_2)} \right|. \qquad (3.23)$$

Si la relation existant entre (ξ_1, ξ_2) et (η_1, η_2) est univoque, dans la somme (3.23) il ne reste qu'un seul terme.

Considérons un cas particulier de la transformation (3.21)

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1), \\ \eta_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \qquad (3.24)$$

supposant que les fonctions inverses $\xi_1 = \varphi_1(\eta_1)$, $\xi_2 = \varphi_2^*(\eta_2, \xi_1) = \varphi_2(\eta_1, \eta_2)$ sont univoques. Le jacobien de cette transformation est égal à

$$\frac{\partial (y_1, y_2)}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{df_1}{dx_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

La densité de probabilité bidimensionnelle des variables aléatoires η_1 et η_2 est en vertu de (3.23) égale à :

$$W_2(y_1, y_2) = \frac{1}{\left| \frac{d}{dx_1} f_1[\varphi_1(y_1)] \right|} \times$$
$$\times \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial x_2} f_2[\varphi_1(y_1), \varphi_2(y_1, y_2)] \right|} w_2[\varphi_1(y_1), \varphi_2(y_1, y_2)]. \tag{3.25}$$

Tenant compte de la relation (2.30) on peut trouver la densité de probabilité de la seule variable aléatoire η_2, soit

$$W_1(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W_2(y_1, y_2)\, dy_1. \tag{3.26}$$

En substituant (3.25) dans (3.26) et en posant $u = \varphi_1(y_1)$, on a

$$W_1(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2(u, \varphi_2[f_1(u), y_2])}{\left| \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(u, \varphi_2[f_1(u), y_2]) \right|} du. \tag{3.27}$$

Si $\eta_1 = \xi$, c'est-à-dire si $f_1(x) \equiv x$, on a vertu de (3.27)

$$W_1(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_2[u, \varphi_2(u, y_2)]}{\left| \frac{\partial}{\partial x_2} f_2[u, \varphi_2(u, y_2)] \right|} du. \tag{3.28}$$

La formule (3.28) permet alors de trouver la densité de probabilité $W_1(y_2)$ de la variable aléatoire η_2 obtenue par transformation fonctionnelle f_2 des deux variables aléatoires ξ_1 et ξ_2 dont la densité de probabilité conjointe est $w_2(x_1, x_2)$. Les densités de probabilité de la somme, de la différence, du produit et du quotient de deux variables aléatoires sont des cas particuliers de cette formule *).

Comme pour $\eta_2 = \xi_1 + \xi_2$ on a $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \equiv 1$, $x_2 = y_2 - x_1$, la formule (3.28) permet d'obtenir la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(u, y - u)\, du. \tag{3.29}$$

---

*) La distribution de $\eta = f(\xi_1, \xi_2)$ peut également être obtenue à l'aide de la formule

$$W_1(y) = \frac{d}{dy} \int\int_{G(y)} w_2(x_1\ x_2)\, dx_1 dx_2,$$

où $G(y)$ est le domaine limité par la projection de la courbe d'intersection de la surface $y = f(x_1, x_2)$ avec le plan parallèle au plan (x_1, x_2).

D'une manière analogue pour la différence de deux variables aléatoires on a

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(u, y+u)\, du. \tag{3.30}$$

Si $\eta_2 = \xi_1\xi_2$, on a $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1$, $x_2 = \frac{y_2}{x_1}$ et (3.28) permet de trouver la densité de probabilité du produit de deux variables aléatoires:

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2\left(u, \frac{y}{u}\right) \frac{du}{|u|}. \tag{3.31}$$

D'une manière analogue pour le quotient de deux variables aléatoires ξ_2 et ξ_1 on a la densité de probabilité

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(u, uy)\, |u|\, du. \tag{3.32}$$

Pour des variables aléatoires indépendantes on porte dans la formule (3.28) sous le signe de l'intégrale au lieu de $w_2[u, \varphi_2(u, y_2)]$ le produit $w_{1\xi_1}(u)\, w_{1\xi_2}[\varphi_2(u, y_2)]$ des densités de probabilité de chacune des variables aléatoires. Ainsi, la densité de probabilité de la somme de variables aléatoires indépendantes est égale à

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi_1}(u)\, w_{1\xi_2}(y-u)\, du, \tag{3.33}$$

et les densités de probabilité du produit et du quotient sont respectivement

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi_1}(u)\, w_{1\xi_2}\left(\frac{y}{u}\right) \frac{du}{|u|}, \tag{3.34}$$

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi_1}(u)\, w_{1\xi_2}(uy)\, |u|\, du. \tag{3.35}$$

On appelle *convolution* des fonctions $w_{1\xi_1}$ et $w_{1\xi_2}$ l'intégrale du second membre de (3.33). A partir de (3.33) on peut trouver facilement la fonction de répartition de la somme de variables aléatoires indépendantes, soit

$$F_1(y) = \int_{-\infty}^{y} W_1(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi_1}(u)\, F_{1\xi_2}(y-u)\, du. \tag{3.36}$$

Remarquons que les formules (3.29) à (3.36) découlent directement de la formule des probabilités totales des variables aléatoires [voir (2.39) et (2.39′)].

A titre d'exemple nous allons chercher la densité de probabilité de la somme des carrés de deux variables aléatoires normales indépendantes de moyenne nulle et de variances σ_1^2 et σ_2^2. La distribution de chacune des composantes est de la forme (3.10). En vertu de (3.33) on a

$$W_1(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_0^y \exp\left\{-\frac{u}{2\sigma_1^2} - \frac{y-u}{2\sigma_2^2}\right\} \frac{du}{\sqrt{u(y-u)}}. \tag{3.37}$$

Par le changement de variable $u = \frac{y}{2}(1 + \cos\theta)$ on peut réduire l'intégrale (3.37) à une fonction de Bessel d'ordre zéro:

$$W_1(y) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{y}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp\left\{-\frac{y}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\cos\theta\right\} d\theta = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{y}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)} I_0\left[\frac{y}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right]. \tag{3.38}$$

Pour $\sigma_1 = \sigma_2$ la loi de distribution (3.38) devient exponentielle [voir (3.11)].

3.1.4. Ensemble fini arbitraire de variables aléatoires. Dans le cas général, si l'on connaît la densité de probabilité conjointe $w_n(x_1, \ldots, x_n)$ des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et le jacobien de la transformation des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$ en variables aléatoires $\eta_1, \ldots, \eta_n$

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}, \tag{3.39}$$

la densité de probabilité des variables aléatoires transformées est égale à

$$W_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_k w_n(x_{1k}, \ldots, x_{nk}) \left|\frac{\partial(x_{1k}, \ldots, x_{nk})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right|, \tag{3.40}$$

où $x_{ik}(y_1, \ldots, y_n)$ est la branche k de la transformation inverse ($i = 1, \ldots, n$).

Si à partir de l'ensemble initial on obtient $m < n$ variables aléatoires $\eta_1, \ldots, \eta_m$, on peut utiliser la formule (3.40) en ajoutant à ce système $m - n$ variables aléatoires $\eta_j \equiv \xi_j$ ($j = m + 1, \ldots$ $\ldots, n$). La distribution conjointe de $\eta_1, \ldots, \eta_m$ peut être obtenue à partir de (3.40) par intégration sur les variables $y_{m+1}, \ldots, y_n$.

Si au contraire, le nombre m de variables aléatoires obtenues par la transformation fonctionnelle de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ est supérieur à n, alors $m - n$ de ces grandeurs sont fonctionnellement liées à n autres, dans ce cas la densité de probabilité à m dimensions peut s'écrire à l'aide de la fonction delta sous la forme [voir (3.7')] :

$$W_m(y_1, \ldots, y_m) = W_n(y_1, \ldots, y_n) \prod_{k=1}^{m-n} \delta[y_{n+k} - \Phi_k(y_1, \ldots, y_n)]. \tag{3.41}$$

3.1.5. Valeur moyenne d'une fonction de variables aléatoires. Supposons que l'on connaisse la densité de probabilité $w_1(x)$ de la variable aléatoire ξ et que l'on doive trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire $\eta = f(\xi)$. Si la fonction inverse $\xi = \varphi(\eta)$ est univoque, on obtient à partir de (3.3)

$$m_1\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} yW_1(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,w_1(x)\frac{dx}{dy}\,dy$$

ou

$$m_1\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,w_1(x)\,dx \tag{3.42}$$

à condition que l'intégrale dans (3.42) soit absolument convergente.

On peut montrer *) que la formule donnée pour la valeur moyenne d'une fonction d'une variable aléatoire est valable pour n'importe quelle fonction $f(x)$, si toutefois l'intégrale (3.42) existe.

Posons $\eta = \xi^k$. On a alors en vertu de (3.42)

$$m_1\{\xi^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_1(x)\,dx = m_k\{\xi\}, \tag{3.43}$$

c'est-à-dire que le moment d'ordre k peut être interprété comme la moyenne de la k-ième puissance de la variable aléatoire.

D'une manière analogue

$$M_k\{\xi\} = m_k\{\xi - m_1\} = m_1\{(\xi - m_1)^k\}. \tag{3.44}$$

Comme la moyenne d'une grandeur constante est égale à sa valeur, conformément à (3.44) dans le cas particulier où $\xi = c$, le moment centré d'un ordre quelconque d'une grandeur constante est égal à zéro.

Dans le cas général où l'on se donne la densité de probabilité de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et qu'il est néces-

*) Voir, par exemple [2, § 29].

saire de trouver la valeur moyenne de $\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ on a

$$m_1\{\eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, w_n(x_1, \ldots \\ \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (3.45)$$

On peut utiliser le cas particulier $n = 2$ de la formule (3.45) pour trouver les caractéristiques numériques de la somme et du produit de variables aléatoires.

La moyenne de la somme (ou de la différence) de variables aléatoires est

$$m_1\{\xi_1 \pm \xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \pm x_2)\, w_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 w_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 w_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

et, en vertu de (2.101) et (2.102) on a

$$m_1\{\xi_1 \pm \xi_2\} = m_1\{\xi_1\} \pm m_1\{\xi_2\}. \quad (3.46)$$

La formule (3.46) donne

$$m_1\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} m_1\{\xi_k\}. \quad (3.47)$$

Ainsi, *la moyenne de la somme de variables aléatoires est toujours égale à la somme des moyennes des composantes.*

La moyenne du produit de variables aléatoires est, en vertu de (2.105), égale à

$$m_1\{\xi_1\xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \\ = m_1\{\xi_1\}\, m_1\{\xi_2\} + M_2\{\xi_1\xi_2\}. \quad (3.48)$$

Si ξ_1 et ξ_2 ne sont pas corrélées, on a $M_2\{\xi_1\xi_2\} = 0$ et

$$m_1\{\xi_1\xi_2\} = m_1\{\xi_1\}\, m_1\{\xi_2\}. \quad (3.49)$$

En vertu de (3.49), pour des variables aléatoires non corrélées deux à deux, on a :

$$m_1\left\{\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = \prod_{k=1}^{n} m_1\{\xi_k\}. \quad (3.50)$$

Ainsi, *la moyenne du produit de variables aléatoires non corrélées deux à deux est égale au produit des moyennes des facteurs.*

En vertu de (3.49) on peut sortir du signe de la moyenne le facteur constant c, soit

$$m_1\{c\xi\} = cm_1\{\xi\}. \tag{3.51}$$

Considérons maintenant la variance de la somme (ou de la différence) de deux variables aléatoires. Utilisant (3.44) et (3.47) on a

$$M_2\{\xi_1 \pm \xi_2\} = m_1\{[\xi_1 \pm \xi_2 - m_1\{\xi_1 \pm \xi_2\}]^2\} = \\ = m_1\{[(\xi_1 - m_1\{\xi_1\}) \pm (\xi_2 - m_1\{\xi_2\})]^2\} = M_2\{\xi_1\} + \\ + M_2\{\xi_2\} \pm 2m_1\{[\xi_1 - m_1\{\xi_1\}][\xi_2 - m_1\{\xi_2\}]\}$$

et, compte tenu de (2.106′), on obtient *)

$$M_2\{\xi_1 \pm \xi_2\} = M_2\{\xi_1\} + M_2\{\xi_2\} \pm \\ \pm 2R\sqrt{M_2\{\xi_1\}\,M_2\{\xi_2\}}. \tag{3.52}$$

Si ξ_1 et ξ_2 ne sont pas corrélées, leur coefficient de corrélation R est nul et l'on a

$$M_2\{\xi_1 \pm \xi_2\} = M_2\{\xi_1\} + M_2\{\xi_2\}, \tag{3.53}$$

c'est-à-dire que *la variance de la somme ou de la différence de deux variables aléatoires non corrélées est égale à la somme des variances de ces variables aléatoires.*

En vertu des formules (3.53) pour des variables aléatoires indépendantes on a

$$M_2\left\{\sum_{k=1}^{n} \pm \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} M_2\{\xi_k\}. \tag{3.54}$$

Ainsi, *la variance de la somme algébrique de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances des composantes.*

La variance du produit de variables aléatoires non corrélées est égale à

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = m_1\{[\xi_1\xi_2 - m_1\{\xi_1\}\cdot m_1\{\xi_2\}]^2\} = \\ = m_2\{\xi_1\}\,m_2\{\xi_2\} - m_1^2\{\xi_1\}\,m_1^2\{\xi_2\}. \tag{3.55}$$

La formule (3.55) est l'extension de la formule (2.90) au cas bidimensionnel. En exprimant par la formule (2.90) les moments non centrés m_2 en fonction des variances, on obtient à partir de (3.55)

*) On peut facilement étendre la formule (3.52) à la somme d'un nombre quelconque de termes

$$M_2\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}\sqrt{M_2\{\xi_i\}\,M_2\{\xi_j\}} = \\ = \sum_{i=1}^{n} M_2\{\xi_i\} + 2\sum_{i<j} R_{ij}\sqrt{M_2\{\xi_i\}\,M_2\{\xi_j\}}.$$

après transformations élémentaires

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = M_2\{\xi_1\} M_2\{\xi_2\} + \\ + m_1^2\{\xi_1\} M_2\{\xi_2\} + m_1^2\{\xi_2\} M_2\{\xi_1\}. \quad (3.56)$$

Pour des variables aléatoires non corrélées de moyennes nulles (variables aléatoires orthogonales entre elles), on a en vertu de (3.56)

$$M_2\{\xi_1\xi_2\} = M_2\{\xi_1\} M_2\{\xi_2\}. \quad (3.57)$$

Comme la variance d'une grandeur constante est nulle, la relation (3.56) montre que tout facteur constant peut être sorti du signe de la variance, à condition toutefois de l'élever au carré

$$M_2\{c\xi\} = c^2 M_2\{\xi\}. \quad (3.58)$$

Par exemple, conformément à cette règle, la variance de l'écart normé $\frac{\xi - m_1}{\sqrt{M_2}}$ de la variable aléatoire ξ est toujours égale à l'unité.

3.2. LOIS DE PROBABILITÉ DU MODULE ET DE LA PHASE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

3.2.1. Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. Considérons une classe importante de transformations des variables aléatoires figurant dans de nombreuses applications

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}. \quad (3.59)$$

La transformation (3.59) correspond à la valeur principale de l'arc tangente. Cette transformation est biunivoque, avec $\zeta > 0$, et les valeurs possibles de la variable aléatoire ϑ se trouvant entre 0 et 2π. La transformation géométrique (3.59) signifie que l'on passe des coordonnées aléatoires cartésiennes (ξ, η) d'un point à ses coordonnées aléatoires polaires ζ et ϑ qui sont respectivement le module et la phase d'un vecteur aléatoire dont l'origine se trouve à l'origine des coordonnées et l'extrémité coïncide avec le point (ξ, η). La transformation inverse de (3.59) est

$$\xi = \zeta \cos\vartheta, \quad \eta = \zeta \sin\vartheta. \quad (3.60)$$

Soit $w_2(x, y)$ la densité de probabilité bidimensionnelle des coordonnées aléatoires cartésiennes et proposons-nous de trouver la densité de probabilité $w_2(\rho, \varphi)$ des coordonnées polaires. Comme le jacobien de la transformation (3.60) des variables x, y en variables ρ, φ est égal à

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

à partir de la formule (3.23) on obtient

$$W_2(\rho, \varphi) = \rho w_2(x, y) = \rho w_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), \quad (3.61)$$
$$\rho > 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Si ξ et η sont indépendantes, on a

$$W_2(\rho, \varphi) = \rho w_{1\xi}(\rho\cos\varphi)\, w_{1\eta}(\rho\sin\varphi). \quad (3.61')$$

La formule (3.61) permet également de trouver les densités de probabilité unidimensionnelles du module ζ et de la phase ϑ d'un vecteur aléatoire

$$W_{1\zeta}(\rho) = \rho\int_0^{2\pi} w_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi, \quad \rho > 0, \quad (3.62)$$

$$W_{1\vartheta}(\varphi) = \int_0^{\infty} \rho w_2(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\rho, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \quad (3.63)$$

La formule (3.61) peut être généralisée au cas de n points aléatoires d'un plan dont les coordonnées cartésiennes sont corrélées et données par la densité de probabilité $w_{2n}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ à $2n$ dimensions. Pour passer aux modules et aux phases des vecteurs on utilise les transformations suivantes

$$x_j = \rho_j \cos\varphi_j,$$
$$y_j = \rho_j \sin\varphi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (3.64)$$

Il est facile de voir que le jacobien de la transformation (3.64) est égal à

$$\frac{\partial(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}{\partial(\rho_1, \varphi_1, \ldots, \rho_n, \varphi_n)} = \rho_1 \ldots \rho_n. \quad (3.65)$$

Dans ce cas, en vertu de (3.40), on peut passer de la densité de probabilité à $2n$ dimensions des coordonnées aléatoires cartésiennes de n points à la densité de probabilité à $2n$ dimensions des modules et des phases des vecteurs, ceci à l'aide de la formule

$$W_{2n}(\rho_1, \varphi_1, \ldots, \rho_n, \varphi_n) = \rho_1 \ldots \rho_n w_{2n} \times$$
$$\times (\rho_1\cos\varphi_1, \rho_1\sin\varphi_1, \ldots, \rho_n\cos\varphi_n, \rho_n\sin\varphi_n), \quad (3.66)$$
$$\rho_j > 0, \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

En intégrant sur les variables ρ ou φ on obtient à partir de (3.66) la densité de probabilité à n dimensions des modules et des phases des vecteurs en question

$$W_n(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \rho_1 \ldots \rho_n \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} w_{2n}(\rho_1\cos\varphi_1, \ldots, \rho_n\sin\varphi_n)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n, \quad (3.67)$$
$$\rho_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$W_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \rho_1 \ldots \rho_n w_{2n} \times$$
$$\times (\rho_1 \cos \varphi_1, \ldots, \rho_n \sin \varphi_n)\, d\rho_1 \ldots d\rho_n, \qquad (3.68)$$
$$0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

3.2.2. Distribution du module d'un vecteur à composantes normales indépendantes. Nous allons appliquer les formules obtenues aux densités de probabilité du module et de la phase du rayon vecteur d'un point dont les coordonnées sont indépendantes et normalement distribuées avec les paramètres (a, σ) et (b, σ) respectivement.

En vertu de (3.61′) la distribution conjointe du module et de la phase d'un vecteur dans le cas considéré est égale à

$$W_2(\rho, \varphi) = \rho \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\cos\varphi - a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\sin\varphi - b)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.69)$$

Conformément à (3.62) on a alors

$$W_1(\rho) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\cos\varphi - a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho\sin\varphi - b)^2}{2\sigma^2}} d\varphi, \qquad \rho > 0,$$

ou après des transformations algébriques élémentaires on a

$$W_1(\rho) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + a^2 + b^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho\sqrt{a^2+b^2}}{\sigma^2}\cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi, \quad \rho > 0,$$

où $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$.

Le changement de variable $u = \varphi - \varphi_0$ et la notation $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ permettent de ramener cette intégrale à une fonction de Bessel d'ordre zéro de l'argument imaginaire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} e^{-i\left(\frac{i\alpha\rho}{\sigma^2}\right)\cos u} du = J_0\left(\frac{i\alpha\rho}{\sigma^2}\right) = I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right).$$

Ainsi la densité de probabilité cherchée sera égale à

$$W_1(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + \alpha^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right), \quad \rho > 0. \qquad (3.70)$$

Cette fonction permet de généraliser la loi de distribution de Rayleigh [voir (2.75)] qui est un cas particulier de (3.70) pour $a = b = 0$, d'où son nom de *densité de probabilité de la loi de Rayleigh généralisée*. Les courbes correspondant à (3.70) sont données sur la figure 3.6.

La loi cumulative de distribution, c'est-à-dire la probabilité de ce que le module du rayon vecteur soit inférieur à la valeur donnée r, découle directement de (3.70) *)

$$F_1(r) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^r \rho e^{-\frac{\rho^2+\alpha^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right) d\rho.$$

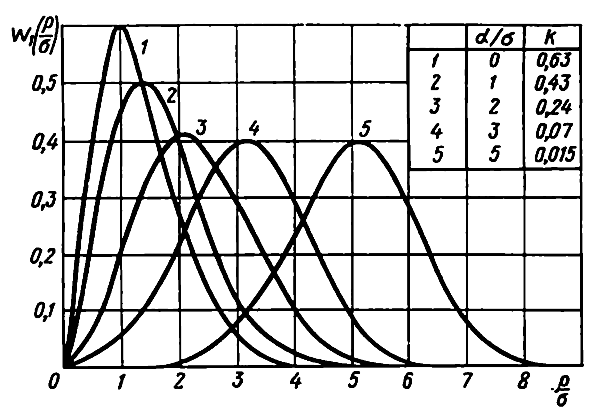


Fig. 3.6. Densité de probabilité de la loi de Rayleigh généralisée

Intégrant par parties et utilisant la relation

$$\int u^n I_{n-1}(au)\, du = \frac{u^n}{a} I_n(au), \quad a > 0,$$

on obtient

$$F_1(r) = e^{-\frac{r^2+\alpha^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^n I_n\left(\frac{\alpha r}{\sigma^2}\right), \quad r>0, \quad \alpha>0. \qquad (3.71)$$

Si $\frac{\alpha}{\sigma}$ est petit, la densité de probabilité de la loi de Rayleigh généralisée diffère peu de (2.75), la correction pouvant être obtenue en développant la fonction de Bessel en série de puissances. En se

*) L'intégrale indéfinie de la fonction (3.70) ne peut être exprimée au moyen de fonctions élémentaires ou tabulaires. Seule fait exception l'intégration du cas $\rho \geqslant a$. On a alors

$$\frac{1}{\sigma^2} \int_\alpha^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2+\alpha^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right) d\rho = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-\frac{\alpha^2}{\sigma^2}} I_0\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)\right].$$

Il existe des tables de la densité de probabilité de la loi de Rayleigh généralisée, cf., par exemple, [12]. Cette distribution est appelée parfois loi de Rayleigh-Rice.

limitant aux deux premiers termes de ce développement on obtient

$$W_1(\rho) \approx \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2+\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(1+\frac{\alpha^2\rho^2}{4\sigma^4}\right). \qquad (3.72)$$

Pour des valeurs de $\frac{\rho}{\sigma} < \frac{\sigma}{\alpha}$ la formule (3.72) est suffisamment précise, et pour $\frac{\rho}{\sigma} > \frac{\sigma}{\alpha}$ la précision devient insuffisante. Mais si $\frac{\alpha}{\sigma} \gg 1$, la densité de probabilité pour $\frac{\rho}{\sigma} > \frac{\sigma}{\alpha}$ devient souvent pratiquement négligeable.

Si $\frac{\alpha}{\sigma}$ est grand, dans l'expression (3.70) on peut remplacer la fonction de Bessel par son développement asymptotique:

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1+\frac{1}{8z}+\frac{9}{128z^2}\cdots\right).$$

On a alors

$$W_1(\rho) \sim \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2+\alpha^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\rho\alpha}} e^{\frac{\rho\alpha}{\sigma^2}} \left(1+\frac{\sigma^2}{8\rho\alpha}\right)$$

ou

$$W_1(\rho) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\rho-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \left(1+\frac{\sigma^2}{8\alpha\rho}\right) \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}, \qquad \rho > 0. \quad (3.72')$$

En vertu de la formule (3.72'), au facteur correctif $\left(1+\frac{\sigma^2}{8\alpha\rho}\right)\sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}$ près (celui-ci est voisin de l'unité, si $\alpha/\sigma \gg 1$ et ρ est voisin de α), la densité de probabilité de la loi de Rayleigh généralisée devient *normale* *) de paramètres α et σ.

Calculons les moments d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Rayleigh généralisée:

$$m_k = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty \rho^{k+1} I_0\left(\frac{\alpha\rho}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho.$$

*) Dans [8] on peut trouver la relation asymptotique suivante pour la fonction de répartition de la loi de Rayleigh généralisée

$$F_1(r) \sim F\left[\frac{r}{\sigma}-s-f\left(\frac{r}{\sigma}, s\right)\right],$$

où $F(u)$ est la fonction de Laplace et

$$f\left(\frac{r}{\sigma}, s\right) = \frac{1}{2s} - \frac{\frac{r}{\sigma}-s}{4s^2} + \frac{2\left(\frac{r}{\sigma}-s\right)^2+1}{12s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right), \quad s=\frac{\alpha}{\sigma} \gg 1.$$

Calculons l'intégrale (voir, par exemple, Watson. Théorie des fonctions de Bessel). On a

$$m_k = (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right) \ {}_1F_1\left(-\frac{k}{2},\ 1,\ -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right), \tag{3.73}$$

où ${}_1F_1$ est une fonction hypergéométrique dégénérée dont les propriétés essentielles sont données dans l'annexe V. Pour $\alpha = 0$ on obtient une formule correspondant à la distribution de Rayleigh [voir (2) dans le problème 2.1].

La valeur moyenne est égale à

$$m_1 = \sigma\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \ {}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}\right)\right] e^{-\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}}. \tag{3.74}$$

On peut également écrire l'expression donnant les moments du second et du troisième ordre:

$$m_2 = 2\sigma^2 + \alpha^2, \tag{3.75}$$

$$m_3 = 3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+\frac{\alpha^4}{6\sigma^4}\right) I_0\left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\alpha^2}{3\sigma^2}+\frac{\alpha^4}{6\sigma^4}\right) I_1\left(\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}\right)\right] e^{-\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}}. \tag{3.76}$$

Si $\alpha \gg \sigma$, en utilisant l'expression asymptotique ci-dessus de la fonction de Bessel, on trouve

$$m_1 \sim \alpha + \frac{\sigma^2}{2\alpha} = \alpha\left(1+\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right), \tag{3.77}$$

$$M_2 \sim \sigma^2 - \frac{\sigma^4}{4\alpha^2} = \sigma^2\left(1-\frac{\sigma^2}{4\alpha^2}\right). \tag{3.78}$$

Les premiers termes dans les formules (3.77) et (3.78) représentent respectivement la moyenne et la variance de la loi de distribution normale limite, et les seconds donnent une correction qui décroît lorsque $\frac{\alpha}{\sigma}$ augmente.

Les expressions (3.74) à (3.76) permettent de calculer le coefficient d'asymétrie en fonction de $\frac{\alpha}{\sigma}$. Pour les courbes de la figure 3.6 les valeurs du coefficient d'asymétrie k sont données directement sur cette figure. On voit que, pour k = 0,07, c'est-à-dire lorsque le coefficient d'asymétrie diminue à peu près de 10 fois par rapport à la distribution de Rayleigh la plus asymétrique ($\alpha = 0$), la densité de probabilité devient pratiquement symétrique et voisine de la densité de probabilité de la loi normale. Cet exemple montre combien le coefficient d'asymétrie est sensible à la forme de la courbe.

3.2.3. Distribution de la phase d'un vecteur à composantes normales indépendantes. Nous allons maintenant calculer la densité de probabilité de la phase d'un vecteur à composantes normales indépendantes. Conformément à la formule générale (3.63) la densité de probabilité unidimensionnelle de la phase est égale à [voir également (3.69)]

$$W_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^\infty \rho e^{-\frac{(\rho\cos\varphi-a)^2+(\rho\sin\varphi-b)^2}{2\sigma^2}}d\rho.$$

Après des transformations élémentaires on obtient

$$W_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{a^2+b^2}{2\sigma^2}}\int_0^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2-2\rho(a\cos\varphi+b\sin\varphi)}{2\sigma^2}}d\rho. \qquad (3.79)$$

En utilisant les notations introduites, on peut écrire (3.79) sous la forme suivante:

$$W_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}\int_0^\infty \rho e^{-\frac{\rho^2-2\rho\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)}{2\sigma^2}}d\rho. \qquad (3.80)$$

Pour le calcul de l'intégrale (3.80) il faut compléter l'exposant de l'exponentielle dans l'expression sous l'intégrale jusqu'à un carré complet

$$W_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}e^{\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\cos^2(\varphi-\varphi_0)}\int_0^\infty \rho e^{-\frac{[\rho-\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)]^2}{2\sigma^2}}d\rho=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\sin^2(\varphi-\varphi_0)}\int_{-\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)}^\infty [\rho+\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)]\,e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho.$$

En introduisant la fonction de Laplace [voir (2.61)] on trouve la densité de probabilité cherchée

$$W_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}+$$

$$+\frac{\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)}{\sigma\sqrt{2\pi}}F\left[\frac{\alpha}{\sigma}\cos(\varphi-\varphi_0)\right]e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\sin^2(\varphi-\varphi_0)}, \qquad (3.81)$$

$$|\varphi-\varphi_0|\leqslant\pi.$$

Sur la figure 3.7 on peut trouver une famille de densités de probabilité de la phase d'un vecteur, calculées à l'aide de la formule (3.81). Comme le montre (3.81) et la figure 3.7, la densité de probabilité $W_1(\varphi)$ est une fonction paire de $\varphi-\varphi_0$, c'est-à-dire qu'il lui correspond une courbe de distribution symétrique. Pour $\alpha=0$, $\varphi_0=0$,

c'est-à-dire pour des moyennes nulles des composantes d'un vecteur, on a

$$W_1(\varphi)=\frac{1}{2\pi}, \quad |\varphi|\leqslant\pi, \tag{3.82}$$

ce qui correspond à une phase uniformément distribuée. La densité de probabilité pour $\varphi = \varphi_0$ augmente avec $\frac{\alpha}{\sigma}$

$$W_1(\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}+\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}}F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\geqslant\frac{1}{2\pi}. \tag{3.83}$$

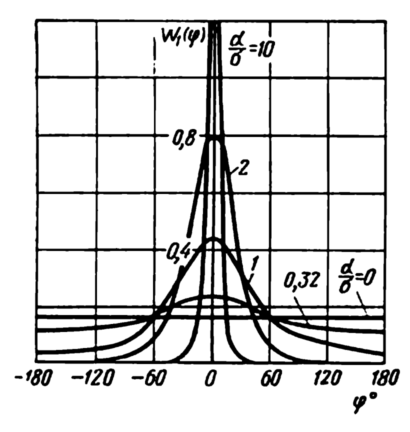


Fig. 3.7. Densité de probabilité de la phase d'un vecteur

Aux limites de l'intervalle $(\varphi_0 - \pi,\ \varphi_0 + \pi)$ la densité de probabilité est inférieure à $\frac{1}{2\pi}$, et tend vers zéro lorsque $\frac{\alpha}{\sigma}$ augmente :

$$W_1(\varphi_0\pm\pi)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}-\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[1-F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\right]\leqslant\frac{1}{2\pi}. \tag{3.84}$$

Pour $\varphi = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2}$ la densité de probabilité est égale à

$$W_1\left(\varphi_0\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.85}$$

Si $\frac{\alpha}{\sigma}\ll 1$, en développant le second membre de (3.81) suivant les puissances de $\frac{\alpha}{\sigma}$ et en arrêtant ce développement aux infiniment petits du second ordre, on obtient

$$W_1(\varphi)\approx\frac{1}{2\pi}+\frac{\alpha}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\cos(\varphi-\varphi_0)+\frac{\alpha^2}{4\pi\sigma^2}\cos 2(\varphi-\varphi_0). \tag{3.86}$$

Ainsi, aux termes d'ordre $\frac{\alpha^2}{\sigma^2}$ près, la densité de probabilité de la phase d'un vecteur est une cosinusoïde d'amplitude $\frac{\alpha}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$ déplacée de $\frac{1}{2\pi}$ suivant l'axe des ordonnées.

Si $\frac{\alpha}{\sigma}\cos(\varphi-\varphi_0) > 3$, (3.81)' donne

$$W_1(\varphi) \sim \frac{\alpha\cos(\varphi-\varphi_0)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)}{2\sigma^2}}. \tag{3.87}$$

Pour des faibles valeurs de $\varphi-\varphi_0$ on a

$$W_1(\varphi) \sim \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2(\varphi-\varphi_0)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.88}$$

c'est-à-dire que la phase suit une distribution normale de moyenne φ_0 et de variance $\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2$.

Calculons maintenant les caractéristiques numériques (moments centrés de la distribution) de la phase. On a

$$M_k\{\vartheta\} = \int_{\varphi_0-\pi}^{\varphi_0+\pi} (\varphi-\varphi_0)^k W_1(\varphi)\,d\varphi. \tag{3.89}$$

Il est évident qu'en vertu de la symétrie de la distribution tous les moments d'ordres impairs sont nuls.

Pour calculer l'intégrale il faut préalablement écrire $W_1(\varphi)$ sous la forme d'une série de Fourier *) sur l'intervalle $(\varphi_0-\pi, \varphi_0+\pi)$

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(\varphi-\varphi_0), \tag{3.90}$$

où

$$a_n = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^n}{\pi n!\sqrt{2^n}}\, {}_1F_1\left(\frac{n}{2},\ n+1,\ -\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3.91}$$

En substituant (3.90) dans (3.89) on obtient

$$M_{2r} = \frac{\pi^{2r}}{2r+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} x^{2r}\cos nx\,dx. \tag{3.92}$$

*) Il suffit pour cela de développer en série de Fourier la fonction sous l'intégrale dans (3.80), ceci en utilisant l'égalité bien connue de la théorie des fonctions de Bessel

$$e^{\lambda\cos x} = I_0(\lambda) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(\lambda)\cos mx$$

et la formule (7) de l'annexe V.

La variance de la phase est égale à

$$M_2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n^2}. \qquad (3.93)$$

Si $\frac{\alpha}{\sigma} \ll 1$ on a

$$M_2 \approx \frac{\pi^2}{3}-4\pi a_1 \approx \frac{\pi^2}{3}-\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{2\pi},$$

et comme nous l'avons déjà mentionné, pour $\frac{\alpha}{\sigma} \gg 1$ on a

$$M_2 \sim \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Considérons également la fonction de répartition

$$P\{|\vartheta-\varphi_0|\leqslant\varphi\}=\int_{\varphi_0-\varphi}^{\varphi_0+\varphi} W_1(\varphi)\,d\varphi=2\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\varphi} W_1(\varphi)\,d\varphi, \qquad (3.94)$$

où $W_1(\varphi)$ se détermine par la formule (3.81).

Introduisons la notation simplifiée

$$P(\varphi)=P\{|\vartheta-\varphi_0|\leqslant\varphi\}. \qquad (3.95)$$

En substituant (3.81) dans (3.94) on obtient

$$P(\varphi)=\frac{\varphi}{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}+\frac{2\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varphi}\cos\varphi F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\cos\varphi\right)e^{-\frac{\alpha^2\sin^2\varphi}{2\sigma^2}}\,d\varphi. \qquad (3.96)$$

L'intégrale dans (3.96) a été étudiée dans [5, annexe IX]. En utilisant les formules (9) et (12) obtenues dans cette annexe on a

$$P(\varphi)=F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+$$

$$+2V\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi,\ \frac{\alpha}{\sigma}\cos\varphi\right),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, \qquad (3.97)$$

$$P(\varphi)=F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-$$

$$-2V\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi,\ \frac{\alpha}{\sigma}\cos\varphi\right),\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi. \qquad (3.97')$$

La fonction $V(h, q)$ a été tabulée par Nicholson *). Ces tables ont été utilisées pour construire la famille des courbes cumulatives

*) Voir Biometrica, v. 38, 1943, et également [5] où ces tables sont reproduites.

$P(\varphi)$ de la phase (fig. 3.8). Notons que la formule (3.97) donne directement l'expression

$$P(\pi - \varphi) + P(\varphi) = 2F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi\right). \tag{3.98}$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on trouve

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \tag{3.99}$$

La fonction $V(h, q)$ peut être écrite sous la forme asymptotique suivante (voir [5]):

$$2V\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi, \frac{\alpha}{\sigma}\cos\varphi\right) \sim F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi\right) - \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi} + \\ + \frac{\sigma^2 \operatorname{tg}\varphi}{\alpha^2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\frac{1+2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right). \tag{3.100}$$

En substituant (3.100) dans (3.97) on obtient la formule asymptotique suivante:

$$P(\varphi) \sim 2F\left(\frac{\alpha}{\sigma}\sin\varphi\right) - 1 + \\ + \frac{\sigma^2 \operatorname{tg}\varphi}{\alpha^2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\frac{1+2\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right), \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3.101}$$

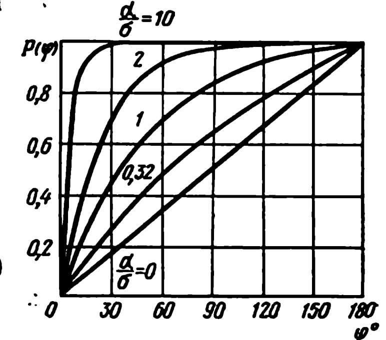


Fig. 3.8. Fonction de répartition de la phase d'un vecteur

Si φ est petit et $\frac{\alpha}{\sigma} > 3$, on peut négliger la correction à la distribution normale dans (3.101).

Si $\frac{\alpha}{\sigma} \ll 1$, compte tenu de (3.86) on obtient

$$P(\varphi) \approx \frac{\varphi}{\pi} + \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sin\varphi + \frac{\alpha^2}{4\pi\sigma^2}\sin 2\varphi. \tag{3.102}$$

3.3. MÉTHODE DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

3.3.1. Fonction caractéristique. Ses propriétés. La transformation fonctionnelle de la variable aléatoire ξ

$$\eta = e^{iv\xi}, \tag{3.103}$$

où v est un paramètre réel arbitraire, joue un rôle important dans les applications.

On appelle *fonction caractéristique* de la variable aléatoire ξ la valeur moyenne de la variable aléatoire $e^{iv\xi}$. En vertu de la formule (3.42) la fonction caractéristique $\Theta_1(v)$ de la variable aléatoire ξ est

$$\Theta_1(v) = m_1\{e^{iv\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, e^{ivx}\, dx \tag{3.104}$$

ou

$$\Theta_1(v) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \cos vx\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \sin vx\, dx, \tag{3.104'}$$

où $w_1(x)$ est la densité de probabilité de ξ.

La relation (3.104) montre que la fonction caractéristique $\Theta_1(v)$ et la densité de probabilité $w_1(x)$ sont liées entre elles par une double *transformation de Fourier*. C'est pourquoi si l'on connaît la fonction caractéristique d'une variable aléatoire, on peut trouver sa densité de probabilité par transformation inverse de Fourier de la fonction caractéristique, soit :

$$w_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(v)\, e^{-ivx}\, dv. \tag{3.105}$$

En utilisant la représentation (2.14) de la densité de probabilité $w_1(x)$ comme une somme de fonctions delta, on peut étendre la formule (3.104) aux variables aléatoires discrètes

$$\Theta_1(v) = \sum_k p_k e^{ivx_k}. \tag{3.106}$$

Nous allons maintenant énoncer les propriétés essentielles des fonctions caractéristiques.

Par définition on a

$$|\Theta_1(v)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, e^{ivx}\, dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(x)\, e^{ivx}|\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, dx = 1,$$

car $|e^{ivx}| = 1$. Par conséquent, l'intégrale (3.104) et nécessairement la somme (3.106) sont convergentes pour toutes les valeurs réelles de v. Ainsi, la fonction caractéristique peut être définie pour toute variable aléatoire.

On a également

$$\Theta_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, dx = 1$$

et

$$\Theta(-v) = \overline{\Theta(v)},$$

c'est-à-dire que $\Theta(v)$ et $\Theta(-v)$ sont des grandeurs complexes conjuguées. On peut montrer que pour $v \to \pm\infty$ la fonction caractéristique $\Theta_1(v)$ tend vers zéro [4].

Notons que toute fonction $\Theta_1(v)$ ne peut pas être une fonction caractéristique. Les propriétés mentionnées ne sont que des conditions *nécessaires.*

En vertu de (3.104') la fonction caractéristique des distributions symétriques est

$$\Theta_1(v) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x) \cos vx\, dx,$$

c'est-à-dire qu'elle est une fonction paire de la variable v. Inversement, si la fonction caractéristique ne prend que des valeurs réelles, elle est paire et la distribution correspondante est symétrique.

Si $\Theta_{1\xi}(v)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire ξ, la fonction caractéristique $\Theta_{1\eta}(v)$ de la variable aléatoire η, obtenue par la transformation linéaire $\eta = a\xi + b$, est égale à

$$\Theta_{1\eta}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv(ax+b)} w_{1\xi}(x)\, dx = \Theta_{1\xi}(av)\, e^{ibv}. \qquad (3.107)$$

Nous allons écrire sous forme explicite la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale de paramètres a, σ. En vertu de (3.104) on a

$$\Theta_1(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

En introduisant la nouvelle notation $z = \frac{x-a}{\sigma} - i\sigma v$, l'exposant de l'exponentielle de la fonction sous l'intégrale se trouve complété jusqu'à un carré complet. On a alors

$$\Theta_1(v) = e^{iav - \frac{\sigma^2 v^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - i\sigma v}^{\infty - i\sigma v} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Comme pour tout α réel on a

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi},$$

on trouve pour l'expression cherchée de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale

$$\Theta_1(v) = e^{iav - \frac{\sigma^2 v^2}{2}}. \quad (3.108)$$

3.3.2. Calcul des moments de la distribution. L'utilisation de la fonction caractéristique simplifie le calcul des moments de la distribution. Si le moment non centré d'ordre k de la variable aléatoire ξ existe, la fonction caractéristique de cette variable aléatoire admet une dérivée d'ordre k:

$$\frac{d^k\Theta_1(v)}{dv^k} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k w_1(x) e^{ivx} dx,$$

d'où

$$\left(\frac{d^k\Theta_1(v)}{dv^k}\right)_{v=0} = i^k m_k(\xi). \quad (3.109)$$

Par conséquent, les moments non centrés sont égaux aux valeurs des dérivées de la fonction caractéristique pour $v = 0$ au facteur i^k près.

La relation (3.109) pour le cas particulier $k = 1$ donne l'expression de la valeur moyenne d'une variable aléatoire

$$m_1\{\xi\} = -i\Theta_1'(0). \quad (3.110)$$

Si les moments d'ordre quelconque existent, en vertu de (3.109) la fonction caractéristique peut s'écrire sous la forme d'une série de Maclaurin

$$\Theta_1(v) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{k!}(iv)^k. \quad (3.111)$$

Ainsi, la dérivabilité de la fonction caractéristique au voisinage du point $v = 0$ est liée au comportement asymptotique de la densité de probabilité $w_1(x)$ pour des grandes valeurs de x ce qui détermine l'existence des moments de la distribution.

Les moments centrés d'une distribution sont liés par une relation simple aux dérivées du logarithme de la fonction caractéristique $\psi(v) = \ln \Theta_1(v)$ appelé *fonction génératrice des cumulants*, ou seconde fonction caractéristique.

En développant la fonction génératrice des cumulants en série de Maclaurin (supposant que cette série existe) on obtient d'une manière analogue à (3.111)

$$\psi(v)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varkappa_k}{k!}(iv)^k. \qquad (3.112)$$

Les coefficients $\varkappa_k$ de cette série sont appelés *cumulants* (ou semi-invariants) de la distribution, et s'expriment comme suit en fonction des moments centrés:

$$\varkappa_1=m_1,\quad \varkappa_2=M_2,\quad \varkappa_3=M_3,$$
$$\varkappa_4=M_4-3M_2^2,\quad \varkappa_5=M_5-10M_3M_2,\ \ldots$$

D'où les expressions des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

$$\mathrm{k}=\frac{\varkappa_3}{\sqrt{\varkappa_2^3}},\quad \gamma=\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}.$$

Comme le montrent les formules, connaissant les semi-invariants des quatre premiers ordres, on peut facilement trouver la moyenne, la variance, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

Pour une variable aléatoire normale la fonction génératrice des cumulants est [voir (3.108)]

$$\psi(v)=iav-\frac{\sigma^2}{2}v^2=aiv+\frac{\sigma^2}{2!}(iv)^2.$$

Ainsi, pour la distribution normale on a

$$\varkappa_1=a,\quad \varkappa_2=\sigma^2,\quad \varkappa_j=0,\quad j\geqslant 3. \qquad (3.113)$$

Nous allons trouver l'expression générale pour les moments centrés de la distribution normale. En vertu de (3.108) et (3.109) et compte tenu du fait que les moments centrés coïncident avec les moments non centrés lorsque la moyenne est nulle ($a=0$), on trouve pour les moments centrés de la distribution normale

$$M_k=\frac{1}{i^k}\left(\frac{d^k}{dv^k}e^{-\frac{\sigma^2v^2}{2}}\right)_{v=0}.$$

Exprimant les dérivées de la fonction $e^{-\frac{\sigma^2v^2}{2}}$ en fonction des polynômes d'Hermite on obtient

$$M_k=i^k\sigma^kH_k(0)=\begin{cases}\sigma^{2n}(2n-1)!!, & k=2n,\\ 0, & k=2n-1,\end{cases} \qquad (3.114)$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

[voir les formules (4) et (8) dans l'annexe IV].

3.3.3. Calcul des lois de distribution des fonctions des arguments aléatoires. En utilisant la formule (3.42) il est facile de trouver l'expression de la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\eta = f(\xi)$ connaissant la densité de probabilité $w_1(x)$ de la variable aléatoire ξ

$$\Theta_1(v) = m_1\{e^{ivf(\xi)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x)\, e^{ivf(x)}\, dx. \tag{3.115}$$

La formule (3.115) peut être étendue au cas général où $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$$\Theta_1(v) = m_1\{e^{ivf(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{ivf(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{3.116}$$

$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant la densité de probabilité des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Par transformation inverse de Fourier on trouve à partir de (3.116) la densité de probabilité

$$W_1(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(v)\, e^{-ivy}\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times e^{iv[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-y]}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dv. \tag{3.116'}$$

Changeant l'ordre d'intégration et introduisant la fonction delta

$$\delta[f(x_1, \ldots, x_n) - y] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv[f(x_1, \ldots, x_n)-y]}\, dv,$$

on obtient

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \delta[f(x_1, \ldots, x_n) - y] \times w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{3.117}$$

Les formules (3.6) et (3.27) sont des cas particuliers de (3.117) pour $n = 1$ et $n = 2$ respectivement. En vertu de (3.117) la distribution conjointe des variables aléatoires $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n$ est [comparer avec (3.41)]

$$W_{n+1}(y, x_1, \ldots, x_n) = \delta[f(x_1, \ldots, x_n) - y] \times w_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.118}$$

3.3.4. Fonction caractéristique multidimensionnelle. La méthode des fonctions caractéristiques peut être appliquée à un ensemble de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. On appelle fonction caractéristique d'un ensemble de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ la valeur moyenne de la variable aléatoire $e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2+\ldots+v_n\xi_n)}$ où $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des variables réelles. Si $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction à n dimensions d'un ensemble de variables aléatoires, la fonction caractéristique à n dimensions est

$$\Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = m_1\{e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2+\ldots+v_n\xi_n)}\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_nx_n)} \times \\ \times w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n. \quad (3.119)$$

Par conséquent, la fonction caractéristique à n dimensions est une transformation d'ordre n de la densité de probabilité à n dimensions. Inversement, la densité de probabilité d'un ensemble de n variables aléatoires s'obtient à partir de leur fonction caractéristique par transformation de Fourier inverse d'ordre n:

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_n(v_1, v_2, \ldots v_n) \times \\ \times e^{-i(v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_nx_n)}\,dv_1dv_2\ldots dv_n. \quad (3.120)$$

Par définition on a

$$|\Theta_n(v_1, \ldots, v_n)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} |w_n(x_1, \ldots, x_n) \times \\ \times e^{i(v_1x_1+\ldots+v_nx_n)}|\,dx_1\ldots dx_n = 1,$$

c'est-à-dire que l'intégrale multiple dans (3.119) est convergente pour toutes les valeurs réelles $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

La fonction caractéristique $\Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ d'un ensemble de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ permet de trouver facilement la fonction caractéristique d'un ensemble quelconque de $k < n$ de ces variables aléatoires

$$\Theta_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0).$$

Si les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont mutuellement indépendantes, on a $w_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} w_{1\xi_k}(x_k)$, et les variables dans (3.119) se séparent; la fonction caractéristique devient alors égale au produit des fonctions caractéristiques de chacune des varia-

bles aléatoires

$$\Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_{1\xi_k}(v_k). \tag{3.121}$$

Les relations (3.121) et (2.51) donnent la condition nécessaire et suffisante pour que les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ soient mutuellement indépendantes. Par analogie avec (2.51), on peut écrire à l'aide des fonctions caractéristiques la condition pour que deux variables aléatoires dans l'espace à n dimensions soient indépendantes

$$\Theta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \Theta_{2n}(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n) = \\ = \Theta_n(v_1, \ldots, v_n)\, \Theta_n(u_1, \ldots, u_n). \tag{3.121'}$$

Nous allons utiliser un cas particulier de (3.119) quand $n = 2$ afin de démontrer que la non-corrélativité de deux variables aléatoires quelconques n'implique pas forcément leur indépendance. En effet, on a d'une part

$$\Theta_2(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2)\, e^{i(x_1v_1+x_2v_2)}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{n+k}}{n!\,k!} v_1^n v_2^k \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^n x_2^k w_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} m_1\{\xi_1^n \xi_2^k\} \frac{i^{n+k}}{n!\,k!} v_1^n v_2^k,$$

et d'autre part

$$\Theta_{1\xi_1}(v_1)\, \Theta_{1\xi_2}(v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi_1}(x_1)\, e^{ix_1v_1}\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\xi_2}(x_2)\, e^{ix_2v_2}\, dx_2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} m_1\{\xi_1^n\}\, m_1\{\xi_2^k\} \frac{i^{n+k}}{n!\,k!} v_1^n v_2^k.$$

En utilisant (3.121) on trouve que pour des variables aléatoires indépendantes, quels que soient les nombres entiers positifs n et k, on a

$$m_1\{\xi_1^n \xi_2^k\} = m_1\{\xi_1^n\}\, m_1\{\xi_2^k\},$$

alors que la non-corrélativité entraîne seulement que $m_1\{\xi_1\xi_2\} = m_1\{\xi_1\}\, m_1\{\xi_2\}$ [comparer avec (3.49)]. Ceci permet de justifier le terme « indépendance linéaire » qui est un synonyme de non-corrélativité.

Les fonctions caractéristiques multidimensionnelles peuvent être utilisées pour calculer les moments mixtes de la distribution d'un ensemble de variables aléatoires. Si la dérivée

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial v_1^{k_1}\,\partial v_2^{k_2}\ldots\partial v_n^{k_n}}\left[\Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)\right] =$$
$$= i^{k_1+k_2+\ldots+k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}\times$$
$$\times w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{i(v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_nx_n)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

existe, on a

$$m_{k_1k_2\ldots k_n}\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} = i^{-(k_1+k_2+\ldots+k_n)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial v_1^{k_1}\,\partial v_2^{k_2}\ldots\partial v_n^{k_n}}\Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)\right\}_{v_1=\ldots=v_n=0}. \quad (3.122)$$

Il est évident que (3.109) est un cas particulier de (3.122).

Enfin nous allons donner, sans démonstration *), l'expression de la fonction caractéristique d'un ensemble formé par un nombre arbitraire de variables aléatoires dépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ distribuées suivant une loi normale à n dimensions [voir (2.55)]

$$\Theta_n(v_1, v_2, \ldots, v_n) =$$
$$= \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} a_kv_k - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_l\sigma_kr_{lk}v_lv_k\right\}, \quad (3.123)$$

où a_k, σ_k^2 sont respectivement la moyenne et la variance de la variable aléatoire ξ_k, et r_{lk} le coefficient de corrélation des variables aléatoires ξ_l et ξ_k ($r_{lk} = r_{kl}$, $r_{ll} = 1$).

Utilisant la représentation matricielle de la forme quadratique on peut écrire (3.123) sous la forme suivante:

$$\Theta_n(\mathbf{V}) = e^{i\mathbf{a}'\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{V}'\mathbf{M}\mathbf{V}}, \quad (3.124)$$

où **a** est la matrice colonne des valeurs moyennes, **M** la matrice des variances-covariances des variables aléatoires, le signe d'accent désigne une matrice transposée (voir § 2.2.1).

3.3.5. Distribution d'une somme de variables aléatoires. Posant dans (3.119) $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v$ on obtient l'expression de la fonction caractéristique de la somme $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ de variables aléatoires dépendantes

$$\Theta_1(v) = m_1\{e^{iv(\xi_1+\xi_2+\ldots\xi_n)}\} = \Theta_n(v, v, \ldots, v \quad (3.125)$$

*) Dans l'annexe II on trouvera la démonstration de la formule (3.123) pour $n = 2$. Dans (3.123) la forme quadratique est *définie positive*.

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont indépendantes, on obtient à partir de (3.121) et (3.125) *)

$$\Theta_1(v) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_{1\xi_k}(v), \qquad (3.126)$$

où $\Theta_{1\xi_k}(v)$ est la fonction caractéristique de ξ_k.

Ainsi, *la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des fonctions caractéristiques des composantes.*

Si toutes les composantes obéissent à une même loi de distribution on a

$$\Theta_{1\xi_k}(v) = \Theta_1(v),$$

et

$$\Theta_1(v) = \Theta_1^n(v). \qquad (3.127)$$

Cette propriété des fonctions caractéristiques en fait un instrument utile lors de l'étude des sommes de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors que pour obtenir la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes on doit prendre la convolution des densités de probabilité des composantes [voir (3.33)], la fonction caractéristique de cette somme s'obtient par une simple multiplication des fonctions caractéristiques des composantes.

Remarquons qu'en vertu de (3.126) la fonction caractéristique de la *différence* de deux variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant une même loi, est

$$\Theta_1(v)\,\Theta_1(-v) = |\,\Theta_1(v)\,|^2,$$

donc la distribution de cette différence est toujours symétrique.

Considérons la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune d'elles suivant une loi normale de paramètres a_k et σ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). En vertu de (3.126) la fonction caractéristique de cette somme est

$$\Theta_1(v) = \prod_{k=1}^{n} e^{ia_k v - \frac{\sigma_k^2 v^2}{2}},$$

ou

$$\Theta_1(v) = \exp\left\{ iv \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{v^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \right\}.$$

*) En général, l'inverse n'est pas vrai. On peut donner des exemples où la fonction caractéristique d'une somme est égale au produit des fonctions caractéristiques des composantes, celles-ci étant dépendantes (voir [6], page 277).

Introduisons les notations

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2. \tag{3.128}$$

On a alors

$$\Theta_1(v) = e^{iav - \frac{\sigma^2 v^2}{2}}. \tag{3.129}$$

Comparant (3.129) et (3.108) on peut noter que la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes normales coïncide avec la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale. Sa moyenne et sa variance sont données par la formule (3.128).

Ainsi, la somme d'un nombre quelconque de variables aléatoires normales est également normale, la moyenne de cette somme étant égale à la somme des moyennes, et la variance de la somme à la somme des variances des composantes. Ces propriétés des moyennes et des variances sont des cas particuliers de (3.47) et (3.54). La méthode des fonctions caractéristiques permet d'établir que la somme d'un nombre quelconque de variables aléatoires indépendantes normalement distribuées est également *normalement* distribuée.

Appliquons maintenant la méthode des fonctions caractéristiques à la recherche de la densité de probabilité de la somme algébrique $\xi_1 \pm \xi_2$ de deux variables aléatoires *dépendantes* normalement distribuées. A cette fin utilisant (3.123) écrivons préalablement la fonction caractéristique bidimensionnelle de ces variables aléatoires

$$\Theta_2(v_1, v_2) = \exp\{i(a_1 v_1 + a_2 v_2) - \\ - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 v_1^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 v_1 v_2 + \sigma_2^2 v_2^2)\}. \tag{3.130}$$

Pour trouver la fonction caractéristique $\Theta_1(v)$ de la somme algébrique $\xi_1 \pm \xi_2$ nous allons utiliser (3.125). Ecrivons

$$\Theta_1(v) = \Theta_2(v, \pm v) = \\ = \exp\left\{iv(a_1 \pm a_2) - \frac{v^2}{2}(\sigma_1^2 \pm 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\right\}. \tag{3.131}$$

Comparant (3.131) et (3.108) on voit que la fonction obtenue $\Theta_1(v)$ est la fonction caractéristique correspondant à la loi normale de moyenne $a_1 \pm a_2$ et de variance $\sigma_1^2 \pm 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$.

Ainsi, la somme algébrique de deux variables aléatoires normalement distribuées est également normalement distribuée, la moyenne de cette somme est égale à la somme algébrique des moyennes des composantes, et la variance σ^2 vaut

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 \pm 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Ces propriétés des valeurs moyennes et des variances sont des cas particuliers de (3.46) et (3.52), mais ce qui est nouveau c'est que la

somme algébrique de deux variables aléatoires normales *dépendantes* est *normalement distribuée.*

Le résultat obtenu peut être étendu à une somme formée d'un nombre quelconque de variables aléatoires dépendantes normalement distribuées. Utilisant (3.123) et (3.125) on peut trouver la fonction caractéristique de cette somme, soit

$$\Theta_1(v)=\Theta_n(v,\ \ldots,\ v)=$$
$$=\exp\left\{iv\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{v^2}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_l\sigma_k r_{lk}\right\}. \tag{3.132}$$

En vertu de (3.132) la somme d'un nombre quelconque de variables aléatoires normales est normalement distribuée, la moyenne étant égale à la somme des moyennes, la variance étant

$$\sigma^2=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_l\sigma_k r_{lk}. \tag{3.133}$$

3.3.6. Somme d'un nombre quelconque de variables aléatoires. Soit la somme

$$\zeta_\nu=\sum_{k=1}^{\nu}\xi_k, \tag{3.134}$$

où ν est une variable aléatoire discrète, indépendante des variables aléatoires ξ_k.

La fonction de répartition de la variable aléatoire ζ_ν peut être calculée à l'aide de la formule des probabilités totales

$$F_{\zeta_\nu}(x)=P\{\zeta_\nu\leqslant x\}=\sum_{r=1}^{\infty}P\{\nu=r\}\,P\{\zeta_r\leqslant x\}$$

ou

$$F_{\zeta_\nu}(x)=\sum_{r=1}^{\infty}p_rF_{\zeta_r}(x), \tag{3.135}$$

avec

$$p_r=P\{\nu=r\}. \tag{3.136}$$

En vertu de (3.135) la fonction caractéristique de ζ_ν est

$$\Theta_{\zeta_\nu}(v)=\sum_{r=1}^{\infty}p_r\Theta_{\zeta_r}(v). \tag{3.137}$$

Si ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, dont les fonctions caractéristiques sont respective-

ment $\Theta_{1\xi_k}(v)$, on obtient à partir de (3.126)

$$\Theta_{\zeta_\nu}(v)=\sum_{r=1}^{\infty}p_r\prod_{k=1}^{r}\Theta_{1\xi_k}(v). \tag{3.138}$$

En dérivant les deux membres par rapport à v, posant ensuite $v=0$ et compte tenu de ce que $\Theta_{1\xi_k}(0)=1$, on a

$$\Theta'_{\zeta_\nu}(0)=\sum_{r=1}^{\infty}p_r\sum_{k=1}^{r}\Theta'_{1\xi_k}(0),$$

d'où [voir (3.110)] la formule donnant la valeur moyenne d'un nombre arbitraire de variables aléatoires indépendantes

$$m_1\{\zeta_\nu\}=\sum_{r=1}^{\infty}p_r\sum_{k=1}^{r}m_1\{\xi_k\}. \tag{3.139}$$

Si les termes de la somme ont même moyenne égale à $m_1\{\xi_k\}=$ $=a$, en vertu de (3.139) on a

$$m_1\{\zeta_\nu\}=a\sum_{r=1}^{\infty}rp_r=am_1\{\nu\}. \tag{3.140}$$

Calculons encore la variance de la somme d'un nombre quelconque de variables aléatoires indépendantes lorsque les termes de la somme suivent une même loi de distribution. Dans ce cas en vertu de (3.138) on a

$$\Theta_{\zeta_\nu}(v)=\sum_{r=1}^{\infty}p_r\Theta_1^r(v), \tag{3.141}$$

où $\Theta_1(v)$ est la fonction caractéristique de l'un quelconque des termes de la somme. Dérivant les deux membres de (3.141) par rapport à v et posant ensuite $v=0$, on a

$$\Theta''_{\zeta_\nu}(0)=\sum_{r=1}^{\infty}rp_r\{\Theta''_1(0)+(r-1)[\Theta'_1(0)]^2\}.$$

Compte tenu de (3.109) on obtient

$$m_2\{\zeta_\nu\}=m_2\{\xi_k\}\,m_1\{\nu\}+m_1^2\{\xi_k\}\,[m_2\{\nu\}-m_1\{\nu\}]=$$
$$=M_2\{\xi_k\}\,m_1\{\nu\}+m_2\{\nu\}\,m_1^2\{\xi_k\}.$$

En introduisant les notations

$$a=m_1\{\xi_k\},\quad \sigma^2=M_2\{\xi_k\}$$

et compte tenu de (3.140), on obtient finalement la formule suivante:

$$M_2\{\zeta_\nu\}=\sigma^2m_1\{\nu\}+a^2M_2\{\nu\}. \tag{3.142}$$

3.4. CONVERGENCE VERS LA LOI NORMALE

3.4.1. Théorème. Dans le § 1.2 nous avons considéré le schéma des épreuves indépendantes où le nombre k de réalisations de l'événement A pour n épreuves pouvait être considéré comme la somme $\sum_{r=1}^{n} \xi_r$ de variables aléatoires discrètes élémentaires, chacune ne pouvant prendre que deux valeurs: l'unité avec la probabilité $p = P\{A\}$ et zéro avec la probabilité $q = P\{\bar{A}\} = 1 - p$. Conformément à la formule asymptotique de Moivre-Laplace, lorsque le nombre n de termes augmente indéfiniment, la distribution de la somme des écarts des variables aléatoires discrètes *indépendantes* de ce type, divisée par la racine carrée de la somme des variances des composantes, tend vers une loi normale.

D'autre part, nous avons mentionné plus haut (voir § 3.3.5) que la distribution de la somme d'un nombre arbitraire de variables aléatoires normales liées est toujours normale. L'étude de la distribution du χ^2 (voir problème 3.15) et de la distribution de la somme de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées (voir problème 3.17) révèle une tendance vers la loi normale au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de degrés de liberté et du nombre de termes de la somme.

On peut alors se demander si la tendance asymptotique vers la loi normale de la somme de variables aléatoires indépendantes peut être étendue à une classe plus large de variables aléatoires, et quelles sont les conditions à imposer aux distributions des termes pour que cette tendance puisse se manifester. Le *théorème limite central de la théorie des probabilités* permet de répondre à cette question. L'importance de ce théorème pour la science et la technique (radiotechnique y compris) est liée au fait qu'en pratique on a souvent besoin d'étudier des effets dus à un grand nombre de facteurs aléatoires indépendants.

Nous allons commencer par donner la formulation du théorème central limite sous sa forme la plus simple. Si les variables aléatoires indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ suivent une *même* loi de distribution de variance σ^2 finie différente de zéro, pour $n \to \infty$ on a

$$P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - m_1\{\xi_k\}) \leqslant x\right\} \sim F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.143)$$

A. Liapounov a montré que la tendance vers la *loi normale* de la somme de variables aléatoires a lieu sous des conditions plus générales. Il a démontré le théorème suivant. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes et $a_k = m_1\{\xi_k\}$, $\sigma_k^2 =$

$= M_2\{\xi_k\}$. Si pour $\delta > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} m_1\{|\xi_k - a_k|^{2+\delta}\}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0, \tag{3.144}$$

la distribution de la somme normée de ces variables aléatoires est asymptotiquement normale.

Sous certaines conditions le théorème central limite peut être également étendu à une somme de variables aléatoires *liées* (voir par exemple [6 § 28] et [7]). Cependant il ne faut pas oublier que la distribution de la somme de variables aléatoires *indépendantes ne tend pas toujours* vers la loi normale. En pratique, il peut y avoir des cas où la variance ou même la moyenne ne sont pas finies. Supposons par exemple que nous étudiions la distribution d'une somme de variables aléatoires dont chacune est égale à $\eta_k = \xi_k^{-2}$, où ξ_k est distribuée suivant une loi de Rayleigh. Comme la densité de probabilité de la variable aléatoire η_k est égale à

$$W_1(y) = \frac{1}{2\sigma^2 y^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 y}},$$

sa *moyenne n'est pas bornée*, car l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2 y}} \frac{dy}{y}$$

est divergente. La distribution de Cauchy (voir problème 2.3) est un autre exemple de distribution ne possédant ni valeur moyenne, ni variance (ni, bien sûr, moments d'ordre plus élevé).

Les conditions générales (nécessaires et suffisantes) devant être remplies pour que la densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes tende vers la loi normale ont été trouvées récemment [3]. Le problème s'est aussi posé de trouver les lois qui, outre la loi normale, peuvent être des lois limites pour une somme de variables aléatoires indépendantes. Il s'est avéré que les distributions d'une classe importante de sommes normées de variables aléatoires indépendantes (y compris celles qui n'ont pas de caractéristiques numériques finies) tendent vers des *lois* dites *stables*, différentes de la loi normale. Ces questions sont exposées en détail dans [3], [6].

3.4.2. Démonstration du théorème. Limitons-nous au cas de termes suivant une même loi de distribution. Comme nous l'avons déjà noté, pour étudier une somme de variables aléatoires indépendantes,

le plus commode et le plus simple est de faire appel aux fonctions caractéristiques.

Considérons la somme $\sum_{r=1}^{n} \xi_r$ de variables aléatoires indépendantes, les termes de cette somme ayant une même distribution de moyenne et de variance égales respectivement à a et σ^2. En vertu de (3.47) et (3.54) la moyenne et la variance de cette somme est

$$m_1 \{\sum_{r=1}^{n} \xi_r\} = na, \quad M_2 \{\sum_{r=1}^{n} \xi_r\} = n\sigma^2. \qquad (3.145)$$

Nous allons chercher la densité de probabilité de la somme normée des écarts, c'est-à-dire de la variable aléatoire

$$\zeta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{n} (\xi_r - a). \qquad (3.146)$$

Il est bon à cette fin de trouver la fonction caractéristique de chacun des termes de la somme (3.146) et d'utiliser ensuite la règle selon laquelle la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des fonctions caractéristiques des termes.

Désignons par $\Theta_1(v)$ la fonction caractéristique de l'écart de la valeur moyenne de l'une quelconque des variables aléatoires ξ_r. On a alors [voir (3.111)]

$$\Theta_1(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k M_k}{k!} v^k, \qquad (3.147)$$

où M_k sont les moments centrés de ces variables aléatoires. Le développement (3.147) peut être obtenu à partir de (3.111) en remplaçant m_k par M_k, car ici $\Theta_1(v)$ est la fonction caractéristique de l'écart de la variable aléatoire. La fonction caractéristique du terme $\frac{\xi_r - a}{\sigma\sqrt{n}}$ est, en vertu de (3.107), égale à

$$\Theta_1\left(\frac{v}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k M_k}{\sigma^k n^{k/2} k!} v^k. \qquad (3.148)$$

La fonction caractéristique cherchée de la somme ζ_n est, en vertu de (3.127), égale à

$$\Theta_{1\zeta_n}(v) = \Theta_1^n\left(\frac{v}{\sigma\sqrt{n}}\right). \qquad (3.149)$$

Substituant l'expression pour $\Theta_1\left(\frac{v}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ donnée par (3.148) dans (3.149) et compte tenu que $M_1 = 0$ $M_2 = \sigma^2$, on obtient

$$\Theta_{1\zeta_n}(v) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k M_k v^k}{\sigma^k n^{k/2} k!}\right)^n = \left(1 - \frac{v^2}{2n} - \frac{iM_3 v^3}{6\sigma^3 n^{3/2}} + \frac{M_4 v^4}{24\sigma^4 n^2} + \ldots\right)^n. \tag{3.150}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on obtient une forme indéterminée du type 1^∞. Pour lever cette indétermination considérons $\ln \Theta_{1\zeta_n}(v)$. En vertu de (3.150) on a

$$\ln \Theta_{1\zeta_n}(v) = n \ln \left(1 - \frac{v^2}{2n} - \frac{iM_3 v^3}{6\sigma^3 n^{3/2}} + \frac{M_4 v^4}{24\sigma^4 n^2} + \ldots\right).$$

En développant ce logarithme en série on obtient

$$\ln \Theta_{1\zeta_n}(v) = -\frac{v^2}{2} - \frac{iM_3 v^3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} + \frac{M_4 v^4}{24\sigma^4 n} - \frac{v^4}{8n} + \ldots \tag{3.151}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on trouve à partir de (3.151)

$$\lim_{n\to\infty} \ln \Theta_{1\zeta_n}(v) = -\frac{v^2}{2},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_{1\zeta_n}(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}, \tag{3.152}$$

donc, la limite cherchée est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance unité. En vertu de (3.152) la densité de probabilité de la somme normée des écarts des variables aléatoires indépendantes, lorsque le nombre de termes augmente, tend vers la loi normale, ce qui démontre le théorème [voir (3.143)].

En utilisant les expressions (3.145) de la moyenne et de la variance d'une somme, il est facile de passer à la relation asymptotique pour la densité de probabilité $W_{1n}(x)$ de la somme des variables aléatoires indépendantes $\sum_{r=1}^{n} \xi_r$

$$W_{1n}(x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(x-na)^2}{2n\sigma^2}}. \tag{3.153}$$

3.4.3. Convergence vers la loi normale. En vertu du théorème central limite dans certaines conditions la distribution d'une somme normée de variables aléatoires indépendantes tend vers la loi normale, lorsque le nombre de termes de la somme augmente indéfiniment. Comme l'a montré H. Cramer, si la somme d'un nombre *fini* de variables aléatoires indépendantes est normalement distri-

buée, chacun des termes est également normalement distribué. Ainsi, ce n'est que dans le cas exceptionnel d'une distribution normale des termes que la loi de distribution d'une somme finie coïncide exactement avec la loi normale [4].

Dans les applications on a souvent affaire à des sommes finies de variables aléatoires, c'est pourquoi il est bon de calculer l'égalité asymptotique (3.153) en fonction du nombre n et de la forme de la densité de probabilité des termes de la somme en question. La correction à apporter à la loi normale s'obtient en étudiant l'expression (3.151). La fonction $\ln \Theta_{1\zeta_n}(v)$ est une série suivant les puissances de v dont les coefficients dépendent de n et des moments centrés de la distribution des termes. Suivant la précision requise on peut estimer la tendance vers la loi normale en se limitant à tel ou tel nombre de termes de cette série. Si l'on garde, par exemple, les termes d'ordre non supérieur à $1/n$, en vertu de (3.151) on trouve

$$\Theta_{1\zeta_n}(v)=e^{-\frac{v^2}{2}}\left[1-\frac{iM_3v^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}+\frac{v^4}{24n}\left(\frac{M_4}{\sigma^4}-3\right)-\frac{M_3^2v^6}{72\sigma^6 n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]^{*)}.$$

En introduisant les coefficients d'asymétrie k et d'aplatissement γ des composantes, on obtient aux termes d'ordre $O(n^{-3/2})$ près

$$\Theta_{1\zeta_n}(v)=e^{-\frac{v^2}{2}}\left(1-\frac{ik}{6\sqrt{n}}v^3+\frac{\gamma}{24n}v^4-\frac{k^2}{72n}v^6\right). \quad (3.154)$$

Aux termes du même ordre de grandeur près on obtient, à partir de (3.154), la densité de probabilité $W_{1\zeta_n}(x)$ de l'écart normé de la somme de n variables aléatoires indépendantes

$$W_{1\zeta_n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_{1\zeta_n}(v)\,e^{-ivx}dv=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{ik}{6\sqrt{n}}v^3+\frac{\gamma}{24n}v^4-\frac{k^2}{72n}v^6\right)e^{-ivx-\frac{v^2}{2}}dv. \quad (3.155)$$

Dans le second membre de (3.155) on trouve la somme de quatre intégrales, dont la première est, en vertu de (3.108), égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ivx-\frac{v^2}{2}}dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

et les autres peuvent être obtenues à partir de celle-ci par dérivation par rapport à x, en effet

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ivx-\frac{v^2}{2}}dv\right)=\frac{(-i)^n}{2n}\int_{-\infty}^{\infty}v^n e^{-ivx-\frac{v^2}{2}}dv.$$

*) Pour le sens du symbole $O(x)$ consulter (1.28).

D'autre part, par définition des polynômes d'Hermite (voir annexe IV), on a

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.156)$$

Ainsi

$$\frac{(i)^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v^n e^{-ivx-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.157)$$

En utilisant (3.156) on trouve à partir de (3.155)

$$W_{1;n}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left[1 + \frac{\mathrm{k}}{6\sqrt{n}} H_3(x) + \frac{\gamma}{24n} H_4(x) + \frac{\mathrm{k}^2}{72n} H_6(x)\right]. \quad (3.158)$$

Il suit de (3.158) que la distribution de l'écart normé de la somme de variables aléatoires indépendantes ayant des densités de probabilité symétriques ($\mathrm{k} = 0$) tend vers la loi normale plus rapidement que la distribution des écarts normés de la somme des variables aléatoires dont les densités de probabilité sont asymétriques ($\mathrm{k} \neq 0$). A partir de (3.158) on peut également trouver l'expression de la densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes

$$W_{1n}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(x-na)^2}{2n\sigma^2}}\left[1 + \frac{\mathrm{k}}{6\sqrt{n}} H_3\left(\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{24n} H_4\left(\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \frac{\mathrm{k}^2}{72n} H_6\left(\frac{x-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]. \quad (3.158')$$

Remarquons que le second membre de (3.158') correspond aux premiers termes du développement en série de la densité de probabilité de l'écart normé de la somme à l'aide des polynômes d'Hermite (voir § 2.4.2). En effet, on peut facilement montrer (voir par exemple [4, § 27.2]) que le coefficient d'asymétrie de cette somme est égal à $\frac{\mathrm{k}}{\sqrt{n}}$, et le coefficient d'aplatissement à $\frac{\gamma}{n}$. Tenant compte en outre de (3.156), à partir de (3.158) on obtient (2.127).

3.4.4. Généralisation. Le théorème central limite de la théorie des probabilités peut également être étendu aux cas multidimensionnels.

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, l'ensemble des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ peut être interprété comme les composantes d'un vecteur dans l'espace à n dimensions.

Considérons une somme de vecteurs *indépendants* [voir (2.51) et (3.121')] dont les composantes ont une même densité de probabilité à n dimensions $w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sous certaines réserves la

distribution des composantes du vecteur résultant (vecteur somme), lorsque le nombre de termes augmente, tend vers la loi normale à n dimensions.

Dans de nombreuses applications on rencontre le cas bidimensionnel de ce théorème. Nous l'étudierons en détail afin de donner simultanément la correction de la loi normale pour la densité de probabilité d'une somme finie de vecteurs indépendants dans le plan.

Soient (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), . . ., (ξ_n, η_n) les composantes de vecteurs indépendants d'un plan, suivant une même loi de distribution bidimensionnelle $w_2(x, y)$. Calculons la densité de probabilité de la résultante de ces vecteurs, dont les composantes sont $\sum_{r=1}^{n} \xi_r$, $\sum_{r=1}^{n} \eta_r$.

Pour résoudre le problème posé on utilise tout comme dans le cas unidimensionnel la méthode des fonctions caractéristiques. Commençons par calculer la densité de probabilité de la somme des vecteurs normés de coordonnées

$$\zeta_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{\xi_r - a_1}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \quad \chi_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{\eta_r - a_2}{\sigma_2 \sqrt{n}}, \tag{3.159}$$

où a_1, a_2 sont les moyennes et σ_1^2, σ_2^2 les variances respectives de chacune des variables aléatoires ξ_r et η_r.

La fonction caractéristique bidimensionnelle de l'un quelconque des vecteurs $(\xi_r - a_1, \eta_r - a_2)$ est égale à

$$\Theta_2(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, e^{i[(x-a_1)v_1 + (y-a_2)v_2]}\, dx\, dy.$$

En développant l'exponentielle dans l'expression sous l'intégrale en série suivant les puissances de v_1, v_2 et en changeant l'ordre de la sommation et de l'intégration, on trouve

$$\Theta_2(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^{k+r}}{k!\,r!} v_1^k v_2^r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_1)^k (y - a_2)^r w_2(x, y)\, dx\, dy$$

ou

$$\Theta_2(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^{k+r}}{k!\,r!} M_{kr} v_1^k v_2^r, \tag{3.160}$$

où M_{kr} désigne les moments centrés mixtes d'ordre $(k + r)$ des variables aléatoires ξ_j et η_j $(j = 1, \ldots, n)$, moments ne dépendant pas de j, car tout couple de ces variables aléatoires a une même densité de probabilité $w_2(x, y)$.

La fonction caractéristique du vecteur normé est égale à

$$\Theta_2\left(\frac{v_1}{\sigma_1\sqrt{n}},\ \frac{v_2}{\sigma_2\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{i^{k+r}}{k!\,r!}\,\frac{M_{kr}}{\sigma_1^k\sigma_2^r}\,n^{-\frac{k+r}{2}}\,v_1^k v_2^r. \quad (3.161)$$

La fonction caractéristique cherchée d'une somme normée de vecteurs indépendants est égale à la puissance n-ième de la fonction caractéristique (3.161), c'est-à-dire

$$\Theta_{2n}(v_1,\ v_2)=\Theta_2^n\left(\frac{v_1}{\sigma_1\sqrt{n}},\ \frac{v_2}{\sigma_2\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{i^{k+r}}{k!\,r!}\,\frac{M_{kr}}{\sigma_1^k\sigma_2^r}\,n^{-\frac{k+r}{2}}\,v_1^k v_2^r\right]^n=$$

$$=\left[1-\frac{v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2}{2n}-\frac{i}{n^{3/2}}\left(\frac{\mathrm{k}_1v_1^3+\mathrm{k}_2v_2^3}{6}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{k}_{12}v_1v_2^2+\mathrm{k}_{21}v_1^2v_2}{2}\right)+\dots\right]^n, \quad (3.162)$$

où r est le coefficient de corrélation entre les variables aléatoires ξ_j et η_j, k_1 et k_2 les coefficients d'asymétrie respectifs des variables aléatoires ξ_j et η_j. Dans (3.162) k_{12} et k_{21} désignent les intégrales suivantes:

$$\mathrm{k}_{12}=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_1)(y-a_2)^2\,w_2(x,\ y)\,dx\,dy,$$

$$\mathrm{k}_{21}=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a_1)^2(y-a_2)\,w_2(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Pour étudier le comportement de la fonction $\Theta_{2n}(v_1,\ v_2)$ pour des n grands, considérons la fonction

$$\ln\Theta_{2n}(v_1,\ v_2)=n\ln\left[1-\frac{v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2}{2n}-\right.$$

$$\left.-\frac{i}{n^{3/2}}\left(\frac{\mathrm{k}_1v_1^3+\mathrm{k}_2v_2^3}{6}+\frac{\mathrm{k}_{12}v_1v_2^2+\mathrm{k}_{21}v_1^2v_2}{2}\right)+\dots\right].$$

En développant le logarithme en série, on obtient

$$\ln\Theta_{2n}(v_1,\ v_2)=-\frac{v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2}{2}-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{k}_1v_1^3+\mathrm{k}_2v_2^3}{6}+\frac{\mathrm{k}_{12}v_1v_2^2+\mathrm{k}_{21}v_1^2v_2}{2}\right)+\dots \quad (3.163)$$

Lorsque le nombre de composantes n augmente indéfiniment, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_{2n}(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{2}(v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2)}, \tag{3.164}$$

ce qui coïncide avec la fonction caractéristique des écarts normés de deux variables aléatoires ayant une distribution normale bidimensionnelle [comparer avec (3.123)].

Ceci montre que la loi de probabilité des composantes de la somme de vecteurs indépendants normés suivant une même loi de distribution tend, au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de composantes, vers la *distribution normale bidimensionnelle*.

A partir de la densité de probabilité bidimensionnelle des composantes du vecteur résultant normé

$$w_{2n}(x, y) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}}, \tag{3.165}$$

on peut facilement trouver l'expression asymptotique de la densité de probabilité des composantes du vecteur résultant non normé

$$W_{2n}(x, y) \sim \frac{1}{2\pi n\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2n(1-r^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{(x-na_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-na_1)(y-na_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-na_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \tag{3.165'}$$

En utilisant (3.163) on peut avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n}$ trouver la correction apportée à la loi normale bidimensionnelle (3.165)

$$\Theta_{2n}(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{2}(v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2)} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{i}{\sqrt{n}}\left(\frac{k_1v_1^3+k_2v_2^3}{6} + \frac{k_{12}v_1v_2^2+k_{21}v_1^2v_2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En appliquant à $\Theta_{2n}(v_1, v_2)$ une transformation bidimensionnelle de Fourier inverse, on trouve, aux termes d'ordre $\frac{1}{n}$ près, la densité de probabilité $w_{2n}(x, y)$ des composantes du vecteur résultant (ζ_n, χ_n)

$$w_{2n}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(v_1x+v_2y)} e^{-\frac{1}{2}(v_1^2+2rv_1v_2+v_2^2)} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{i}{\sqrt{n}}\left(\frac{k_1v_1^3+k_2v_2^3}{6} + \frac{k_{12}v_1v_2^2+k_{21}v_1^2v_2}{2}\right)\right] dv_1\, dv_2.$$

En écrivant cette expression sous la forme d'une somme d'intégrales et un utilisant des relations analogues à (3.157), on trouve

$$w_{2n}(x, y) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}} \times$$
$$\times \Big[1 - \frac{1}{6\sqrt{n}(1-r^2)^3}\{(k_1 - rk_{12})[(ry-x)^3 - 3(1-r^2)\times$$
$$\times(ry-x) + (k_2 - rk_{21})[(rx-y)^3 - 3(1-r^2)(rx-y)] +$$
$$+ 3k_{12}y(1-r^2)[(ry-x)^2 - (1-r^2)] +$$
$$+ 3k_{21}x(1-r^2)[(rx-y)^2 - (1-r^2)]\}\Big]. \quad (3.166)$$

Si les composantes ξ_k et η_k de chacun des vecteurs de la somme sont indépendantes, de moyenne nulle et de variances σ^2 égales, la densité de probabilité bidimensionnelle du vecteur résultant sera en vertu de (3.165′)

$$W_{2n}(x, y) \sim \frac{1}{2\pi n\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2n\sigma^2}}. \quad (3.167)$$

Les résultats du paragraphe 3.2.2 permettent de conclure que la distribution du module de la somme desdits vecteurs *tend asymptotiquement vers la loi de Rayleigh*

$$W_{1n}(\rho) = \frac{\rho}{n\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2n\sigma^2}}, \quad (3.168)$$

et la distribution de la phase de cette somme est asymptotiquement uniforme sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$.

3.5. CONVERGENCE D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Le théorème central limite étudié au paragraphe précédent concerne une *suite* infinie de variables aléatoires et les propriétés limites et asymptotiques des lois de probabilité des termes de cette suite. Comme ultérieurement nous utiliserons également des opérations limites sur les variables et les processus aléatoires, nous allons nous arrêter plus en détail sur cette question et trouver le sens qu'il faut attribuer aux *opérations probabilistes limites*. Mise à part la notion générale de convergence de l'analyse mathématique, il existe plusieurs définitions de la limite des suites de variables aléatoires. Chacune de ces définitions est liée à un certain *critère de convergence.*

Mentionnons tout d'abord plusieurs définitions. La suite des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ *converge en probabilité* vers la variable aléatoire ξ, si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\} = 0. \quad (3.169)$$

Si la suite de ξ_n converge en probabilité vers ξ, on dit que la densité de probabilité $w_{1\xi_n}(x)$ converge pour $n \to \infty$, *dans le sens usuel*, vers la densité de probabilité $w_{1\xi}(x)$ de la variable aléatoire

ξ en tous les points de continuité de cette densité. Si la suite de ξ_n converge vers la grandeur constante c, la densité de probabilité $w_{1\xi_n}(x)$ converge vers la fonction delta $\delta(x-c)$.

Enfin, il faut mentionner la convergence *en moyenne* déterminée par la condition

$$\lim_{n\to\infty} m_1\{|\xi_n-\xi|^k\}=0, \quad k\geqslant 1. \tag{3.170}$$

Un cas particulièrement important de convergence en moyenne est la convergence *en moyenne quadratique*

$$\lim_{n\to\infty} m_1\{|\xi_n-\xi|^2\}=0. \tag{3.171}$$

La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité. En effet, en substituant dans (2.91) au lieu de ξ la différence $\xi_n-\xi$, on obtient

$$P\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{m_1\{|\xi_n-\xi|^2\}}{\varepsilon^2},$$

d'où pour $n\to\infty$ l'affirmation faite se trouve vérifiée. L'inverse n'est en général pas vrai. Ainsi, par exemple, la suite des variables aléatoires ξ_n distribuées suivant la loi de Cauchy $w_{1\xi_n}(x)=$ $=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ converge en probabilité vers zéro, car dans ce cas $w_{1\xi_n}(x)\to\delta(x)$. Cependant $m_1\{|\xi_n|^2\}$ n'est pas borné pour un n quelconque (voir problème 2.3).

Comme la convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité, (3.171) entraîne la convergence dans le sens usuel de $w_{1\xi_n}(x)$ vers $w_{1\xi}(x)$.

Problèmes

3.1. a) Démontrer que la densité de probabilité du produit de variables aléatoires normales liées de moyennes nulles, de variances σ_1^2, σ_2^2 et de coefficient de corrélation R est égale à

$$W_1(y)=\frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}}K_0\left[\frac{|y|}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)}\right]e^{\frac{Ry}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)}}, \tag{1}$$

où $K_0(x)$ est une fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro de l'argument imaginaire.

b) Démontrer que la densité de probabilité du quotient $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ de deux variables aléatoires normales liées de moyennes a_1, a_2, de variances σ_1^2, σ_2^2 et de coefficient de corrélation R est égale à

$$W_1(y)=\frac{\sqrt{1-R^2}}{\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-2R\sigma_1\sigma_2y+\sigma_2^2y^2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}[a_1^2\sigma_2^2-\right.$$

$$\left.-2Ra_1a_2\sigma_1\sigma_2+a_2^2\sigma_1^2]\right\}[1+\sqrt{2\pi}ze^{\frac{z^2}{2}}F_0(z)]. \tag{1'}$$

où

$$z=\frac{a_2\sigma_1^2-Ra_1\sigma_1\sigma_2+a_1\sigma_2^2y-Ra_2\sigma_1\sigma_2y}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-R^2)(\sigma_2^2y-2R\sigma_1\sigma_2y+\sigma_1^2)}}$$

et $F_0(z)$ est donnée par (2.66).

Dans le cas particulier où $a_1=a_2=0$

$$W_1(y)=\frac{\sqrt{1-R^2}}{\pi}\frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{1-2R\frac{\sigma_2}{\sigma_1}y+\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2y^2}. \qquad (1'')$$

Démontrer que pour $R=0$ la distribution (1") est la distribution de Cauchy.

3.2. Démontrer que la densité de probabilité du module du rayon vecteur d'un point, dont les coordonnées sont indépendantes et ont une distribution normale de paramètres (a_1, σ_1) et (a_2, σ_2), est

$$W_1(\rho)=\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{a_2^2}{\sigma_2^2}\right)}\left\{I_0\left[\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right]\times\right.$$

$$\times I_0\left[\rho\sqrt{\frac{a_1^2}{\sigma_1^4}+\frac{a_2^2}{\sigma_2^4}}\right]+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mI_m\left[\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right]\times$$

$$\left.\times I_{2m}\left[\rho\sqrt{\frac{a_1^2}{\sigma_1^4}+\frac{a_2^2}{\sigma_2^4}}\right]\cos\left(2m\ \mathrm{arc\ tg}\,\frac{a_2\sigma_1^2}{a_1\sigma_2^2}\right)\right\}, \quad \rho>0. \qquad (2)$$

Vérifier que pour $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ la formule (2) devient (3.70), étudier également le cas particulier $a_1=a_2=0$ et montrer que (2) entraîne la formule (3.38) pour la densité de probabilité du carré du module du rayon vecteur.

Montrer que pour $a_1=a_2=0$ et des coordonnées *corrélées* la densité de probabilité du module du rayon vecteur est égale à

$$W_1(\rho)=\frac{2\rho}{\sqrt{\alpha\beta}}e^{-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}I_0\left[\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\right], \qquad (2')$$

où

$$\alpha=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sqrt{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2+4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$
$$\beta=\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sqrt{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2+4r^2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

r étant le coefficient de corrélation des coordonnées.

3.3. Démontrer que la densité de probabilité du produit de deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur le segment (a, b), $b>a>0$, est égale à

$$W_1(y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)^2}\ln\frac{y}{a^2}, & a^2\leqslant y\leqslant ab,\\ \frac{1}{(b-a)^2}\ln\frac{b^2}{y}, & ab\leqslant y\leqslant b^2.\end{cases} \qquad (3)$$

3.4. Démontrer que la densité de probabilité de deux variables aléatoires indépendantes de Rayleigh de paramètres σ_1 et σ_2 respectivement est égale à

$$W_1(y)=\frac{y}{(\sigma_1\sigma_2)^2}K_0\left(\frac{y}{\sigma_1\sigma_2}\right), \quad y>0, \qquad (4)$$

où $K_0(x)$ est une fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro de l'argument imaginaire.

3.5. Démontrer que la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dont l'une suit une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2, et l'autre est une sinusoïde d'amplitude a et de phase aléatoire, est égale à

$$W_1(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2+\frac{a^2}{2}}{2\sigma^2}}\left[I_0\left(\frac{a^2}{4\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{ya}{\sigma^2}\right)+\right.$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\frac{a^2}{4\sigma^2}\right)I_{2n}\left(\frac{ya}{\sigma^2}\right)\right], \qquad (5)$$

où $I_n(z)$ est une fonction de Bessel d'ordre n de l'argument imaginaire. (On peut trouver dans [11, pages 114-115] les graphiques de $W_1(y)$ et de la fonction de répartition correspondante, ainsi que les relations asymptotiques pour $\frac{a}{\sigma}\gg 1$.)

3.6. Utilisant la formule de sommation de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,e^{2\pi inx}\,dx, \qquad (6)$$

démontrer que la densité de probabilité de la variable aléatoire ξ rapportée à l'intervalle de périodicité [voir (3.13)] est égale à

$$w_1^*(x)=\frac{1}{a}\left\{1+2\sum_{r=1}^{\infty}\left|\Theta_1\left(\frac{2\pi r}{a}\right)\right|\cos\left[\frac{2\pi r}{a}(x-\varphi_r)\right]\right\}, \qquad (7)$$

où $\Theta_1(v)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire ξ;

$$\varphi_r=\frac{a}{2\pi r}\arg\Theta_1\left(\frac{2\pi r}{a}\right).$$

3.7. a) Utilisant le résultat du problème 3.6 démontrer la propriété suivante de la densité rapportée à l'intervalle de périodicité. Supposons que ξ représente la somme de deux variables aléatoires indépendantes continues, dont l'une est uniformément distribuée sur l'intervalle $\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, la seconde ayant une distribution arbitraire. Dans ce cas la densité de probabilité, rapportée à l'intervalle $\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$, est *toujours uniforme*.

b) Utilisant le résultat du problème 3.6 démontrer que la densité de probabilité de $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$, où φ_1 et φ_2 sont des variables aléatoires liées de fonction caractéristique $\Theta_2(u, v)$, est de la forme

$$W_1(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_2(k,\ -k)\cos\left[k\arccos y+\arg\Theta_2(k,\ -k)\right]\right\}.$$

3.8. Démontrer l'expression suivante pour la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dont l'une a une distribu-

tion normale de paramètres (a, σ), et l'autre est uniformément distribuée sur l'intervalle (b, c)

$$w_1(x) = \frac{1}{c-b}\left[F\left(\frac{c+a-x}{\sigma}\right) - F\left(\frac{b+a-x}{\sigma}\right)\right], \tag{8}$$

$F(z)$ étant la fonction de Laplace [voir (1.34)].

3.9. Soient ξ_1 et ξ_2 des variables aléatoires normales indépendantes de moyennes nulles et de variances σ^2. Trouver l'expression suivante pour les densités de probabilité et les fonctions de répartition:

pour $|\xi_1|$

$$w_1(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{9}$$

$$F_1(x) = 2F\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1, \quad x \geqslant 0; \tag{9'}$$

pour $|\xi_1| + |\xi_2|$

$$w_1(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\left[2F\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) - 1\right], \tag{10}$$

$$F_1(x) = \left[2F\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) - 1\right]^2, \quad x \geqslant 0. \tag{10'}$$

Comparant (9') et (10') vérifier que

$$P\{|\xi_1| + |\xi_2| \leqslant x\} = P^2\{|\xi_1 + \xi_2| \leqslant x\};$$

pour $|\xi_1| + \xi_2$

$$w_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} F\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right), \tag{11}$$

$$F_1(x) = F^2\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right); \tag{11'}$$

pour $|\xi_1| - |\xi_2|$

$$w_1(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} F\left(\frac{|x|}{\sigma\sqrt{2}}\right), \tag{12}$$

$$F_1(x) = 2F^2\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad x < 0,$$

$$F_1(x) = 4F\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) - 2F^2\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right) - 1, \quad x \geqslant 0. \tag{12'}$$

Dans ces formules $F(x)$ est l'intégrale de Laplace [voir (1.34)].

3.10. En utilisant la formule (3.36) vérifier que la fonction de répartition et la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes ayant une distribution de Rayleigh de même paramètre σ [voir (2.75)] est égale à

$$F_1(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} - \sqrt{\pi}\,\frac{y}{\sigma}\, e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} F_0\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right), \tag{13}$$

$$W_1(y) = \frac{y}{2\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}\left(\frac{y^2}{2\sigma^2} - 1\right) e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}} F_0\left(\frac{y}{\sigma\sqrt{2}}\right), \qquad (13')$$

où $F_0(x) = F(x) - \frac{1}{2}$ et $F(x)$ est l'intégrale de Laplace.

3.11. Démontrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle (a, b) est égale à

$$\Theta_1(v) = \frac{1}{iv} \frac{e^{ibv} - e^{iav}}{b-a}. \qquad (14)$$

En développant le second membre de (14) en série de Maclaurin, démontrer que les moments non centrés de la distribution uniforme sont donnés par la formule

$$m_k = \frac{1}{k+1} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}. \qquad (15)$$

Etudier le cas particulier d'une distribution uniforme symétrique $a = -b$ et montrer qu'on a alors:

$$\Theta_1(v) = \frac{\sin bv}{bv},$$

$$m_{2k+1} = M_{2k+1} = 0,$$

$$m_{2k} = M_{2k} = \frac{b^{2k}}{2k+1}. \qquad (15')$$

3.12. Démontrer que la fonction caractéristique du carré d'une variable aléatoire normale de paramètres $(0, \sigma)$ est égale à

$$\Theta_1(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2i\sigma^2 v}}. \qquad (16)$$

En développant le second membre de (16) en série suivant les puissances de v, démontrer que les moments non centrés sont donnés par les formules suivantes:

$$m_k = (2\sigma^2)^k \frac{(2k-1)!!\,k!}{(2k)!!} = \sigma^{2k}(2k-1)!!, \qquad (17)$$

où $(2k)!!$ est le produit de tous les nombres paires de la série naturelle jusqu'à $2k$ inclus, $(2k-1)!!$ est le produit de tous les nombres impairs de la série naturelle jusqu'à $(2k-1)$ inclus.

3.13. Démontrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Rayleigh est égale à

$$\Theta_1(v) = 1 + i\sigma v \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \Phi\left(\frac{i\sigma v}{\sqrt{2}}\right)\right] e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}}, \qquad (18)$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de Kramp [voir (2.65)].

Par dérivation successive trouver les moments non centrés de la distribution de Rayleigh et comparer avec (2) du problème 2.1.

3.14. Montrer que la fonction caractéristique d'une oscillation harmonique $a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ d'amplitude constante a, de pulsation constante ω_0 et dont la phase aléatoire φ est uniformément distribuée sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ est égale à

$$\Theta_1(v) = J_0(av), \qquad (19)$$

$J_0(x)$ étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro.

Démontrer que la variance de cette distribution est égale à $\frac{a^2}{2}$ et que le coefficient d'aplatissement est $-1{,}5$.

3.15. En utilisant (16) du problème 3.12, démontrer que la somme de n carrés de variables aléatoires normales indépendantes réduites suit une *distribution du* χ^2 à n degrés de liberté

$$w_1(x)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x\geqslant 0, \tag{20}$$

$$F_1(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2},\ \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{21}$$

Montrer que les moments non centrés de la distribution du χ^2 à n degrés de liberté sont donnés par la formule

$$m_k=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+k-1\right)2^k, \tag{22}$$

les cumulants de la distribution étant

$$\varkappa_k=2^{k-1}n\,(k-1)!. \tag{23}$$

Comparer (22) avec (2) du problème 2.1 pour la distribution exponentielle qui est une distribution du χ^2 à deux degrés de liberté ($n=2$) [pour la distribution du χ^2 à un degré de liberté voir (3.10′)].

3.16. Soit $\chi^2_{n_i}$ une variable aléatoire distribuée suivant une loi du χ^2 à n_i degrés de liberté (voir problème (3.15). Démontrer que la somme $\sum_{i=1}^{m}\chi^2_{n_i}$ des variables indépendantes suit une loi du χ^2 à $n=\sum_{i=1}^{m}n_i$ degrés de liberté. Montrer qu'il en découle que la somme de m variables aléatoires indépendantes distribuées suivant une loi exponentielle suit une loi du χ^2 à $2m$ degrés de liberté.

3.17. Soient ξ_i ($i=1,\ldots,n$) des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle (0, 1) et soit $\xi^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ leur somme. Montrer que la densité de probabilité de $\xi^{(n)}$ est égale à

$$w_1(x_r)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}(-1)^k(x_r-k)^{n-1},$$

$$r<x_r<r+1,\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{24}$$

3.18. En utilisant (19) du problème 3.14 et les résultats du § 2.4.3, démontrer que la densité de probabilité d'une somme d'oscillations harmoniques d'amplitudes constantes et de phases uniformément distribuées $\xi=$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$ est égale à

$$w_{1n}(x) = \frac{1}{2A}\left[1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \cos\frac{\pi r x}{A} \prod_{k=1}^{n} J_0\left(\frac{a_k \pi r}{A}\right)\right],$$

$$|x| < A = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{25}$$

Etudier le cas particulier des oscillations de même amplitude $a_k = a$ pour lesquelles

$$w_{1n}(x) = \frac{1}{2na}\left[1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \cos\frac{\pi r x}{na} J_0^n\left(\frac{\pi r}{n}\right)\right], \quad |x| < na, \tag{25'}$$

et trouver la probabilité pour la somme ξ de ne pas dépasser en valeur absolue λa. Ecrire la densité de probabilité de la somme de deux oscillations harmoniques de même amplitude et de phase aléatoire sous la forme suivante:

$$w_{12}(x) = \frac{1}{a\pi^2} K\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}\right), \quad |x| < 2a, \tag{26}$$

où K est une intégrale elliptique complète de première espèce.

3.19. Soient deux variables aléatoires η et ξ liées par la relation fonctionnelle $\eta = F(\xi)$. Supposons que $F(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ. Montrer que dans ces conditions la variable aléatoire η est uniformément distribuée sur l'intervalle (0, 1).

3.20. Démontrer que pour la somme de variables aléatoires indépendantes, on a les relations

$$M_3\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} M_3\{\xi_i\}, \tag{27}$$

$$M_4\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} M_4\{\xi_i\} + 6\sum_{i<j} M_2\{\xi_i\} M_2\{\xi_j\}. \tag{28}$$

3.21. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète distribuée suivant une loi de Poisson [voir (1.39)] est égale à

$$\Theta_1(v) = e^{\lambda(e^{iv} - 1)}. \tag{29}$$

En utilisant (29) démontrer que la somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes est également distribuée suivant une loi de Poisson.

3.22. Le nombre de réalisations d'un événement lors de n épreuves indépendantes peut être interprété comme la somme de variables aléatoires indépendantes, prenant chacune l'une des valeurs 1 ou 0 avec respectivement les probabilités p et $q = 1 - p$. Compte tenu de cette remarque trouver l'expression suivante pour la fonction caractéristique de la distribution binomiale

$$\Theta_1(v) = (pe^{iv} + q)^n. \tag{30}$$

En utilisant (30) trouver les moments de la distribution binomiale.

3.23. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Cauchy (voir problème 2.3) est égale à

$$\Theta_1(v) = e^{-|v|}. \tag{31}$$

A partir de (31) démontrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant une loi de Cauchy, est également distribuée suivant une loi de Cauchy

$$w_{1n}(x)=\frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2+x^2}. \tag{32}$$

3.24. Problème du « voyageur errant ». Soit un point se déplaçant dans le plan suivant des segments de droites, ces déplacements pouvant être considérés comme des vecteurs mutuellement indépendants de composantes aléatoires (ξ_k, η_k). La position du point après n déplacements est donnée par le vecteur résultant de composantes $\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ et $\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$. Supposons que le module $\zeta_k = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2}$ et la phase $\vartheta_k = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_k}{\xi_k}$ de chacun des vecteurs sont également indépendants, la phase étant uniformément distribuée sur l'intervalle $(0, 2\pi)$, et la densité de probabilité du module égale à $w_{1k}(r)$. Montrer que la densité de probabilité du module du vecteur résultant est égale à

$$W_{1n}(r)=r\int_0^\infty sJ_0(rs)\prod_{k=1}^{n}\int_0^\infty w_{1k}(v)\,J_0(vs)\,dv\,ds, \quad r>0, \tag{33}$$

et que la fonction de répartition correspondante est

$$F_{1n}(R)=R\int_0^\infty J_1(Rs)\prod_{k=1}^{n} w_{1k}(v)\,J_0(vs)\,ds, \quad R>0. \tag{34}$$

Considérer un cas particulier où toutes les longueurs des vecteurs sont constantes et égales à $\zeta_k = a_k$. Montrer qu'alors en vertu de (33) on a

$$W_{1n}(r)=r\int_0^\infty sJ_0(rs)\prod_{k=1}^{n} J_0(a_k s)\,ds, \quad r>0. \tag{35}$$

Lorsque les modules des vecteurs ont une même distribution, c'est-à-dire si $w_{1k}(r) = w_1(r)$, en vertu de (33) on a

$$W_{1n}(r) = r\int_0^\infty \left[\int_0^\infty w_1(v)\,J_0(vs)\,dv\right]^n sJ_0(rs)\,ds. \tag{36}$$

Trouver pour ce cas la formule asymptotique lorsque le nombre de termes de la somme augmente indéfiniment

$$W_{1n}(r) \sim \frac{2r}{m_2 n}\, e^{-\frac{r^2}{m_2 n}} \left[1+\frac{3}{8n}\left(\frac{m_4}{m_2^2}-2\right)\left(\frac{r^4}{2m_2^2 n^2}-\frac{2r^2}{m_2 n}+1\right)+\dots\right]. \tag{37}$$

où m_2 et m_4 sont le premier et le quatrième moments non centrés de la distribution $w_1(r)$.

Chapitre 4

PROCESSUS ALÉATOIRES

4.1. CARACTÉRISTIQUES DE PROBABILITÉ DES PROCESSUS ALÉATOIRES

4.1.1. Classification des processus aléatoires. Dans les chapitres précédents nous avons exposé les notions fondamentales de la théorie classique des probabilités, essentiellement consacrée à l'étude des lois de distribution d'une variable aléatoire ou d'un système formé par un nombre fini de variables aléatoires. Dans les chapitres suivants nous présenterons certains résultats et applications radiotechniques des éléments de la théorie moderne des *processus aléatoires* *), théorie étudiant les variables aléatoires dépendant d'un paramètre variable, par exemple, du temps. Le cours des processus *déterministes* est défini d'une manière univoque, au contraire, celui des processus aléatoires représente les variations d'états d'un système physique impossibles de prévoir.

On peut citer à titre d'exemple de processus aléatoire les *fluctuations* (effet de grenaille et effet thermique) des dispositifs radiotechniques. L'étude de la tension de bruit à la sortie d'appareils identiques montre que les fonctions décrivant les variations de cette tension dans le temps sont différentes. La théorie des processus aléatoires a pour but de rechercher les lois probabilistes reliant ces différentes fonctions décrivant un même effet physique (bruit de fond, par exemple).

Quantitativement un processus aléatoire est décrit par une *fonction aléatoire* du temps $\xi(t)$ qui à tout instant t peut prendre différentes valeurs suivant une certaine distribution. Ainsi pour tout $t = t_i$ la valeur $\xi_i = \xi(t_i)$ est une *variable aléatoire.*

Tout processus aléatoire (fonction aléatoire du temps) est donné par un ensemble de fonctions du temps et les lois caractérisant les propriétés de cet ensemble. Toute fonction de cet ensemble est appelée *réalisation* de la fonction aléatoire. On désigne par $\xi^{(k)}(t)$, où k est un nombre réel quelconque, une réalisation de la fonction aléatoire $\xi(t)$. Un processus déterministe a une réalisation unique décrite par une fonction *donnée* du temps $S(t)$.

Suivant que les valeurs possibles du temps t et de la réalisation $\xi(t)$ appartiennent à un ensemble discret ou à un segment de l'axe

*) Parfois au lieu du terme « processus aléatoire » on utilise le terme « processus stochastique ». La notion de *champ aléatoire*, fonction aléatoire à plusieurs variables, est une notion plus générale.

réel (ou peut-être de l'axe entier), on distingue quatre types de processus aléatoires :

1) *les processus aléatoires du type général*: t et $\xi(t)$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles sur un segment de l'axe réel (ou de l'axe entier);

2) *les processus aléatoires discontinus* (discrets) : t est continu et les valeurs de $\xi(t)$ sont discrètes ;

3) *les suites aléatoires du type général*: t est discret, et $\xi(t)$ peut prendre des valeurs quelconques sur un segment de l'axe réel (ou sur l'axe entier);

4) *les suites aléatoires discrètes*: t et $\xi(t)$ sont discrets.

Les réalisations d'un processus aléatoire peuvent être des fonctions continues du temps (fig. 4.1). On peut, par exemple, utiliser

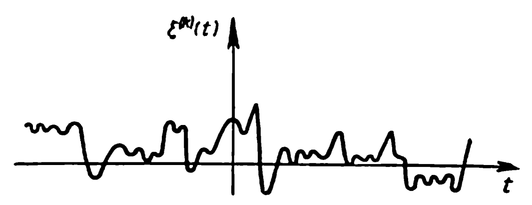


Fig. 4.1. Réalisation d'un processus aléatoire continu

un tel processus aléatoire pour la description macroscopique du bruit de fond. Les réalisations d'un processus aléatoire discontinu sont des fonctions en escalier du temps (fig. 4.2) comme, par exemple,

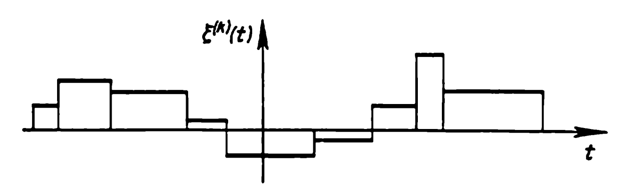


Fig. 4.2. Réalisation d'un processus aléatoire discret

celles que l'on rencontre à la sortie des systèmes de régulation automatique à relais ou des dispositifs de quantification des signaux.

Une classe particulière de processus aléatoires sont les processus aléatoires *quasi déterministes* dont les réalisations sont décrites par des fonctions du temps d'un type S donné, contenant un ou plusieurs paramètres $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ ne dépendant pas du temps. Ainsi, l'ensemble des réalisations d'un processus quasi déterministe peut s'écrire de la manière suivante :

$$\xi(t) = S(t; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots).$$

Les processus représentés par des fonctions aléatoires de l'argument continûment variable t n'englobent pas tous les modèles probabilistes des phénomènes physiques. On peut imaginer un processus aléatoire décomposé en étapes consécutives, qui sont des fonctions aléatoires d'un temps discret.

Par exemple, la suite aléatoire figurant dans le problème bien connu du voyageur errant (mouvement brownien, réflexion par des hétérogénéités, propagation à rayons multiples, etc.), où chaque « pas » (déplacement) peut être une grandeur quelconque (bornée) réelle, ces « pas » ne se produisant qu'à des instants discrets. Si les « pas » ne forment qu'un ensemble discontinu, ceci correspond à la réalisation d'une suite aléatoire discrète.

Une chaîne de Markov simple (voir § 1.3, chap. 1) peut servir d'exemple de suite aléatoire discrète. La particularité de cette chaîne est que la probabilité de passage de l'état x (s) à l'un des états y possibles pour $t = s + 1$ ne dépend pas des états du système aux instants $t < s$. Les processus aléatoires ayant la propriété mentionnée sont dits *processus sans post-action*. L'absence de post-action signifie que les liaisons mutuelles probabilistes dans un processus aléatoire à temps discret n'agissent pas au-delà d'un pas.

Si dans une chaîne de Markov on enlève la restriction astreignant t à prendre des valeurs entières, on obtient un *processus de Markov* $\xi(t)$ régi par la probabilité de passage $P\{y, t \mid x, t_0\}$ de l'état x à l'instant t_0 à l'un des états de l'ensemble $\xi < y$ à l'instant t.

Dans de nombreux problèmes de radiotechnique on étudie les *signaux utiles* et le *bruit* les accompagnant, l'ensemble formant un processus aléatoire. Souvent le signal peut être considéré comme la partie déterministe ou quasi déterministe de ce processus, et le bruit comme une partie purement aléatoire. Cependant dans la théorie moderne des communications (théorie de l'information) les signaux sont considérés non pas comme des fonctions données du temps, mais comme un ensemble de fonctions possibles du temps ayant certaines caractéristiques probabilistes. On peut envisager des cas où les bruits (ou leur simulation) deviennent une partie déterministe du processus.

4.1.2. Fonctions de répartition. Passons maintenant à la définition des caractéristiques probabilistes d'un ensemble de réalisations d'un processus aléatoire.

Soient N réalisations d'une fonction aléatoire. Prenons-en les n_1 réalisations dont les valeurs à un instant déterminé t_1 sont inférieures à un certain nombre x_1. Lorsque N est suffisamment grand, la proportion $\frac{n_1(x_1, t_1)}{N}$ des fonctions se trouvant à l'instant t_1 au-dessous du niveau x_1 sera statistiquement stable, c'est-à-dire que ce sera un nombre à peu près constant. Ce nombre est appelé *probabilité* pour la fonction aléatoire $\xi(t)$, pour $t = t_1$, de se trouver

au-dessous du niveau x_1. Cette probabilité s'écrit $P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\}$.

Cette probabilité tout comme le nombre n_1 dépend de l'instant et du niveau choisi, c'est-à-dire que ce sera une fonction des deux variables t_1 et x_1. La fonction

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\} \tag{4.1}$$

est appelée *fonction de répartition unidimensionnelle des probabilités* du processus aléatoire. Si la fonction de répartition possède une dérivée partielle par rapport à x_1

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = w_1(x_1, t_1), \tag{4.2}$$

cette dérivée est appelée *densité de probabilité* du processus aléatoire.

Les fonctions $F_1(x_1, t_1)$ et $w_1(x_1, t_1)$ sont les caractéristiques les plus simples d'un processus aléatoire et ne le représentent qu'à des instants donnés.

Pour caractériser d'une manière plus complète un processus aléatoire il faut connaître la relation existant entre les valeurs probabilistes des fonctions aléatoires pour deux instants arbitraires t_1 et t_2. Pour cela considérons de nouveau N réalisations d'une fonction aléatoire et prenons les n_2 réalisations dont la valeur à l'instant t_1 est inférieure à x_1, et à l'instant t_2 inférieure à x_2. Comme précédemment pour un N suffisamment grand la proportion

$$\frac{n_2(x_1, t_1, x_2, t_2)}{N}$$

des fonctions se trouvant pour $t = t_1$ au-dessous de x_1 et pour $t = t_2$ au-dessous de x_2 sera statistiquement stable, donc un nombre à peu près constant. Ce nombre est appelé probabilité pour la fonction aléatoire $\xi(t)$ pour $t = t_1$ de se trouver au-dessous du niveau x_1 et pour $t = t_2$ au-dessous du niveau x_2.

Cette probabilité $P\{\xi(t_1) \leqslant x_1, \xi(t_2) \leqslant x_2\}$ est une fonction des quatre variables x_1, x_2, t_1, t_2

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1, \xi(t_2) \leqslant x_2\}, \tag{4.3}$$

et s'appelle *fonction de répartition bidimensionnelle* du processus aléatoire.

Si la fonction $F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ possède une dérivée

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2} = w_2(x_1, x_2, t_1, t_2), \tag{4.4}$$

cette dérivée s'appelle *densité de probabilité bidimensionnelle*.

On peut d'une manière analogue définir la probabilité pour la fonction aléatoire $\xi(t)$ à n instants $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de se trouver au-dessous des niveaux $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\{\xi(t_1) \leqslant x_1, \xi(t_2) \leqslant x_2, \ldots, \xi(t_n) \leqslant x_n\} = \\ = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n). \quad (4.5)$$

Cette probabilité est une fonction de $2n$ variables et s'appelle *fonction de répartition à n dimensions* du processus aléatoire *).

Si la fonction $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ possède une dérivée

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \\ = w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n), \quad (4.6)$$

celle-ci s'appelle *densité de probabilité à n dimensions* du processus aléatoire.

La suite des fonctions $w_1(x_1, t_1)$, $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2), \ldots$ $\ldots, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est en quelque sorte une échelle dont chaque marche caractérise de mieux en mieux le processus aléatoire. La suite de fonctions considérée doit avoir toutes les propriétés des densités de probabilités étudiées au chapitre 2. En particulier toutes les densités de probabilités d'ordre inférieur, jusqu'au premier, peuvent être obtenues à partir de la densité de probabilité d'ordre n.

De plus, la densité de probabilité d'un processus aléatoire doit satisfaire à la *condition de symétrie* par rapport à tous les couples de variables (x_i, t_i), (x_j, t_j)

$$w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) \equiv \\ \equiv w_n(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots, t_{k_n}), \quad (4.7)$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des nombres entiers de 1 à n disposés dans un ordre arbitraire.

Ainsi, les propriétés probabilistes d'un processus aléatoire (fonction aléatoire) peuvent être caractérisées par la densité de probabilité à n dimensions et cela avec d'autant plus de précision que n est grand. Si l'on se limite à une fonction à n dimensions, la fonction aléatoire se trouve identique à un ensemble de n variables aléatoires $\xi_i = \xi(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ou à un vecteur aléatoire $\xi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans un espace à n dimensions.

On peut illustrer de la manière suivante les notions qu'on vient d'introduire. Faisons correspondre à chacune des réalisations $\xi^{(k)}(t)$

*) Seuls les niveaux x_i sont considérés comme les arguments de la fonction de répartition, les instants t_i étant considérés comme des paramètres; d'où le terme de fonction à n dimensions et non à $2n$ dimensions.

du processus aléatoire une suite d'impulsions rectangulaires adjacentes, de durée T égale à la période de leur répétition. L'amplitude de la m-ième impulsion de cette suite est prise égale à

$$A_{mk} = \xi^{(k)}\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)T\right].$$

Nous appelons la suite ainsi déterminée *suite d'impulsions de référence*. En remplaçant chacune des réalisations du processus aléatoire par une suite d'impulsions de référence on obtient un ensemble de suites d'impulsions apparaissant à des instants multiples de la durée de l'impulsion. L'amplitude de l'impulsion correspondant à l'instant $t_m = mT$ est une variable aléatoire ξ_m dont l'ensemble des valeurs possibles forme un ensemble d'amplitudes $\{A_{mk}\}$.

On construit ainsi une approximation du processus aléatoire $\xi(t)$ par une suite d'impulsions de référence d'amplitude aléatoire ξ_m, l'approximation étant d'autant meilleure que la durée de l'impulsion de référence est petite. La densité de probabilité unidimensionnelle du processus aléatoire est pour cette approximation la densité de probabilité des amplitudes aléatoires ξ_m qui peut dépendre du numéro m de l'impulsion (c'est-à-dire du temps). La densité de probabilité bidimensionnelle du processus aléatoire est représentée par la distribution conjointe des amplitudes aléatoires d'un couple quelconque d'impulsions de référence. De même la densité de probabilité à n dimensions du processus aléatoire est donnée par la distribution d'un groupe quelconque de n impulsions de référence.

En utilisant § 2.1.5 on peut également déterminer la *densité de probabilité conditionnelle* du processus aléatoire $w_n(x_n, t_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}, t_1, \ldots, t_{n-1})$ comme la densité de probabilité de $\xi(t_n) = x_n$ *à condition* toutefois que $\xi(t_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Il est évident que les propriétés probabilistes d'un processus aléatoire peuvent être décrites par une suite de *fonctions caractéristiques*

$$\Theta_1(v_1, t_1) = m_1\{e^{iv_1\xi(t_1)}\}, \tag{4.8}$$

$$\Theta_2(v_1, v_2, t_1, t_2) = m_1\{e^{i[v_1\xi(t_1)+v_2\xi(t_2)]}\}, \tag{4.8'}$$

. . . .

$$\Theta_n(v_1, \ldots, v_n, t_1, \ldots, t_n) = m_1\{\exp[i\sum_{k=1}^{n} v_k\xi(t_k)]\}, \tag{4.8''}$$

liées par une transformation de Fourier aux densités de probabilité (voir § 3.3.4)

$$w_1(x_1, t_1),\ w_2(x_1, x_2, t_1, t_2),\ \ldots,\ w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n).$$

On peut trouver la caractéristique du processus aléatoire *en entier* en augmentant indéfiniment le nombre n d'instants $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de manière à remplir tout l'axe réel. Soit $v_k = (t_{k+1} - t_k)v(t_k)$,

où $v(t)$ est une certaine fonction continue du temps, et supposons que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\xi(t)\,dt$ soit convergente en moyenne quadratique (voir § 3.5), c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} m_1 \left\{\left[\sum_{k=-n}^{n} v_k \xi(t_k) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\xi(t)\,dt\right]^2\right\} = 0.$$

On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_n(v_1, \ldots, v_n, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m_1 \left\{\exp\left[i \sum_{k=1}^{n} v_k \xi(t_k)\right]\right\} =$$

$$= m_1 \left\{\exp\left[i \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\xi(t)\,dt\right]\right\} = \Theta[v(t)]. \qquad (4.9)$$

La fonction $\Theta[v(t)]$ est appelée *fonctionnelle caractéristique* du processus aléatoire $\xi(t)$.

Parfois on n'a pas besoin de toute l'information fournie par les densités de probabilité: on peut se limiter à des caractéristiques numériques du processus aléatoire telles que les *moments non centrés de la distribution* qui, dans le cas général, peuvent être déterminés de la manière suivante [voir (2.113)]:

$$m_{k_1k_2\ldots k_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = m_1\{\xi^{k_1}(t_1)\,\xi^{k_2}(t_2)\ldots\xi^{k_n}(t_n)\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}\times$$

$$\times\, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n. \qquad (4.10)$$

On peut également trouver ces moments à l'aide des fonctions caractéristiques en utilisant la formule (3.122).

Un nombre réduit de caractéristiques numériques suffit pour décrire certaines propriétés des processus aléatoires. Les plus connues sont:

la *valeur moyenne* du processus aléatoire (ou moment d'ordre 1)

$$m_1\{\xi(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x w_1(x, t)\,dx = a_\xi(t), \qquad (4.11)$$

la *variance* du processus aléatoire (ou moment centré d'ordre 2)

$$m_1\{[\xi(t) - a_\xi(t)]^2\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - a_\xi(t)]^2\, w_1(x, t)\,dx = \sigma_\xi^2(t), \qquad (4.12)$$

la *fonction de corrélation* du processus aléatoire (ou moment non centré mixte d'ordre 2)

$$m_1 \{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= B_\xi(t_1, t_2). \qquad (4.13)$$

Connaissant la fonction caractéristique bidimensionnelle $\Theta_2(v_1, v_2, t_1, t_2)$ du processus aléatoire $\xi(t)$, on peut à l'aide de (3.122) trouver la fonction de corrélation

$$B_\xi(t_1, t_2) = -\left.\frac{\partial^2\Theta_2(v_1, v_2, t_1, t_2)}{\partial v_1\,\partial v_2}\right|_{v_1=v_2=0}. \qquad (4.14)$$

Notons que par définition de la fonction de corrélation on a:

$$B_\xi(t_1, t_2) = B_\xi(t_2, t_1).$$

4.1.3. Cas où les premières densités de probabilité contiennent toute l'information concernant le processus. Comme nous l'avons déjà mentionné, la suite $w_k(x_1, \ldots, x_k, t_1, \ldots, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n, \ldots$, des densités de probabilité caractérise de mieux en mieux le processus aléatoire au fur et à mesure de l'augmentation du nombre k, de plus, les fonctions w_n recèlent déjà toute l'information sur toutes les densités de probabilité d'ordre $k < n$, *le contraire* n'étant en général pas vrai. Cependant en dépit de cette loi générale il existe certaines formes spéciales des processus aléatoires pour lesquelles il suffit de connaître les densités de probabilité du premier et du second ordre (et parfois même seulement du premier ordre) pour savoir toute la suite de fonctions w_n jusqu'à un ordre quelconque, et caractériser ainsi entièrement le processus aléatoire.

Remarquons tout d'abord que pour un processus *déterministe* $S(t)$ la densité de probabilité multidimensionnelle est un produit de fonctions delta [cf. (2.14′) et (3.7′)]

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \delta(x_i - S_i), \qquad (4.15)$$

où $S_i = S(t_i)$. Utilisant alors la densité de probabilité conditionnelle on peut facilement obtenir l'expression pour la densité de probabilité multidimensionnelle pour un processus *quasi déterministe* $S(t, \vartheta)$ dont le paramètre aléatoire est distribué suivant la loi $w_{1\vartheta}(x)$. En vertu de (3.54′) on a

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = w_{1S}(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} \delta(x_i - \Phi_i), \qquad (4.15')$$

où $\Phi_i = S[t_i, Q(x_1; t_1)]$; Q est la fonction inverse de S, et l'on peut trouver w_{1S} à partir de $w_{1\vartheta}$ à l'aide des règles de transfor mation

fonctionnelle exposées au chapitre 3. Par exemple, conformément à (3.116′) on a

$$w_{1S}(x_1, t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{1\vartheta}(u) \exp\{iv[S(t_1, u) - x_1]\}\, du\, dv.$$

Ainsi la distribution *multidimensionnelle* d'un processus quasi déterministe est entièrement déterminée par sa densité de probabilité *unidimensionnelle*. Il est évident que la formule (4.15) est un cas particulier de (4.15′) lorsque ϑ est une grandeur constante.

Souvent la fonction aléatoire $\xi(t)$ contient comme composante additive un *processus quasi déterministe* $S(t, \vartheta)$

$$\xi(t) = \zeta(t) + S(t, \vartheta). \tag{4.16}$$

On dit que $\zeta(t)$ et $S(t, \vartheta)$ sont respectivement la partie *purement* *) *aléatoire* et la partie *quasi déterministe* du processus $\xi(t)$. Si ϑ et ζ sont indépendants, les parties correspondantes du processus le sont également. La densité de probabilité unidimensionnelle de la somme (4.16) est en vertu de (3.33) égale à

$$w_{1\xi}(y_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1S}(x_1, t_1)\, w_{1\zeta}(y_1 - x_1, t_1)\, dx_1. \tag{4.17}$$

La densité de probabilité bidimensionnelle de la somme (4.16) est égale à

$$\begin{aligned} w_{2\xi}(y_1, y_2, t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{1S}(x_1, t_1)\, \delta(x_2 - \Phi_2) \times \\ &\times w_{2\zeta}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{1S}(x_1, t_1)\, w_{2\zeta}(y_1 - x_1, y_2 - \Phi_2, t_1, t_2)\, dx_1, \end{aligned} \tag{4.18}$$

où $w_{2\zeta}(y_1, y_2, t_1, t_2)$ est la densité de probabilité bidimensionnelle du processus aléatoire $\zeta(t)$. D'une manière analogue on peut écrire les expressions des distributions d'ordres plus élevés pour la somme (4.16).

Si la composante additive S est entièrement déterministe on a $w_{1S}(x_1, t_1) = \delta(x_1 - S_1)$, et les formules (4.17) et (4.18) deviennent alors

$$w_{1\xi}(y_1, t_1) = w_{1\zeta}(y_1 - S_1, t_1), \tag{4.19}$$

$$w_{2\xi}(y_1, y_2, t_1, t_2) = w_{2\zeta}(y_1 - S_1, y_2 - S_2, t_1, t_2). \tag{4.19′}$$

*) Le terme « processus purement aléatoire » signifie seulement l'absence de composantes déterministes ou quasi déterministes.

Il est facile de voir qu'on arrive à

$$w_{n\xi}(y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= w_{n\zeta}(y_1 - S_1, \ldots, y_n - S_n, t_1, \ldots, t_n). \quad (4.19'')$$

Nous pouvons donner un autre exemple du processus dont toute l'information se trouve contenue dans la densité de probabilité unidimensionnelle. Il s'agit d'un processus aléatoire dont les valeurs à différents instants sont indépendantes. Cela signifie que pour toute suite d'instants $t_1, \ldots, t_n$ ($t_i \neq t_j$, $i, j = 1, \ldots, n$), l'ensemble $\xi_1, \ldots, \xi_n$ où $\xi_i = \xi(t_i)$ représente un ensemble de variables aléatoires mutuellement indépendantes, donc leur distribution conjointe est égale au produit de leurs distributions unidimensionnelles. Ainsi, pour un processus aléatoire à *valeurs indépendantes* pour un n quelconque on a

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} w_1(x_i, t_i). \quad (4.20)$$

Il y a lieu de distinguer les processus à valeurs indépendantes des processus à *valeurs non corrélées* pour lesquelles pour tout couple d'instants différents t_i et t_j on a

$$m_1\{\xi(t_i)\,\xi(t_j)\} = m_1\{\xi(t_i)\}\, m_1\{\xi(t_j)\}. \quad (4.20')$$

Si la moyenne d'un processus à valeurs non corrélées est nulle, ce processus est dit processus à *valeurs orthogonales*.

Considérons maintenant des processus aléatoires dont la densité de probabilité bidimensionnelle détermine leur distribution d'ordre quelconque. Il s'agit des *processus de Markov*. Par définition les processus de Markov sont sans *post-action*, ce qui analytiquement s'exprime comme suit à l'aide des densités de probabilité conditionnelles *):

$$w_n(x_n, t_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1}, t_1, \ldots, t_{n-1}) =$$
$$= w_2(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}), \quad t_j > t_i, \ j > i. \quad (4.21)$$

En vertu de (2.54') on trouve pour les processus de Markov

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= w_1(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} w_2(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1}). \quad (4.21')$$

*) J. Doob [8] introduit également la *martingale*, le processus aléatoire pour lequel la moyenne conditionnelle est

$$m_1\{\xi(t_{n+1}) \mid \xi(t_1) = x_1, \ldots, \xi(t_n) = x_n\} = x_n,$$
$$t_j > t_i, \quad j > i.$$

Citons enfin les processus à *accroissements indépendants*. La propriété essentielle de ces processus est que pour tout ensemble d'instants $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ $(n \geqslant 3)$ les différences des valeurs du processus

$$\xi(t_2) - \xi(t_1),\ \xi(t_3) - \xi(t_2),\ \ldots,\ \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

sont mutuellement indépendantes. Pour déterminer la densité de probabilité d'ordre quelconque d'un processus à accroissements indépendants, il suffit de connaître les distributions unidimensionnelles de $\xi(t)$ et de $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$, c'est-à-dire les densités de probabilité unidimensionnelle et bidimensionnelle du processus. Ce qui vient d'être dit devient évident si l'on écrit la fonction caractéristique à n dimensions d'un processus à accroissements indépendants

$$\begin{aligned}
\Theta_n(v_1, \ldots, v_n, t_1, \ldots, t_n) &= m_1\left\{e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \xi(t_k)}\right\} = \\
&= m_1\{e^{i(v_1+v_2+\ldots+v_n)\xi(t_1)} \times \\
&\times e^{i(v_2+\ldots+v_n)[\xi(t_2)-\xi(t_1)]} \ldots e^{iv_n[\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})]}\} = \\
&= m_1\left\{e^{i\xi(t_1)\sum\limits_{k=1}^{n} v_k}\right\} \prod_{k=1}^{n-1} m_1\left\{e^{i[\xi(t_{k+1})-\xi(t_k)]\sum\limits_{r=k+1}^{n} v_r}\right\} = \\
&= \Theta_1\left(\sum_{k=1}^{n} v_k,\ t_1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \Theta_2\left(\sum_{r=k+1}^{n} v_r,\ -\sum_{r=k+1}^{n} v_r,\ t_{k+1},\ t_k\right). \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction caractéristique d'ordre quelconque s'exprime par des fonctions caractéristiques uni- et bidimensionnelles. On peut facilement voir l'analogie existant entre les formules (4.21′) et (4.22). Cette analogie devient plus profonde si l'on se souvient que les processus à accroissements indépendants peuvent être considérés comme des processus de Markov.

On distingue également les processus à accroissements indépendants des processus à *accroissements non corrélés* pour lesquels

$$\begin{aligned}
m_1\{[\xi(t_j) - \xi(t_i)]\,[\xi(t_n) - \xi(t_k)]\} &= \\
&= m_1\{\xi(t_j) - \xi(t_i)\}\, m_1\{\xi(t_n) - \xi(t_k)\} \qquad (4.22')
\end{aligned}$$

pour des instants $t_i < t_j \leqslant t_k < t_n$ quelconques. Si la moyenne d'un processus à accroissements non corrélés est constante, ce processus est dit processus à *accroissements orthogonaux*.

4.1.4. Distribution conjointe des processus aléatoires. Dans de nombreux problèmes il faut étudier simultanément deux ou plusieurs processus aléatoires. Nous allons avant tout trouver la dis-

tribution conjointe de deux processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$ dépendants

$$P\{\xi(t_1) \leqslant x_1, \ldots, \xi(t_n) \leqslant x_n, \eta(t_1') \leqslant y_1, \ldots, \eta(t_m') \leqslant y_m\} =$$
$$= F_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, t_1, \ldots, t_n, t_1' \ldots, t_m'). \quad (4.23)$$

Cette probabilité qui est fonction de $(n+m)$ niveaux $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$ et de $(n+m)$ instants $t_1, \ldots, t_n, t_1', \ldots, t_m'$ est appelée fonction de répartition conjointe à $(n+m)$ dimensions des processus $\xi(t)$ et $\eta(t)$. En utilisant les propriétés générales des distributions conjointes *) exposées au chapitre 2, il est facile de trouver à partir de F_{n+m} les fonctions de répartition conjointe d'ordre inférieur et, en particulier, les fonctions de répartition de chacun des deux processus.

Si la fonction $F_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_m, t_1', \ldots, t_m')$ a une dérivée

$$\frac{\partial^{n+m} F_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_m, t_1', \ldots, t_m')}{\partial x_1 \ldots \partial x_n \partial y_1 \ldots \partial y_m} =$$
$$= w_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_m, t_1', \ldots, t_m'), \quad (4.24)$$

cette dérivée s'appelle densité de probabilité à $(n+m)$ dimensions des processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$.

Deux processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont *indépendants*, si pour tous n et m on a

$$w_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_m, t_1', \ldots, t_m') =$$
$$= w_{n\xi}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) \times$$
$$\times w_{m\eta}(y_1, \ldots, y_m, t_1', \ldots, t_m'). \quad (4.25)$$

On peut également trouver les moments de la distribution conjointe

$$m_{k_1, \ldots, k_n, r_1, \ldots, r_m}(t_1, \ldots, t_n, t_1', \ldots, t_m') =$$
$$= m_1\{\xi^{k_1}(t_1) \ldots \xi^{k_n}(t_n) \eta^{r_1}(t_1') \ldots \eta^{r_m}(t_m')\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} y_1^{r_1} \ldots y_m^{r_m} \times$$
$$\times w_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n, y_1, \ldots, y_m, t_1', \ldots, t_m') \times$$
$$\times dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m. \quad (4.26)$$

---

*) Remarquons cependant que les distributions conjointes des processus aléatoires ne sont pas en général symétriques [voir (4.7)].

Le plus simple des moments de la distribution conjointe est la *fonction de corrélation mutuelle* de deux processus aléatoires

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = B_{\eta\xi}(t_2, t_1) =$$
$$= m_1\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyw_2(x, y, t_1, t_2)\,dx\,dy. \qquad (4.27)$$

Si les processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont indépendants, compte tenu de (4.25) et (4.27) on a

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} xw_{1\xi}(x, t_1)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yw_{1\eta}(y, t_2)\,dy =$$
$$= a_\xi(t_1)\,a_\eta(t_2), \qquad (4.28)$$

où $a_\xi(t)$ et $a_\eta(t)$ sont les moyennes des processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$. Si de plus la moyenne de l'un des processus est nulle, on a

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0.$$

Des processus dont les fonctions de corrélation mutuelles sont constantes (ou en particulier nulles) sont dits *non cohérents*. Il est évident que deux processus non cohérents ne sont pas forcément indépendants (cf. § 2.3.5).

Les propriétés de corrélation de deux processus aléatoires à deux instants différents peuvent être décrites par la matrice de corrélation

$$\begin{Vmatrix} B_\xi(t_1, t_2) & B_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ B_{\eta\xi}(t_1, t_2) & B_\eta(t_1, t_2) \end{Vmatrix}.$$

Dans le cas général la matrice de corrélation d'ordre $n \times n$ décrit les propriétés de corrélation de n processus aléatoires à deux instants différents ou de deux processus aléatoires à n instants différents.

La notion de distribution conjointe peut facilement être étendue à un nombre quelconque de processus aléatoires $\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t)$ en introduisant la probabilité

$$P\{\xi_1(t_1^{(1)}) \leqslant x_{11}, \ldots, \xi_1(t_{n_1}^{(1)}) \leqslant x_{1n_1}, \ldots$$
$$\ldots, \xi_N(t_1^{(N)}) \leqslant x_{N1}, \ldots, \xi_N(t_{n_N}^{(N)}) \leqslant x_{Nn_N}\} =$$
$$= F_M(x_{11}, \ldots, x_{1n}, t_1^{(1)}, \ldots, t_{n1}^{(1)}, \ldots, x_{N1}, \ldots$$
$$\ldots, x_{Nn_N}, t_1^{(N)}, \ldots, t_{n_N}^{(N)}), \qquad (4.29)$$

où $M = \sum_{i=1}^{N} n_i$.

Ces distributions peuvent s'écrire d'une manière plus simple en introduisant l'écriture vectorielle avec les notations: $\mathbf{x}_{n_i}^{(i)} =$

$= (x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$, $\mathbf{t}_{n_i}^{(i)} = (t_1^{(i)}, \ldots, t_{n_i}^{(i)})$. La fonction de répartition conjointe et la densité de probabilité conjointe d'un ensemble de N variables aléatoires (vecteurs aléatoires) peuvent alors s'écrire de la manière suivante:

$$F_M (\mathbf{x}_{n_1}^{(1)}, \mathbf{t}_{n_1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{n_N}^{(N)}, \mathbf{t}_{n_N}^{(N)}),$$
$$w_M (\mathbf{x}_{n_1}^{(1)}, \mathbf{t}_{n_1}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}_{n_N}^{(N)}, \mathbf{t}_{n_N}^{(N)}).$$

4.1.5. Processus aléatoires stationnaires et non stationnaires. Passons maintenant à l'exposé des propriétés d'une classe importante de processus aléatoires appelés processus aléatoires *stationnaires*.

Le processus aléatoire $\xi(t)$ est dit stationnaire (au sens strict) si sa densité de probabilité $w_n (x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ d'ordre quelconque n ne change pas lorsque l'on déplace tout le groupe de points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ le long de l'axe du temps, c'est-à-dire si pour des n et τ quelconques on a

$$w_n (x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$
$$= w_n (x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_n+\tau). \quad (4.30)$$

Autrement dit, un processus sera stationnaire si l'expression de sa densité de probabilité d'ordre quelconque ne dépend pas de la position de l'origine des temps. Si les caractéristiques de probabilité du processus aléatoire changent lors d'un déplacement arbitraire de l'origine des temps, ce processus n'est pas stationnaire.

Conformément à la définition ci-dessus on note les propriétés suivantes d'un processus stationnaire:

a) sa densité de probabilité unidimensionnelle est la même à tout instant, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du temps

$$w_1 (x, t) = w_1 (x, t+\tau) = w_1 (x), \quad (4.31)$$

b) sa densité de probabilité bidimensionnelle ne peut dépendre que de la différence $t_2 - t_1$

$$w_2 (x_1, x_2, t_1, t_2) = w_2 (x_1, x_2, t_2 - t_1), \quad (4.31')$$

c) sa densité de probabilité tridimensionnelle ne peut dépendre que des deux différences $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$

$$w_3 (x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = w_3 (x_1, x_2, x_3, t_3 - t_1, t_2 - t_1). \quad (4.31'')$$

Il est évident que la densité de probabilité à n dimensions sera seulement fonction de $(n - 1)$ paramètres temporels $t_i - t_1$, $i = 2, \ldots, n$.

Comme les densités de probabilité unidimensionnelles des processus stationnaires ne dépendent pas du temps, les moments de ces processus, en particulier leur moyenne et leur variance, sont des

grandeurs constantes indépendantes du temps. L'inverse n'est en général pas vrai, car (4.31) n'est qu'une condition nécessaire mais *non suffisante* de stationnarité. Il est évident que dans les cas exceptionnels (par exemple, pour les processus quasi déterministes) où la distribution unidimensionnelle détermine la distribution d'ordre quelconque, l'invariabilité dans le temps de $w_1(x)$ suffit à elle seule pour conclure à la stationnarité du processus.

Comme la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x_1, x_2, t_2 - t_1)$ d'un processus aléatoire stationnaire ne dépend que de la différence $\tau = t_2 - t_1$ la fonction de corrélation de ce processus ne dépend elle aussi que de la seule variable τ

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2, \tau)\, dx_1 dx_2. \tag{4.32}$$

L'inverse n'est en général pas vrai, car la condition (4.31′) n'est qu'*une des conditions nécessaires* mais non suffisante de stationnarité.

Pour un très grand nombre de problèmes pratiques la fonction de corrélation est une caractéristique suffisamment complète de la stationnarité du processus aléatoire. Une branche théorique étudiant les propriétés des processus aléatoires qui sont déterminées par leurs moments du premier et du second ordre a reçu le nom de *théorie corrélationnelle*. Comme les densités de probabilité multidimensionnelles ne font pas objet de cette théorie, il est naturel de considérer comme stationnaire, dans le cadre de cette théorie, tout processus aléatoire dont la moyenne et la variance sont indépendantes du temps, et la fonction de corrélation ne dépend que de la différence $\tau = t_2 - t_1$. Les processus aléatoires satisfaisant à ces conditions sont dits *stationnaires au sens général* (ou stationnaires au sens de A. Khintchine).

La stationnarité au sens général diffère de la stationnarité conformément à la définition (4.30). Des processus aléatoires stationnaires au sens strict le seront évidemment toujours au sens général, l'inverse n'étant pas vrai.

Naturellement dans le cadre de la théorie corrélationnelle, il suffit de connaître la densité de probabilité du premier et du second ordre du processus aléatoire *).

Notons que la densité de probabilité bidimensionnelle et surtout la fonction de corrélation ne caractérisent pas le processus aléatoire d'une manière aussi complète que la densité de probabilité multidimensionnelle. De plus, les mêmes fonctions de corrélation peuvent correspondre à des processus différents. En d'autres termes,

*) Certains auteurs appellent les processus stationnaires au sens général processus stationnaires du second ordre. Généralisant cette notion, ils introduisent les processus stationnaires d'ordre r pour lesquels *tous* les moments d'ordre non supérieur à r ne dépendent pas de l'origine des temps.

l'égalité des fonctions de corrélation ne signifie pas que les processus eux-mêmes sont identiques.

Il y a cependant une exception à cette règle. Il existe une classe de processus aléatoires stationnaires appelés processus *normaux* (ou de Laplace-Gauss), très répandus en radiotechnique et dans bien d'autres applications (voir § 4.4) pour lesquels la fonction de corrélation détermine entièrement les distributions multidimensionnelles. Pour les processus normaux les notions de stationnarité au sens strict et au sens général coïncident. Remarquons également que si la densité de probabilité bidimensionnelle des processus de Markov dépend d'un seul paramètre, ces processus sont stationnaires au sens strict [voir (4.21)].

La notion de stationnarité peut être étendue à un ensemble de processus aléatoires. Deux processus aléatoires sont dits *stationnairement liés*, si leur densité de probabilité conjointe d'ordre quelconque ne dépend pas du choix de l'origine des temps.

Le processus aléatoire $\xi(t)$ est dit processus à *accroissements stationnaires*, si pour toute valeur donnée de τ

$$\Delta\xi(t) = \xi(t) - \xi(t-\tau) \tag{4.33}$$

est un processus aléatoire stationnaire. Il est évident que tout processus stationnaire est forcément un processus aléatoire à accroissements stationnaires, mais l'inverse n'est pas vrai. Ainsi, par exemple, la somme d'un processus stationnaire et d'un processus non stationnaire de la forme $\xi_0 + \xi_1 t$ (où ξ_0 et ξ_1 sont des variables aléatoires) est un processus aléatoire non stationnaire à accroissements stationnaires.

Un processus à accroissements indépendants (voir § 4.1.3) pour lequel la distribution de la différence $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ ne dépend que de $t_k - t_{k-1}$ est un processus à accroissements stationnaires indépendants.

On peut introduire la notion plus générale de processus aléatoire *n accroissements stationnaires*. C'est un processus pour lequel

$$\Delta^n\xi(t) = \xi(t) - \binom{n}{1}\xi(t-\tau) + \\ + \binom{n}{2}\xi(t-2\tau) - \ldots + (-1)^n\xi(t-n\tau) \tag{4.34}$$

est un processus aléatoire stationnaire.

Bien que dans de nombreux cas pratiques on puisse avec assez de précision considérer le processus étudié comme étant stationnaire, il y a un grand nombre de problèmes dont la solution exige l'étude de processus non stationnaires. Un exemple simple de processus non stationnaire est la somme d'un processus aléatoire stationnaire et d'un processus déterministe. Un autre exemple est fourni par le processus quasi déterministe pouvant s'écrire sous la forme de poly-

nômes en t à coefficients aléatoires

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{n}\xi_k t^k. \qquad (4.35)$$

Les processus aléatoires impulsionnels (voir chapitre 11), c'est-à-dire les suites d'impulsions à paramètres aléatoires sont des processus non stationnaires. Des oscillations modulées ne sont pas stationnaires au sens probabiliste même si la fréquence porteuse est modulée par un processus aléatoire stationnaire (voir chapitre 12).

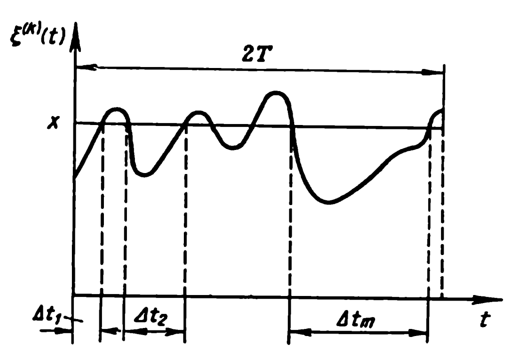


Fig. 4.3. Temps total où la réalisation d'un processus aléatoire se trouve dans un intervalle donné

4.1.6. Processus aléatoires ergodiques. Un processus aléatoire est dit *ergodique* si chacune de ses caractéristiques obtenue en prenant la moyenne sur toutes les réalisations possibles est, avec une probabilité tendant vers l'unité, égale à la moyenne *temporelle* obtenue en prenant la moyenne sur un intervalle de temps suffisamment grand, ceci pour une seule réalisation du processus aléatoire. Comme la moyenne d'un processus aléatoire ergodique peut indifféremment être prise par deux méthodes, il n'est pas nécessaire d'étudier un grand nombre de réalisations, dont souvent le chercheur ne dispose pas, mais il suffit d'étudier une seule réalisation que l'on observera durant un temps suffisamment long.

Considérons quelques-unes des *caractéristiques temporelles* des réalisations des processus aléatoires. Observons durant un temps suffisamment long $2T$ une certaine réalisation du processus aléatoire $\xi^{(k)}(t)$. Supposons que durant le temps $2T$ le temps total où le processus se trouve au-dessous d'un niveau de seuil x soit égal à (fig. 4.3)

$$\tau_T^{(k)}=\sum_i \Delta t_i=\int_{-T}^{T} u\,[x-\xi^k(t)]\,dt,$$

où $u(y)=\begin{cases}1, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$

La limite

$$\nu^{(k)}(x_1,\ x_2)=\lim_{T\to 8}\frac{\tau_T^{(k)}}{T} \qquad (4.36)$$

s'appelle *temps relatif* où la réalisation $\xi^{(k)}(t)$ se trouve dans l'intervalle (x_1, x_2).

La *moyenne temporelle* *) de la réalisation est

$$\langle \xi^{(k)}(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\, dt, \tag{4.37}$$

on peut l'interpréter comme la *composante constante* de cette réalisation. Le carré moyen temporel est égal à

$$\langle [\xi^{(k)}(t)]^2 \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\xi^{(k)}(t)]^2\, dt. \tag{4.38}$$

Si $\xi^{(k)}(t)$ est la variation de la tension ou du courant sur une charge d'un ohm, $\langle [\xi^{(k)}(t)]^2 \rangle$ est la *puissance moyenne* (carré de la valeur effective) de la réalisation. Enfin nous allons mentionner la *fonction de corrélation temporelle* de la réalisation $\xi^{(k)}(t)$

$$\langle \xi^{(k)}(t)\, \xi^{(k)}(t+\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\, \xi^{(k)}(t+\tau)\, dt \tag{4.39}$$

et la *fonction de corrélation temporelle mutuelle* des réalisations $\xi^{(k)}(t)$ et $\eta^{(r)}(t)$

$$\langle \xi^{(k)}(t)\, \eta^{(r)}(t+\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\, \eta^{(r)}(t+\tau)\, dt. \tag{4.40}$$

Notons que les moyennes temporelles des réalisations n'ont pas de valeurs finies pour tout processus aléatoire. Mais même si les moyennes temporelles existent, elles peuvent ne pas être égales pour différentes réalisations du processus aléatoire. Font exception à cette règle les processus ergodiques, dont les moyennes temporelles pour toutes les réalisations du processus aléatoire et pratiquement quelle que soit la loi de ces réalisations sont les mêmes et coïncident avec les moyennes correspondantes calculées sur l'ensemble de réalisations.

Pour qu'un processus aléatoire soit *ergodique* il faut et il suffit, premièrement, qu'il soit *stationnaire* (au sens strict) et, deuxièmement, qu'il soit *métriquement transitif*, c'est-à-dire qu'une partie quelconque de l'ensemble des réalisations du processus aléatoire dont la mesure de probabilité est différente de zéro ou de l'unité ne soit plus stationnaire (au sens strict).

Evidemment un processus aléatoire ergodique doit être obligatoirement stationnaire. En effet, les moyennes temporelles telles

---

*) La moyenne temporelle est notée à l'aide du symbole $\langle\ \rangle$.

que, par exemple, la composante constante ou la puissance moyenne [voir (4.37) et (4.38)] sont des nombres constants, tandis que pour un processus non stationnaire le premier et le second moments (moyennes calculées sur l'ensemble de réalisations) peuvent être des fonctions du temps et, par conséquent, les moyennes temporelles ne coïncideront pas avec les moyennes calculées sur l'ensemble. Il en est de même pour la fonction de corrélation temporelle (4.40) qui dépend d'un seul argument et pour la fonction de corrélation qui, dans le cas d'un processus non stationnaire, peut dépendre de deux arguments.

Cependant la stationnarité n'est pas une condition suffisante. Par exemple, le processus

$$\xi(t) = \eta(t) + \zeta,$$

où $\eta(t)$ est un processus ergodique, ζ une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est $w_1(x)$, $-\infty < x < +\infty$, est un processus stationnaire, mais non ergodique. Il est évident que $\xi(t)$ est stationnaire (au sens strict). Cependant la condition de transitivité métrique n'est pas remplie. En effet, divisons l'ensemble de réalisations de $\xi(t)$ en deux parties: d'une part, on prend les réalisations où les valeurs possibles de la variable aléatoire $\zeta > 0$, et de l'autre, celles où $\zeta < 0$. Soient $p_1 = \int_0^\infty w_1(x)\,dx > 0$ et $p_2 = \int_{-\infty}^0 w_1(x)\,dx = 1 - p_1$ avec $p_1 + p_2 = 1$. Il est évident que chacune des parties est stationnaire au sens strict pour des mesures de probabilité p_1 ou p_2 différentes de 0 et de 1.

Il est parfois assez difficile de vérifier la condition de transitivité métrique. Cependant dans certains cas (comme nous le montrerons plus loin) il est facile de donner les conditions suffisantes d'ergodicité, et dans d'autres, les conditions de convergence de certaines moyennes temporelles vers les moyennes calculées sur l'ensemble des réalisations d'un processus aléatoire stationnaire (voir problème 4.2).

Ainsi, toute réalisation d'un processus aléatoire ergodique a les propriétés de tout l'ensemble, donc la moyenne temporelle sur une réalisation coïncide à tout instant avec la moyenne correspondante calculée sur l'ensemble de réalisations. En particulier, pour des processus ergodiques on a

$$m_k\{\xi(t)\} = m_1\{\xi^k(t)\} = \langle[\xi^{(r)}(t)]^k\rangle, \qquad (4.41)$$

$$B(\tau) = m_1\{\xi(t)\,\xi(t+\tau)\} = \langle\xi^{(r)}(t)\,\xi^{(r)}(t+\tau)\rangle, \qquad (4.41')$$

ceci quel que soit r, c'est-à-dire quelle que soit la réalisation pour laquelle on prend la moyenne dans le temps. Par exemple, il vient

de (4.41), (4.37) et (4.38) que la moyenne d'un processus ergodique peut être interprétée comme la composante constante, et le second moment comme la puissance moyenne du processus.

Le temps moyen durant lequel la réalisation d'un processus ergodique se trouve au-dessous du seuil x coïncide avec la probabilité pour que la valeur du processus aléatoire à tout instant soit inférieure ou égale à x, c'est-à-dire

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u\,[x-\xi^{(k)}(t)]\,dt = P\,\{\xi(t)\leqslant x\} = F_1(x), \tag{4.42}$$

où $u\,(x)$ est un saut unité (voir page 46).

On peut étendre la notion d'ergodicité à un ensemble de processus stationnaires. Deux processus aléatoires sont *conjointement ergodiques* si la moyenne sur l'ensemble de couples de réalisations de ces processus est égale à la moyenne temporelle prise pour un couple unique de réalisations de ces processus aléatoires. En particulier la fonction de corrélation mutuelle des processus aléatoires conjointement ergodiques $\xi\,(t)$ et $\eta\,(t)$ est égale à

$$B_{\xi\eta}(\tau) = \langle\xi^{(k)}(t)\,\eta^{(r)}(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi^{(k)}(t)\,\eta^{(r)}(t+\tau)\,dt \tag{4.43}$$

quels que soient k et r.

4.1.7. Processus aléatoires complexes. En général, dans les applications on envisage des processus aléatoires réels. Cependant il est parfois commode d'introduire la notion plus générale de processus aléatoire *complexe*

$$\zeta\,(t) = \xi\,(t) + i\eta\,(t).$$

Ainsi, un processus aléatoire complexe est déterminé par *deux* processus aléatoires réels $\xi\,(t)$ et $\eta\,(t)$ correspondant à sa partie réelle et à sa partie imaginaire. La distribution d'ordre n de $\zeta\,(t)$ est donnée par la distribution conjointe à $2n$ dimensions de $\xi\,(t)$ et de $\eta\,(t)$. La moyenne, la variance et la fonction de corrélation d'un processus complexe sont données par les formules (cf. § 2.3.7)

$$\begin{aligned} m_{1\zeta}\,(t) &= m_{1\xi}\,(t) + im_{1\eta}\,(t),\\ M_{2\zeta}\,(t) &= M_2\,\{\,|\,\zeta\,(t)\,|\,\} = M_{2\xi}\,(t) + M_{2\eta}\,(t), \end{aligned} \tag{4.44'}$$

$$\begin{aligned} B_\zeta\,(t_1,\ t_2) &= m_1\,\{\zeta\,(t_1)\,\overline{\zeta\,(t_2)}\} = \\ &= B_\xi\,(t_1,\ t_2) + B_\eta\,(t_1,\ t_2) + i\,[B_{\xi\eta}\,(t_1,\ t_2) - \\ &\qquad - B_{\eta\xi}\,(t_1,\ t_2)]. \end{aligned} \tag{4.44''}$$

A titre d'exemple de représentation complexe d'un processus aléatoire réel on peut citer le signal analytique (voir annexe VI).

La partie réelle du signal analytique correspond au processus aléatoire considéré $\xi(t)$, et sa partie imaginaire $\eta(t)$ représente la transformation *intégrale* de Hilbert (en moyenne quadratique) de $\xi(t)$, c'est-à-dire qu'elle est déterminée par la partie réelle.

4.2. CARACTÉRISTIQUES ÉNERGÉTIQUES DES PROCESSUS ALÉATOIRES

4.2.1. Fonction de corrélation. Considérons les propriétés générales de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire. Si le processus aléatoire ne comprend pas de composantes quasi déterministes (processus purement aléatoire), la corrélation entre $\xi(t+\tau)$ et $\xi(t)$ lorsque τ augmente indéfiniment doit s'affaiblir, à la limite pour $\tau \to \infty$ ces grandeurs sont statistiquement indépendantes. Comme la moyenne du produit de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des moyennes des facteurs et comme de plus pour un processus stationnaire, la moyenne ne dépend pas du temps, on a

$$\lim_{\tau\to\infty} B_\xi(\tau) = B_\xi(\infty) = \lim_{\tau\to\infty} m_1\{\xi(t)\,\xi(t+\tau)\} = a_\xi^2$$

ou

$$a_\xi = \sqrt{B_\xi(\infty)}. \tag{4.45}$$

Ainsi, la moyenne d'un processus aléatoire stationnaire est égale à la racine carrée de la valeur asymptotique de la fonction de corrélation pour $\tau \to \infty$.

De plus

$$\lim_{\tau\to 0} B_\xi(\tau) = B_\xi(0) = m_1\{\xi^2(t)\} = m_2\{\xi(t)\}, \tag{4.45'}$$

et comme $m_2 = \sigma_\xi^2 + a_\xi^2$ et que la variance d'un processus aléatoire ne dépend pas du temps, on a

$$\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) - a_\xi^2$$

ou, compte tenu de (4.45),

$$\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) - B_\xi(\infty). \tag{4.45''}$$

Ainsi, la variance d'un processus aléatoire stationnaire est égale à la différence des valeurs de la fonction de corrélation pour $\tau = 0$ et $\tau = \infty$. La variance des processus ergodiques est égale à la différence de la puissance moyenne du processus et de la puissance de la composante constante.

La stationnarité des processus, donc l'indépendance des densités de probabilité de l'origine des temps, implique que la fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$ soit une fonction paire

$$B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau). \tag{4.46}$$

Comme

$$m_1 \{[\xi(t) \pm \xi(t+\tau)]^2\} = 2B_\xi(0) \pm 2B_\xi(\tau) \geqslant 0,$$

on a

$$B_\xi(0) \geqslant |B_\xi(\tau)|. \quad (4.47)$$

Ainsi, aucune valeur de la fonction de corrélation ne peut être supérieure à sa valeur correspondant à $\tau = 0$.

La formule (4.47) découle d'une relation plus générale à laquelle doit satisfaire la fonction de corrélation

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_\xi(t_i - t_k)\lambda_i\lambda_k \geqslant 0 \quad (4.47')$$

quels que soient $n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Sur la figure 4.4 on trouvera une courbe typique de la fonction de corrélation d'un processus purement aléatoire illustrant les propriétés mentionnées ci-dessus de cette fonction. Il faut cependant remarquer que la tendance asymptotique de $B_\xi(\tau)$ vers la grandeur a_ξ^2 pour $\tau \to \infty$ n'est pas toujours monotone, il peut se faire que les valeurs de la fonction de corrélation oscillent autour de a_ξ^2, tendant vers cette valeur avec l'augmentation de τ.

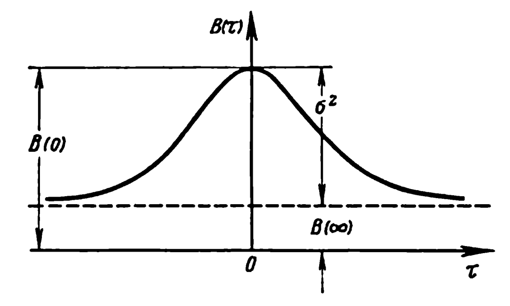


Fig. 4.4. Fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire

Souvent à la place du processus aléatoire on considère ses *écarts* par rapport à la valeur moyenne (appelés parfois pulsations ou fluctuations)

$$\xi_0(t) = \xi(t) - a_\xi.$$

La fonction de corrélation $B_{\xi_0}(\tau)$ de l'écart par rapport à la moyenne pour un processus aléatoire stationnaire est égale à

$$B_{\xi_0}(\tau) = m_1 \{\xi(t)\xi(t+\tau) - a_\xi\xi(t) - a_\xi\xi(t+\tau) + a_\xi^2\},$$

et comme la moyenne de la somme est égale à la somme des moyennes, on a

$$B_{\xi_0}(\tau) = B_\xi(\tau) - a_\xi^2. \quad (4.48)$$

Donc la moyenne de $\xi_0(t)$ est nulle, et la variance

$$\sigma_\xi^2 = B_{\xi_0}(0). \quad (4.49)$$

Le rapport

$$R_\xi(\tau) = \frac{B_\xi(\tau) - a_\xi^2}{\sigma_\xi^2} \tag{4.50}$$

est appelé *coefficient de corrélation* du processus aléatoire stationnaire *). La grandeur $R_\xi(\tau)$ est parfois appelée fonction de corrélation *normée*.

Si la moyenne du processus est nulle, on a

$$R_\xi(\tau) = \frac{B_\xi(\tau)}{B_\xi(0)} . \tag{4.50'}$$

Le coefficient de corrélation $R_\xi(\tau)$ a toutes les propriétés de la fonction de corrélation. C'est une fonction paire de son argument. La valeur maximale correspond à $\tau = 0$, et en vertu de (4.47) et (4.50) $R_\xi(0) = 1$, et $|R_\xi(\tau)| \leqslant 1$ pour tout τ. Pour un processus purement aléatoire $R_\xi(\tau) \to 0$ pour $\tau \to \infty$. Le coefficient de corrélation peut prendre des valeurs nulles même lorsque τ est fini. Cependant si le coefficient de corrélation est nul, ceci n'implique pas forcément que deux variables aléatoires sont indépendantes, tandis que deux variables aléatoires indépendantes ne sont jamais corrélées.

Pour un processus aléatoire stationnaire on peut toujours trouver un τ_0 tel que pour $\tau > \tau_0$ les variables $\xi(t)$ et $\xi(t+\tau)$ soient *pratiquement* non corrélées en ce sens que pour $\tau > \tau_0$ la valeur absolue du coefficient de corrélation reste inférieure à une certaine valeur donnée, par exemple

$$|R_\xi(\tau)| < 0{,}05. \tag{4.51}$$

La grandeur τ_0 est appelée *temps* (ou intervalle) *de corrélation.*

Parfois on définit le temps de corrélation comme la demi-largeur de la base du rectangle de hauteur unité, dont l'aire est égale à l'aire limitée par la courbe du module du coefficient de corrélation, c'est-à-dire

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(\tau)|\, d\tau. \tag{4.52}$$

Notons que la fonction de corrélation d'un processus aléatoire *non stationnaire* est le noyau symétrique d'une forme quadratique définie positive, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B(t_i, t_k)\, \lambda_i \lambda_k \geqslant 0$, ceci quels que soient $n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ [voir (4.47')]. Ceci entraîne en particulier la relation

$$|B(t_1, t_2)| \leqslant \sqrt{B(t_1, t_1)\, B(t_2, t_2)}.$$

*) Il est à noter que dans la théorie des processus aléatoires le coefficient de corrélation n'est pas un nombre, mais une fonction du déplacement temporel τ.

4.2.2. Fonction de corrélation mutuelle. Soient $\xi(t)$ et $\eta(t)$ des processus aléatoires stationnaires et stationnairement liés *). Les fonctions de corrélation mutuelle $B_{\xi\eta}$ et $B_{\eta\xi}$ de ces processus satisfont à la relation suivante:

$$m_1\{\xi(t)\,\eta(t+\tau)\} = m_1\{\eta(t+\tau)\,\xi(t)\} = m_1\{\eta(t)\,\xi(t-\tau)\}$$

ou

$$B_{\xi\eta}(\tau) = B_{\eta\xi}(-\tau). \tag{4.53}$$

Bien que les fonctions de corrélation mutuelle de deux processus aléatoires stationnairement liés dépendent seulement de la différence des temps, elles ne sont pas obligatoirement paires (contrairement à la fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire), c'est-à-dire que l'on a

$$B_{\xi\eta}(\tau) \neq B_{\xi\eta}(-\tau). \tag{4.53'}$$

Considérons ensuite la grandeur essentiellement positive $m_1\left\{\left[\frac{\xi(t)}{\sqrt{B_\xi(0)}} \pm \frac{\eta(t+\tau)}{\sqrt{B_\eta(0)}}\right]\right\}^2$. Il est facile de montrer que la moyenne mentionnée est égale à

$$2 \pm \frac{2B_{\xi\eta}(\tau)}{\sqrt{B_\xi(0)\,B_\eta(0)}} \geqslant 0,$$

par conséquent, la fonction de corrélation mutuelle de deux processus aléatoires stationnaires et stationnairement liés doit satisfaire à l'inégalité suivante:

$$|B_{\xi\eta}(\tau)| \leqslant \sqrt{B_\xi(0)\,B_\eta(0)} \tag{4.54}$$

qui est analogue à (4.47).

La grandeur

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \frac{B_{\xi\eta}(\tau) - a_\xi a_\eta}{\sqrt{\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2}} \tag{4.55}$$

est appelée *fonction de corrélation mutuelle normée* ou *coefficient de corrélation mutuelle*.

Si les moyennes des processus sont nulles, on a

$$R_{\xi\eta}(\tau) = \frac{B_{\xi\eta}(\tau)}{\sqrt{B_\xi(0)\,B_\eta(0)}}\,. \tag{4.55'}$$

Considérons maintenant le processus aléatoire $\xi(t)$, somme de processus aléatoires, soit

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t),$$

*) Notons que si $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont stationnaires, ceci ne veut pas dire qu'ils sont stationnairement liés.

et cherchons sa fonction de corrélation. Par définition de la fonction de corrélation on a

$$B_\xi(t_1, t_2) = m_1\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t_1) \sum_{j=1}^{n} \xi_j(t_2)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_1\{\xi_i(t_1)\,\xi_i(t_2)\} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_1\{\xi_i(t_1)\,\xi_j(t_2)\}$$

ou

$$B_\xi(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} B_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{\xi_i\xi_j}(t_1, t_2). \qquad (4.56)$$

Ainsi, la fonction de corrélation d'une somme de processus aléatoires stationnaires est égale à la somme des fonctions de corrélation de chacun d'eux plus la somme de toutes les fonctions de corrélation mutuelle pouvant être formées à partir d'un couple quelconque de processus aléatoires sommés.

Pour des processus aléatoires non cohérents dont les moyennes sont nulles, (4.56) devient

$$B_\xi(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} B_{\xi_i}(t_1, t_2), \qquad (4.57)$$

c'est-à-dire que la fonction de corrélation d'une somme de processus aléatoires est égale à la somme des fonctions de corrélation des composantes.

4.2.3. Spectre énergétique d'un processus aléatoire stationnaire. Lors de l'étude des processus déterministes on utilise souvent avec succès l'analyse harmonique: séries de Fourier pour les processus périodiques, intégrales de Fourier pour les processus apériodiques. Il serait désirable d'avoir également un appareil mathématique simple et efficace adapté à l'étude des processus aléatoires. On ne peut appliquer directement l'analyse harmonique classique au cas des processus aléatoires, les densités spectrales du développement de Fourier obtenues pour les réalisations de ces processus n'étant pas finies pour toutes les fréquences. Néanmoins l'analyse harmonique peut être généralisée en prenant la moyenne des développements spectraux obtenus pour différentes réalisations.

Considérons une réalisation $\xi^{(k)}(t)$ du processus aléatoire $\xi(t)$. Soit de plus $\xi_T^{(k)}(t)$ une réalisation tronquée, égale à zéro à l'extérieur de l'intervalle $|t| \leqslant \frac{T}{2}$ et coïncidant avec $\xi^{(k)}(t)$ à l'intérieur de cet intervalle. Le spectre (transformée de Fourier) de la fonction

$\xi_T^{(k)}(t)$ est

$$Z_T^{(k)}(i\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\xi_T^{(k)}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt. \tag{4.58}$$

Si $\xi_T^{(k)}(t)$ est la tension ou le courant dans une charge de 1 ohm, la puissance moyenne à la pulsation ω rapportée à la bande $\Delta f=\frac{1}{T}$ est égale à

$$G_T^{(k)}(\omega)=\frac{2}{T}\,|Z_T^{(k)}(i\omega)|^2=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\xi_T^{(k)}(t_1)\,\xi_T^{(k)}(t_2)\,e^{-i\omega(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2.$$

Pour $T\to\infty$ la fonction aléatoire $G_T(\omega)$ *ne tend pas* en général vers une limite déterminée et représente également une fonction aléatoire. La moyenne de $G_T(\omega)$ sur l'ensemble des réalisations est

$$F_T(\omega)=m_1\{G_T(\omega)\}=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}m_1\{\xi_T(t_1)\,\xi_T(t_2)\}\,e^{-i\omega(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2.$$

Introduisant la fonction de corrélation $B(t_1, t_2)$ du processus $\xi(t)$, on peut écrire $F_T(\omega)$ sous la forme

$$F_T(\omega)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}B(t_1, t_2)\,e^{-i\omega(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2. \tag{4.59}$$

Si le processus aléatoire $\xi(t)$ est stationnaire (tout au moins au sens général), on a $B(t_1, t_2)=B(t_2-t_1)$ et par conséquent

$$F_T(\omega)=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}B(t_1-t_2)\,e^{-i\omega(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2. \tag{4.60}$$

En divisant en deux le domaine d'intégration (t_1, t_2) dans (4.60) suivant la diagonale d'un rectangle et en introduisant les variables $\tau=t_1-t_2$, t_1 pour le domaine se trouvant au-dessus de la diagonale $(\tau>0)$ et $\tau=t_1-t_2$, $-t_2$ pour le domaine se trouvant sous

la diagonale ($\tau < 0$), on obtient (fig. 4.5)

$$F_T(\omega) = \frac{2}{T}\Bigg[\int_0^T \int_{\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, dt_1\, d\tau +$$

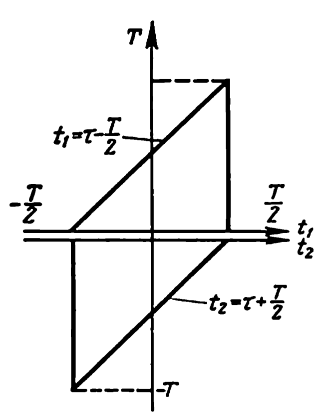


Fig. 4.5. Domaines d'intégration

$$+ \int_{-T}^{0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau+\frac{T}{2}} B(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, dt_2\, d\tau\Bigg] =$$

$$= \frac{2}{T}\Bigg[\int_0^T (T-\tau)\, B(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau + \int_{-T}^{0} (T+\tau)\, B(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau\Bigg]$$

ou

$$F_T(\omega) = 2\int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) B(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \tag{4.61}$$

La limite de $F_T(\omega)$ pour $T \to \infty$ est égale à *)

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} F_T(\omega) = \lim_{T\to\infty} m_1\left\{\frac{2}{T}\,|Z_T^{(k)}(i\omega)|^2\right\} = 2\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \tag{4.62}$$

ceci si l'intégrale dans (4.62) existe, c'est-à-dire si la fonction de corrélation $B(\tau)$ est absolument intégrable $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)|\, d\tau \text{ est bornée}\right)$. On appelle *spectre énergétique* d'un processus aléatoire stationnaire (tout au moins au sens général) la fonction $F(\omega)$ de la fréquence, c'est-à-dire la limite pour $T \to \infty$ de la densité spectrale de la puis-

*) Bien que la limite de $m_1\left\{\frac{2}{T}\,|Z_T(i\omega)|^2\right\}$ existe, on ne peut pas affirmer que la fonction aléatoire $G_T(\omega) = \frac{2}{T}\,|Z_T(i\omega)|^2$ tend (par exemple en moyenne quadratique) vers $F(\omega)$ pour $T \to \infty$. On peut montrer (voir [7], [12]) que la variance de $G_T(\omega)$ pour $T \to \infty$ *reste finie*, c'est-à-dire que la limite considérée pour toutes les fréquences est une variable aléatoire et par conséquent elle ne peut pas converger vers $F(\omega)$.

sance moyenne du processus, la moyenne étant calculée sur l'ensemble de réalisations. Ce spectre donne seulement la moyenne de la distribution de l'énergie du processus suivant les fréquences des composantes harmoniques, mais il ne tient pas compte de leurs phases.

En vertu de (4.62) le spectre énergétique $F(\omega)$ et la fonction de corrélation $B(\tau)$ d'un processus aléatoire stationnaire sont liés entre eux par deux transformations de Fourier (*théorème de Wiener-Khintchine*)

$$F(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=4\int_{0}^{\infty} B(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \qquad (4.63)$$

$$B(\tau)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega. \qquad (4.64)$$

Comme $G_T(\omega)$ et $F_T(\omega)=m_1\{G_T(\omega)\}$ ne sont pas négatifs, le spectre énergétique $F(\omega)$ est une fonction non négative de la fréquence (de la pulsation). De plus, en vertu de (4.63), $F(\omega)$ est une *fonction paire*. Remarquons que dans la formule (4.64), lorsque l'on utilise la transformation de Fourier sous forme exponentielle, la notion de distribution spectrale de la puissance moyenne du processus est étendue à toutes les pulsations réelles de $\omega=-\infty$ à $\omega=+\infty$. Seules les pulsations positives $\omega\geqslant 0$ ont un sens physique. Pour pouvoir utiliser la forme exponentielle de l'intégrale de Fourier, on sépare chaque composante spectrale en deux composantes d'égale intensité $\frac{1}{2}F(\omega)$ et $\frac{1}{2}F(-\omega)$ de telle sorte que le spectre énergétique total $F(\omega)$, étendu aux fréquences négatives, devient une fonction paire [voir (4.63)]. Il ne faut cependant pas oublier que le spectre énergétique ne reste pair que si l'origine des coordonnées se trouve au point $\omega=0$ et peut ne plus l'être lorsqu'elle est déplacée en un autre point.

Comme la transformation de Fourier n'est possible que sur une fonction absolument intégrable, les formules (4.63) et (4.64) ne sont vraies que si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)|\,d\tau\leqslant M,\quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|\,d\omega\leqslant N, \qquad (4.65)$$

où M et N sont des grandeurs constantes. Cette condition réduit le domaine d'application du théorème de Wiener-Khintchine aux processus stationnaires dont la moyenne est nulle et qui de plus ne comportent pas de composantes quasi déterministes. Si cette condition se trouve remplie, le spectre énergétique $F(\omega)$ d'un processus aléatoire stationnaire est une fonction continue de la pulsation ω. Nous allons montrer ci-dessous comment on peut généraliser les formules (4.63) et (4.64) aux processus stationnaires ayant des composantes quasi déterministes.

Conformément à (4.64) pour $\tau = 0$ la puissance moyenne d'un processus stationnaire

$$B(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega \qquad (4.66)$$

est égale à l'aire de son spectre énergétique. La densité spectrale de la puissance moyenne pour $\omega = 0$

$$F(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, d\tau \qquad (4.67)$$

est égale au double de l'aire limitée par la courbe de la fonction de corrélation. Si $B(\tau)$ n'est pas négative, $F(0)$ est proportionnelle au temps de corrélation du processus [voir (4.52')]

$$\tau_0 = \frac{F(0)}{4B(0)}. \qquad (4.67')$$

On appelle *largeur de bande du spectre énergétique* la valeur de l'aire limitée par la courbe du spectre énergétique rapportée à la densité spectrale pour une certaine pulsation caractéristique ω_0:

$$\Delta_b = \frac{1}{2\pi F(\omega_0)} \int_{0}^{\infty} F(\omega)\, d\omega = \frac{B(0)}{F(\omega_0)}. \qquad (4.68)$$

Cette grandeur peut être interprétée comme la largeur d'un spectre énergétique, uniforme dans la bande Δ_b et équivalent en puissance moyenne au spectre considéré.

La fonction de corrélation $B(\tau)$ et le spectre énergétique $F(\omega)$ d'un processus aléatoire stationnaire, qui sont un couple de transformées de Fourier, ont toutes les propriétés inhérentes à celles-ci. En particulier, plus « large » est le spectre $F(\omega)$, plus « étroite » est la fonction de corrélation $B(\tau)$ et inversement. Autrement dit, le produit du temps de corrélation τ_0 par la largeur de bande Δ_b du spectre énergétique est, pour une famille de spectres énergétiques de forme donnée, une grandeur constante.

Si le processus aléatoire est ergodique, on peut conformément à (4.43) substituer à la fonction de corrélation dans (4.63) la fonction de corrélation temporelle d'une réalisation quelconque de ce processus et trouver ainsi le spectre énergétique du processus d'après une seule réalisation.

4.2.4. Processus à large bande et processus à bande étroite. Un processus aléatoire de spectre énergétique uniforme est à *bande étroite* lorsque le spectre énergétique se trouve concentré essentiellement dans une bande relativement étroite de pulsations autour d'une pulsation fixe ω_0 (fig. 4.6, *a*) ou à *large bande* dans le cas contraire

(fig. 4.6, *b*). La condition de bande étroite peut s'exprimer par l'inégalité

$$\Delta_b \ll \omega_0.$$

Considérons l'expression (4.64) de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire (tout au moins au sens général).

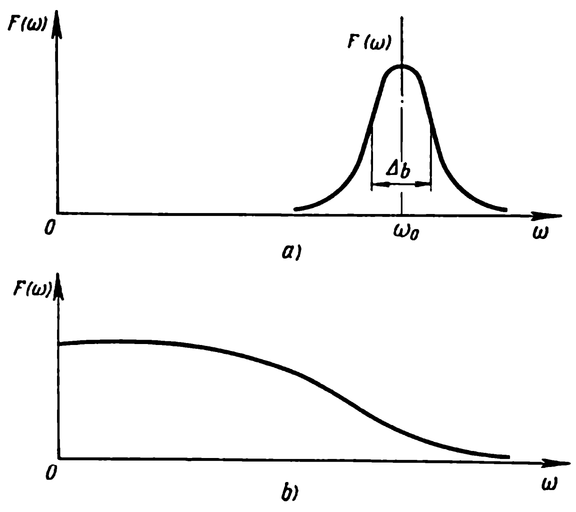


Fig. 4.6. Spectres énergétiques : *a* — à bande étroite ; *b* — à large bande

Remplaçons ω par une nouvelle variable d'intégration égale à la valeur de décalage $\omega_0 - \omega$:

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega_0} F(\omega_0-\omega)\cos(\omega_0-\omega)\tau\,d\omega =$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega_0} F(\omega_0-\omega)\cos\omega\tau\,d\omega\right]\cos\omega_0\tau +$$

$$+ \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega_0} F(\omega_0-\omega)\sin\omega\tau\,d\omega\right]\sin\omega_0\tau.$$

Pour les processus à bande étroite, dont la largeur de bande du spectre est négligeable par rapport à ω_0, les limites supérieures

d'intégration peuvent sans grande erreur être étendues à l'infini *).
Introduisons les notations:

$$F^* (\omega) = F (\omega_0 - \omega), \tag{4.69}$$

$$a_c (\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^* (\omega) \cos \omega\tau \, d\omega, \tag{4.70}$$

$$a_s (\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^* (\omega) \sin \omega\tau \, d\omega, \tag{4.70'}$$

on obtient alors

$$B (\tau) = a_c (\tau) \cos \omega_0\tau + a_s (\tau) \sin \omega_0\tau = \\ = a_0 (\tau) \cos [\omega_0\tau - \mu (\tau)], \tag{4.71}$$

où

$$a_0^2 (\tau) = a_c^2 (\tau) + a_s^2 (\tau);$$
$$\mu (\tau) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_s (\tau)}{a_c (\tau)}.$$

Comme le spectre énergétique $F (\omega)$ est concentré dans une bande étroite de pulsations autour de $\omega = \omega_0$, le spectre $F^* (\omega) = F (\omega - \omega_0)$ est disposé dans le domaine des basses fréquences. En vertu de (4.70) et (4.70′), $a_c (\tau)$ et $a_s (\tau)$ seront des fonctions variant lentement avec τ. Dans ce cas si la largeur de bande du spectre à basse fréquence est de l'ordre de Δ_b, la fonction de corrélation aura une « largeur » de l'ordre de $1/\Delta_b$. Si on peut admettre que $F (\omega)$ est symétrique **) par rapport à la pulsation centrale ω_0, on a $a_s (\tau) = 0$ et (4.71) donne alors:

$$B (\tau) = a_c (\tau) \cos \omega_0\tau = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F^* (\omega) \cos \omega\tau \, d\omega \right] \cos \omega_0\tau. \tag{4.72}$$

---

*) On ne considère ici que la branche *positive* de $F (\omega)$; comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la courbe $F (\omega)$ dans le domaine des fréquences négatives est l'image de sa branche positive réfléchie par rapport à l'axe des ordonnées. L'extension des limites d'intégration de ω_0 à ∞ dans le cas des processus à bande étroite n'influe pas sur les grandeurs des intégrales, car les densités spectrales en cas de décalages supérieurs à ω_0 sont négligeables par rapport aux densités à l'intérieur de l'intervalle $\omega_0 \pm \frac{1}{2} \Delta_b$.

**) En toute rigueur ceci n'est vrai que si $F (\omega)$ est une fonction à support borné, c'est-à-dire différente de zéro sur des intervalles de fréquence finis. Si la branche positive de $F (\omega)$ est différente de zéro pour toutes les pulsations $\omega > 0$, elle n'est jamais symétrique, car elle est limitée à gauche par $\omega = 0$. Cependant pour les processus à bande étroite la branche positive de $F (\omega)$ peut être considérée comme symétrique par rapport à ω_0, l'erreur commise diminuant au fur et à mesure de l'augmentation de ω_0/Δ_b.

Par conséquent, la fonction de corrélation d'un processus à bande étroite dont le spectre est symétrique au voisinage de la haute fréquence, c'est-à-dire à ω_0, n'est autre chose que, multipliée par $\cos \omega_0 \tau$, la fonction de corrélation $a_c(\tau)$ correspondant au spectre $F^*(\omega)$ obtenu à partir du spectre initial par décalage de ω_0 vers les fréquences basses. Le temps de corrélation d'un processus à bande étroite est donné par la formule [cf. (4.52)]

$$\tau_0 = \frac{1}{B(0)} \int_0^\infty a_c(\tau)\, d\tau. \tag{4.73}$$

Considérons maintenant le cas inverse d'un processus à bande étroite, il s'agit du spectre énergétique d'un processus aléatoire à bande très large. Supposons que la densité spectrale $F(\omega)$ de la puissance moyenne du processus conserve une valeur constante jusqu'à des fréquences très élevées. La fonction de corrélation $B(\tau)$ d'un tel processus ne sera différente de zéro que dans un petit intervalle de valeurs de son argument au voisinage de l'origine des coordonnées, c'est-à-dire pour des τ petits. Le spectre énergétique

$$F(\omega) = 2N_0 = \text{const}, \tag{4.74}$$

uniforme sur toutes les fréquences, représente une idéalisation mathématique commode pour l'étude des spectres du type mentionné.

On appelle « *bruit blanc* » un processus aléatoire ayant un spectre uniforme sur toutes les fréquences *). La fonction de corrélation du bruit blanc est

$$B(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, d\omega = N_0 \delta(\tau), \tag{4.75}$$

c'est-à-dire une *fonction delta* à l'origine des coordonnées (voir annexe III).

Le coefficient de corrélation du bruit blanc est

$$R(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \tag{4.76}$$

Ainsi la propriété essentielle du bruit blanc est que deux quelconques de ses valeurs (mêmes infiniment rapprochées) ne sont pas corrélées **). Il est à noter que la notion de bruit blanc ainsi définie ne se rapporte qu'au spectre du processus aléatoire, laissant de côté

*) Ceci par analogie à la lumière blanche dont le spectre est uniforme et à peu près homogène dans la partie visible.

**) Il s'agit ici du bruit blanc au sens *général* pour des processus à valeurs non corrélées. On peut parler du bruit blanc au sens strict, c'est-à-dire du bruit dont les valeurs pour deux instants quelconques sont indépendantes (voir § 4.1.3).

les questions relatives aux lois de distribution. Plus exactement le bruit blanc n'a pas de distribution des probabilités dans le sens général.

Le bruit blanc est une idéalisation ne pouvant jamais être réalisée dans les conditions réelles, car, premièrement, les valeurs suffisamment rapprochées d'une fonction aléatoire sont toujours liées, deuxièmement, les processus réels ont une puissance finie, tandis que la puissance totale du bruit blanc est infinie.

Cependant on étudie le passage du bruit blanc à travers des systèmes linéaires (voir chapitre 5) appelés fonctionnelles linéaires dont la distribution détermine (au sens général) la structure fine probabiliste du bruit blanc. Comme les bandes passantes des dispositifs radiotechniques sont finies, on peut utiliser le bruit blanc comme modèles des processus à l'entrée de ces dispositifs, ce qui simplifie l'analyse mathématique sans introduire d'erreurs importantes.

4.2.5. Processus à spectre discontinu. Les processus stationnaires à spectre continu ne sont pas les seuls processus de ce type. Il y a des processus stationnaires (au sens général) dont les fonctions de corrélation tendent vers une valeur finie ou sont des fonctions périodiques de τ, lorsque τ augmente indéfiniment. La condition (4.65) n'est alors plus vérifiée et le spectre énergétique cesse d'être une fonction continue de la fréquence.

Considérons par exemple le processus quasi déterministe

$$\zeta(t) = \xi_1 \cos \omega_1 t + \eta_1 \sin \omega_1 t, \tag{4.77}$$

où ξ_1 et η_1 sont des variables aléatoires ne dépendant pas de t, et ω_1 une grandeur constante.

On peut dire que la fonction aléatoire $\zeta(t)$ représente des « oscillations harmoniques » d'amplitude $\alpha = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$ et de phase $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_1}{\xi_1}$ aléatoires dont les distributions ne dépendent pas du temps.

Le processus aléatoire (4.77) ne sera pas toujours stationnaire. Pour qu'il soit stationnaire (au sens général) il faut que les conditions suivantes soient réalisées. Premièrement, la moyenne du processus ne doit pas dépendre du temps. Comme on a

$$m_1\{\zeta(t)\} = m_1\{\xi_1\} \cos \omega_1 t + m_1\{\eta_1\} \sin \omega_1 t,$$

cette condition ne peut être réalisée que si

$$m_1\{\xi_1\} = m_1\{\eta_1\} = 0,$$

c'est-à-dire si les moyennes des variables aléatoires ξ_1 et η_1 sont nulles. Deuxièmement, la fonction de corrélation du processus doit dépendre du seul paramètre τ. Comme

$$B_\zeta(t,\ \tau) = m_1\{\zeta(t)\,\zeta(t+\tau)\} =$$
$$= m_1\{\xi_1^2\cos\omega_1 t\cos\omega_1(t+\tau)+\eta_1^2\sin\omega_1 t\sin\omega_1(t+\tau)+$$
$$+\xi_1\eta_1\cos\omega_1 t\sin\omega_1(t+\tau)+\xi_1\eta_1\sin\omega_1 t\cos\omega_1(t+\tau)\} =$$
$$= m_1\{\xi_1^2\}\cos\omega_1 t\cos\omega_1(t+\tau)+$$
$$+m_1\{\eta_1^2\}\sin\omega_1 t\sin\omega_1(t+\tau)+$$
$$+m_1\{\xi_1\eta_1\}\sin\omega_1(2t+\tau),$$

$B_\zeta(t,\ \tau)$ ne dépendra pas de t pour

$$m_1\{\xi_1^2\} = m_1\{\eta_1^2\} = \frac{\sigma^2}{2}$$

et

$$m_1\{\xi_1\eta_1\} = 0.$$

Cette dernière condition se trouve vérifiée si ξ_1 et η_1 ne sont pas corrélées.

Lorsque les conditions mentionnées se trouvent remplies, l'oscillation harmonique d'amplitude et de phase aléatoires sera stationnaire au sens général, et sa fonction de corrélation sera égale à

$$B_\zeta(\tau) = \frac{\sigma^2}{2}\cos\omega_1\tau. \tag{4.78}$$

La variance de l'amplitude aléatoire est alors

$$m_2\{\alpha\} = m_1\{\xi_1^2+\eta_1^2\} = m_1\{\xi_1^2\}+m_1\{\eta_1^2\} = \sigma^2.$$

En vertu de (4.78) la fonction de corrélation de l'oscillation d'amplitude et de phase aléatoires est proportionnelle à la variance de l'amplitude, mais ne dépend pas des caractéristiques de phase.

Remarquons que le processus quasi déterministe considéré n'est stationnaire au sens strict que si l'amplitude et la phase sont indépendantes et que si la phase est distribuée uniformément sur l'intervalle $(0,\ 2\pi)$ (voir problème 4.1).

Bien que la fonction de corrélation (4.78) ne satisfasse pas à l'inégalité (4.65), la notion de spectre énergétique peut également être appliquée au cas considéré, si l'on introduit la fonction delta (voir annexe III). La transformation de Fourier de la fonction de corrélation (4.78), c'est-à-dire le spectre énergétique de l'oscillation d'amplitude et de phase aléatoires, peut alors s'écrire sous la forme

$$F(\omega) = \pi\sigma^2[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]. \tag{4.79}$$

Ce spectre se compose de deux raies distinctes d'intensité infinie aux pulsations $\pm\,\omega_1$.

Poussant plus loin la généralisation on arrive au processus aléatoire, stationnaire au sens général, qui est la superposition des proces-

sus aléatoires élémentaires de la forme (4.77):

$$\zeta(t) = \sum_{k=1} (\xi_k \cos \omega_k t + \eta_k \sin \omega_k t). \tag{4.80}$$

Les conditions de stationnarité (au sens général) de ce processus sont analogues à celles mentionnées ci-dessus pour le processus (4.77):

$$m_1\{\xi_k\} = m_1\{\eta_j\} = 0,$$

$$m_1\{\xi_k^2\} = m_1\{\eta_k^2\} = \frac{\sigma_k^2}{2},$$

$$m_1\{\xi_k \eta_j\} = 0,$$

$$m_1\{\xi_k \xi_j\} = m_1\{\eta_k \eta_j\} = 0, \; k \neq j.$$

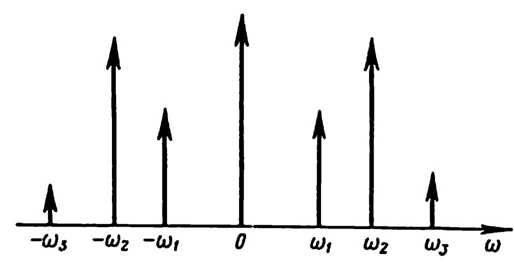


Fig. 4.7. Spectre énergétique discret

La fonction de corrélation du processus (4.80), lorsque ces conditions sont remplies, est de la forme

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{2} \cos \omega_k \tau. \tag{4.80'}$$

Le spectre énergétique du processus aléatoire, c'est-à-dire la transformation de Fourier de la fonction de corrélation (4.80'), est une somme de fonctions delta de fréquences discrètes *) (fig. 4.7):

$$F_\zeta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \pi\sigma_k^2 \left[\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k)\right]. \tag{4.81}$$

Les processus stationnaires (au sens général) dont les spectres énergétiques sont des suites de raies spectrales (fonctions delta) localisées à des fréquences discrètes sont dits *processus à spectre discret*. Les grandeurs σ_k^2 donnent la répartition de l'énergie totale du spectre entre les ω_k discrètes.

4.2.6. Représentation spectrale des processus aléatoires stationnaires. On peut simplifier l'exposé de l'analyse harmonique des processus aléatoires, stationnaires au sens général, sans perdre de la généralité et de la rigueur mathématique, en introduisant comme concept de base pour toute la théorie spectrale la notion de *représentation spectrale* de ces processus aléatoires. On peut montrer (voir [8]) qu'un processus aléatoire complexe, stationnaire au sens général, peut être représenté sous forme spectrale de la manière suivante

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dZ(\omega). \tag{4.82}$$

*) Le spectre de raies de la figure 4.7 se rapporte aux seules « intensités des fonctions delta » $\pi\sigma_k^2$ de fréquences discrètes.

Ici $Z(\omega)$ est une fonction aléatoire complexe à accroissements non corrélés, telle que $Z(\omega_2) - Z(\omega_1)$ et $Z(\omega_4) - Z(\omega_3)$ ne soient pas corrélées pour des intervalles (ω_1, ω_2) et (ω_3, ω_4) non superposés (voir § 4.1.3). L'intégrale de Stieltjes dans (4.82) est la limite en moyenne quadratique de la suite de processus aléatoires

$$\xi_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{i\omega_k' t} [Z(\omega_{k+1}) - Z(\omega_k)] = \sum_{k=-N}^{N} z_k e^{i\omega_k' t}, \qquad (4.82')$$

$$\omega_k < \omega_k' < \omega_{k+1}.$$

La fonction aléatoire $Z(\omega)$ satisfait à l'égalité suivante (limite en moyenne quadratique)

$$Z(\omega_2) - Z(\omega_1) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\omega_1 t} - e^{-i\omega_2 t}}{it} \xi(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} Z_T(i\omega)\, d\omega, \qquad (4.83)$$

[cf. (4.58)].

Si la fonction $f(\omega)$ donnée par la relation

$$f(\omega_2) - f(\omega_1) = m_1 \{|Z(\omega_2) - Z(\omega_1)|^2\}$$

est continue, sa dérivée $f'(\omega) = F(\omega)$ coïncide avec la densité spectrale de la puissance moyenne du processus, c'est-à-dire avec le spectre énergétique déterminé ci-dessus par (4.62).

Pour les processus aléatoires réels, en passant dans (4.82) à la forme trigonométrique, on obtient

$$\xi(t) = \int_0^{\infty} [\cos \omega t\, du(\omega) + \sin \omega t\, dv(\omega)]. \qquad (4.84)$$

L'intégrale dans (4.84) est la limite en moyenne quadratique d'une suite de processus aléatoires

$$\xi_N(t) = \sum_k x_k \cos \omega_k' t + y_k \sin \omega_k' t, \qquad (4.84')$$

où $x_k = u(\omega_k)$, $y_k = v(\omega_k)$ sont des processus aléatoires réels à accroissements non corrélés, c'est-à-dire

$$m_1\{x_k x_n\} = m_1\{y_k y_n\} = 0, \; k \neq n,$$

$$m_1\{x_k y_n\} = 0,$$

$$m_1\{x_k^2\} = m_1\{y_k^2\} = \frac{\sigma_k^2}{2}.$$

Ainsi, chaque processus aléatoire stationnaire au sens général peut être assimilé à une somme d'oscillations harmoniques non corrélées d'amplitudes et de phases aléatoires, c'est-à-dire à un processus stationnaire au sens général à spectre discret [voir (4.80)]. On utilise souvent cette approximation dans les applications de la théorie des processus aléatoires.

4.2.7. Analyse harmonique généralisée des processus déterministes. La notion de spectre énergétique peut être utilisée pour l'étude des processus déterministes $S(t)$ pour lesquels le spectre d'amplitudes habituel n'existe pas, car la fonction n'est pas absolument intégrable.

Physiquement ceci signifie, par exemple, que le processus $S(t)$ est pris sur un intervalle de temps infini et possède une énergie infinie. Supposons ensuite que le processus $S(t)$ a une puissance moyenne finie, c'est-à-dire que

$$P_S = \langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)\, dt. \qquad (4.85)$$

Nous pouvons définir la *fonction de corrélation temporelle* du processus $S(t)$, soit

$$\langle S(t)\, S(t+\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\, S(t+\tau)\, dt,$$

avec

$$| \langle S(t)\, S(t+\tau) \rangle |^2 \leqslant \langle S^2(t) \rangle.$$

On appelle *spectre énergétique d'un processus déterministe* $S(t)$ la transformée de Fourier de sa fonction de corrélation temporelle

$$F_S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle S(t)\, S(t+\tau) \rangle\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \qquad (4.86)$$

La transformation inverse donne

$$\langle S(t)\, S(t+\tau) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_S(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (4.86')$$

En toute rigueur, pour que les formules (4.86) et (4.86') soient vraies, il faut que la fonction de corrélation temporelle soit absolument intégrable. En utilisant la fonction delta, on peut, par ailleurs, dans de nombreux cas étendre le domaine d'application de ces formules.

Considérons, par exemple, le processus déterministe *périodique* $S(t)$ de période T. On peut écrire la fonction périodique sous la forme d'une série de Fourier, soit

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \varphi_n\right),$$

on obtient alors (vu la périodicité, on prend la moyenne sur une période)

$$\langle S(t)\,S(t+\tau)\rangle=\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_nc_k\times$$

$$\times\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t+\varphi_n\right)\cos\left[\frac{2\pi k}{T}(t+\tau)+\varphi_k\right]dt.$$

Comme les fonctions trigonométriques sont orthogonales, les intégrales des produits des cosinus pour $n\neq k$ sont nulles, et pour $n=k\neq 0$ on a

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t+\varphi_n\right)\cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t+\tau)+\varphi_n\right]dt=\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi n\tau}{T}.$$

Ainsi, pour un processus périodique la fonction de corrélation temporelle est de la forme

$$\langle S(t)\,S(t+\tau)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2}c_n^2\cos\frac{2\pi n\tau}{T},\tag{4.87}$$

où $\varepsilon_n=2$ pour $n=0$ et $\varepsilon_n=1$ pour $n\geqslant 1$.

En vertu de (4.87) la fonction de corrélation temporelle d'un processus périodique est une fonction périodique de même période, les amplitudes des harmoniques de la fréquence fondamentale du développement de la fonction de corrélation s'obtiennent à partir de l'amplitude de l'harmonique correspondant du processus périodique en élevant au carré et en divisant par deux. La fonction de corrélation temporelle ne dépend pas des angles de phase des harmoniques du processus périodique initial.

En comparant (4.87) et (4.80) on voit que la somme des oscillations harmoniques de pulsations ω_k et d'amplitudes c_k a la même fonction d'autocorrélation (et par conséquent, le même spectre énergétique) qu'un processus aléatoire, stationnaire au sens général, correspondant à une somme d'oscillations de mêmes pulsations, d'amplitudes et de phases aléatoires, les variances des amplitudes aléatoires étant égales à c_k^2. Cette comparaison souligne une fois de plus que les fonctions de corrélation et les spectres énergétiques ne donnent qu'une représentation énergétique moyenne du processus ne tenant pas compte des valeurs instantanées, par suite il peut se faire que deux processus différents en principe aient des caractéristiques énergétiques semblables.

On peut utiliser les notions de fonction de corrélation temporelle et de spectre énergétique d'un processus déterministe dans les cas où celui-ci possède un spectre d'amplitudes ordinaire. Soit, par exemple, $S(t)$ une fonction à support borné (c'est-à-dire telle que ses valeurs soient différentes de zéro sur un nombre fini d'intervalles de longueur limitée), correspondant à un processus impulsionnel déterministe de puissance moyenne finie:

$$S(t)=0, \quad |t|>\frac{T}{2}$$

et

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)\,dt<\infty .$$

Pour ce processus impulsionnel on peut calculer le spectre d'amplitudes de routine, soit

$$Z_S(i\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

Nous allons définir de la manière suivante la fonction de corrélation temporelle du processus $S(t)$ considéré

$$\langle S(t)\,S(t+\tau)\rangle=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\,S(t+\tau)\,dt. \tag{4.88}$$

On a alors $\langle S(t)\,S(t+\tau)\rangle = 0$ pour $|\tau| > T$.

Par analogie avec (4.86) nous appellerons spectre énergétique $F_S(\omega)$ d'un processus impulsionnel déterministe la transformation de Fourier de la fonction de corrélation temporelle. La transformation inverse (4.86′) permet, connaissant le spectre énergétique, de trouver la fonction de corrélation temporelle.

En prenant la transformée de Fourier de (4.88) on peut facilement trouver la relation existant entre le spectre énergétique et le spectre d'amplitudes. En effet,

$$2\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\,S(t+\tau)\,dt\right]e^{-i\omega\tau}\,d\tau=$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(u)\, e^{-i\omega u}\, du \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\, e^{i\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{2}{T} Z_S(i\omega)\, Z_S(-i\omega) = \frac{2}{T} |Z_S(i\omega)|^2.$$

Ainsi, dans le cas considéré on a

$$F_S(\omega) = \frac{2}{T} |Z_S(i\omega)|^2, \tag{4.89}$$

c'est-à-dire que le spectre énergétique (et par conséquent, la fonction de corrélation temporelle) d'un processus impulsionnel déterministe dépend seulement du module du spectre d'amplitudes et ne dépend pas du spectre de phase. Ceci signifie qu'à tous les processus déterministes ayant le même spectre d'amplitudes (module du spectre) et différents spectres de phase correspondent des fonctions de corrélation temporelles et des spectres énergétiques analogues *).

Les formules (4.88) et (4.89) peuvent être étendues au cas des processus déterministes *complexes*. Dans ce cas on a

$$\langle S(t)\, S(t+\tau)\rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\, \overline{S(t+\tau)}\, dt \tag{4.88'}$$

et

$$F_S(\omega) = \frac{2}{T} Z_S(i\omega)\, Z_{\bar{S}}(-i\omega). \tag{4.89'}$$

4.2.8. Spectre énergétique mutuel. D'une manière analogue au § 4.2.3, si l'on considère les réalisations tronquées $\xi_T^{(k)}(t)$ et $\eta_T^{(k)}(t)$ des processus aléatoires stationnaires et stationnairement liés $\xi(t)$ et $\eta(t)$ et si l'on introduit les transformées de Fourier $Z_{T\xi}^{(k)}(i\omega)$ et $Z_{T\eta}^{(k)}(i\omega)$ de ces réalisations, on peut trouver les *spectres énergétiques mutuels* des processus aléatoires, soit

$$F_{\xi\eta}(\omega) = \lim_{T\to\infty} m_1 \left\{ \frac{2}{T} Z_{T\xi}^{(k)}(i\omega)\, \overline{Z_{T\eta}^{(k)}(i\omega)} \right\}, \tag{4.90}$$

$$F_{\eta\xi}(\omega) = \lim_{T\to\infty} m_1 \left\{ \frac{2}{T} Z_{T\eta}^{(k)}(i\omega)\, \overline{Z_{T\xi}^{(k)}(i\omega)} \right\}, \tag{4.91}$$

le trait désignant la grandeur complexe conjuguée.

*) Ainsi, par exemple, les signaux déterministes obtenus à la sortie des déphaseurs à caractéristique de fréquence uniforme, lorsque leur entrée est attaquée par une impulsion rectangulaire, ont les mêmes fonctions de corrélation temporelles, soit:

$$\langle S(t)\, S(t+\tau)\rangle = 1 - \frac{|\tau|}{T}, \quad |\tau| < T.$$

Voir également problème 4.7.

En appliquant avec certaines modifications la méthode utilisée pour trouver la relation (4.62), on peut facilement trouver la relation existant entre les spectres énergétiques mutuels et les fonctions de corrélation mutuelles

$$F_{\xi\eta}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi\eta}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{4.92}$$

$$B_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi\eta}(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega, \tag{4.92'}$$

$$F_{\eta\xi}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_{\eta\xi}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \tag{4.93}$$

$$B_{\eta\xi}(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\eta\xi}(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{4.93'}$$

Il faut remarquer qu'à la différence du spectre énergétique d'un processus aléatoire stationnaire, qui est une fonction réelle paire, le spectre énergétique mutuel de deux processus est une fonction *complexe* *) dont la partie réelle est paire et la partie imaginaire impaire. En vertu de (4.90) et (4.91) $F_{\xi\eta}(\omega)$ et $F_{\eta\xi}(\omega)$ sont des grandeurs complexes conjuguées.

En écrivant les spectres énergétiques mutuels sous la forme

$$F_{\xi\eta}(\omega) = U_{\xi\eta}(\omega) + iV_{\xi\eta}(\omega),$$

$$F_{\eta\xi}(\omega) = U_{\eta\xi}(\omega) + iV_{\eta\xi}(\omega),$$

on a

$$U_{\xi\eta}(\omega) = U_{\xi\eta}(-\omega) = U_{\eta\xi}(\omega), \tag{4.94}$$

$$V_{\xi\eta}(\omega) = -V_{\xi\eta}(-\omega) = -V_{\eta\xi}(\omega). \tag{4.94'}$$

A partir de (4.92') et (4.93') on obtient

$$B_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} U_{\xi\eta}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} V_{\xi\eta}(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega, \tag{4.95}$$

$$B_{\eta\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} U_{\eta\xi}(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} V_{\eta\xi}(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega. \tag{4.96}$$

Enfin considérons le spectre énergétique de la somme de processus aléatoires stationnaires et stationnairement liés

$$\zeta(t) = \sum_{r=1}^{n} \xi_r(t).$$

*) Ceci puisque la fonction de corrélation mutuelle est *paire* (voir § 4.2.2).

Désignons par $Z_{T\zeta}^{(k)}$ et $Z_{T\xi_r}^{(k)}$ les transformées de Fourier respectivement de $\zeta_T^{(k)}(t)$ et $\xi_{rT}^{(k)}(t)$. Puisque

$$|Z_{T\zeta}^{(k)}(i\omega)|^2 = \left|\sum_{r=1}^{n} Z_{T\xi_r}^{(k)}(i\omega)\right|^2 = \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} Z_{T\xi_r}^{(k)}(i\omega)\overline{Z_{T\xi_l}^{(k)}(i\omega)},$$

on trouve, en utilisant la définition du spectre énergétique et du spectre énergétique mutuel, l'expression suivante pour le spectre énergétique d'une somme de processus aléatoires:

$$F_\zeta(\omega) = \sum_{r=1}^{n} F_{\xi_r}(\omega) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_{\xi_i\xi_j}(\omega). \tag{4.97}$$

La relation (4.97) découle de (4.56), ceci en vertu de la condition de stationnarité et de la liaison stationnaire des processus aléatoires. Si les processus aléatoires ne sont pas cohérents et que leurs moyennes sont nulles, leurs spectres mutuels sont nuls à toutes les fréquences, le spectre énergétique de la somme de processus aléatoires est alors simplement égal à la somme des spectres énergétiques des composantes.

4.2.9. Spectre énergétique des processus non stationnaires. On peut maintenant appliquer les notions qui viennent d'être introduites aux processus aléatoires non stationnaires.

Soit de nouveau la réalisation $\xi^{(k)}(t)$ d'un processus aléatoire et faisons lui correspondre la fonction $\xi_T^{(k)}(t)$, nulle à l'extérieur de l'intervalle $|t| \leqslant \frac{T}{2}$ et coïncidant avec $\xi^{(k)}(t)$ à l'intérieur de cet intervalle. Le spectre *courant* de la réalisation tronquée est

$$S_T^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{t} \xi_T^{(k)}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{4.98}$$

La valeur moyenne de la puissance du processus $\xi_T^{(k)}$ calculée sur l'ensemble de réalisations à la pulsation ω sur l'intervalle de temps $(-\frac{T}{2}, t)$ est égale à

$$m_1\{|S_T^{(k)}(t, \omega)|^2\} = m_1\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{-\frac{T}{2}}^{t} \xi_T^{(k)}(t_1)\,\xi_T^{(k)}(t_2)\, e^{-i\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2\right\} =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{-\frac{T}{2}}^{t} B_T(t_1, t_2)\, e^{-i\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2,$$

où $B_T(t_1, t_2) = m_1\{\xi_T^{(k)}(t_1)\,\xi_T^{(k)}(t_2)\}$.

En introduisant dans la dernière intégrale la variable $\tau = t_1 - t_2$ et en divisant le domaine d'intégration en deux parties suivant la diagonale d'un

rectangle, on obtient (voir fig. 4.5)

$$m_1\{|S_T^{(k)}(t,\omega)|^2\}=\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{0}^{t_1+\frac{T}{2}} B_T(t_1,t_1-\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau\,dt_1+$$

$$+\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{-\frac{T}{2}-t_2}^{0} B_T(t_2+\tau,t_2)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau\,dt_2=$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{0}^{t_1+\frac{T}{2}} [B_T(t_1,t_1-\tau)\,e^{-i\omega\tau}+B_T(t_1-\tau,t_1)\,e^{i\omega\tau}]\,d\tau\,dt_1,$$

et comme $B_T(t_1, t_2) = B_T(t_2, t_1)$, on a

$$m_1\{|S_T^{(k)}(t,\omega)|^2\}=2\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{0}^{t_1+\frac{T}{2}} B_T(t_1,t_1-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\,dt_1. \tag{4.99}$$

Nous allons définir le *spectre énergétique instantané* d'un processus aléatoire non stationnaire par l'égalité:

$$\Phi(t,\omega)=\lim_{T\to\infty}\Phi_T(t,\omega), \tag{4.100}$$

où

$$\Phi_T(t,\omega)=2\frac{\partial}{\partial t}m_1\{|S_T^{(k)}(t,\omega)|^2\}. \tag{4.101}$$

En dérivant (4.99) par rapport à t on trouve

$$\Phi_T(t,\omega)=4\int_{0}^{t+\frac{T}{2}} B_T(t,t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau. \tag{4.101'}$$

En passant à la limite pour $T\to\infty$ on obtient

$$\Phi(t,\omega)=4\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{t+\frac{T}{2}} B_T(t,t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau=$$

$$=4\int_{0}^{\infty} B(t,t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \tag{4.102}$$

et

$$B(t,t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\Phi(t,\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \tag{4.102'}$$

où $B(t_1, t_2)$ est la fonction de corrélation du processus aléatoire non stationnaire $\xi(t)$.

Par conséquent le spectre énergétique instantané et la fonction de corrélation d'un processus aléatoire non stationnaire sont deux transformées de Fourier inverses par rapport aux variables ω et τ. La formule (4.102) généralise la formule de Wiener-Khintchine (4.63) pour le cas des processus aléatoires non stationnaires.

Remarquons que l'intégrale du spectre énergétique instantané suivant la fréquence est, en vertu de (4.102'), égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \Phi(t, \omega)\, d\omega = B(t, t),$$

c'est-à-dire à la valeur moyenne du carré du processus à l'instant t.

Introduisons la *moyenne temporelle*

$$F_T(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi_T(t, \omega)\, dt. \qquad (4.103)$$

En portant (4.101) dans (4.103) on trouve

$$F_T(\omega) = \frac{2}{T}\left[m_1\left\{\left|S_T^{(k)}\left(\frac{T}{2}, \omega\right)\right|^2\right\} - m_1\left\{\left|S_T^{(k)}\left(-\frac{T}{2}, \omega\right)\right|^2\right\}\right].$$

Comme en vertu de (4.98) $S_T^{(k)}\left(-\frac{T}{2}, \omega\right) = 0$, et $S_T^{(k)}\left(\frac{T}{2}, \omega\right) = Z_T^{(k)}(i\omega)$, on a

$$F_T(\omega) = \frac{2}{T}\, m_1\{|Z_T^{(k)}(i\omega)|^2\}, \qquad (4.104)$$

où $\frac{2}{T}\,|Z_T^{(k)}(i\omega)|^2$ est, comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, la puissance moyenne du processus à la pulsation ω rapportée à la bande $\Delta\omega = \frac{1}{T}$.

Conformément à la définition générale on appelle *spectre énergétique d'un processus aléatoire non stationnaire* [cf. (4.62)] la limite

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} F_T(\omega).$$

Ainsi pour un processus aléatoire non stationnaire on a

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\, m_1\{|Z_T^{(k)}(i\omega)|^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Phi_T(t, \omega)\, dt. \qquad (4.105)$$

En vertu de (4.102) et (4.103), le spectre énergétique d'un processus aléatoire non stationnaire est lié par une transformation de Fourier à *la moyenne tempo-*

relle de la fonction de corrélation de ce procesus

$$F(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{0}^{t+\frac{T}{2}}B_T(t,\ t-\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\,dt=$$

$$=4\int_{0}^{\infty}B^*(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,\qquad(4.106)$$

où

$$B^*(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}B_T(t,\ t-\tau)\,dt.\qquad(4.107)$$

Généralisant la notion de spectre énergétique mutuel de deux processus $\xi(t)$ et $\eta(t)$ au cas des processus non stationnaires, on peut trouver la relation existant entre le spectre énergétique mutuel et les fonctions de corrélation mutuelles des processus aléatoires non stationnaires.

La grandeur

$$m_1\{S_{T\xi}^{(k)}(t,\ \omega)\,\overline{S_{T\eta}^{(k)}(t,\ \omega)}\}=\int_{-\frac{T}{2}}^{t}\int_{-\frac{T}{2}}^{t}B_{\xi\eta}(t_1,\ t_2)\,e^{i\omega(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2$$

peut être appelée *puissance moyenne mutuelle* des réalisations $\xi_T^{(k)}(t)$ et $\eta_T^{(k)}(t)$ à la pulsation ω sur l'intervalle $(-\frac{T}{2},\ t)$. En introduisant le *spectre énergétique mutuel instantané* de deux processus aléatoires non stationnaires

$$\Phi_{\xi\eta}(t,\omega)=\lim_{T\to\infty}\Phi_{T\xi\eta}(t,\ \omega)=2\lim_{T\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}m_1\{S_{T\xi}^{(k)}(t,\ \omega)\,\overline{S_{T\eta}^{(k)}(t\omega)}\},$$

on obtient une relation qui est une généralisation de (4.92)

$$\Phi_{\xi\eta}(t,\ \omega)=2\int_{-\infty}^{\infty}[B_{\xi\eta}(t,\ t-\tau)\,e^{-i\omega\tau}+B_{\eta\xi}(t,\ t-\tau)\,e^{i\omega\tau}]\,d\tau.\qquad(4.108)$$

Et, enfin, à partir de (4.108) on trouve la relation existant entre le spectre énergétique mutuel et les *moyennes temporelles des fonctions de corrélation mutuelles*

$$F_{\xi\eta}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Phi_{T\xi\eta}(t,\ \omega)\,dt=$$

$$=2\int_{0}^{\infty}[B_{\xi\eta}^*(\tau)\,e^{-i\omega\tau}+B_{\eta\xi}^*(\tau)\,e^{i\omega\tau}]\,d\tau.\qquad(4.109)$$

Pour des processus stationnaires et stationnairement liés (4.109) et (4.92) coïncident.

4.2.10. Signal télégraphique. A titre d'exemple calculons maintenant la fonction de corrélation et le spectre énergétique du signal télégraphique dont la réalisation $\xi(t)$ est une « onde rectangulaire » (fig. 4.8). La fonction aléatoire $\xi(t)$ ne peut prendre que deux valeurs: $+h$ et $-h$, les instants de changement de signe étant aléatoires *).

Soit $p_k(t_1, t_2)$ la probabilité de k changements de signe sur l'intervalle (t_1, t_2). Supposons que cette probabilité ne dépende pas du nombre de changements de signe sur les autres intervalles de temps

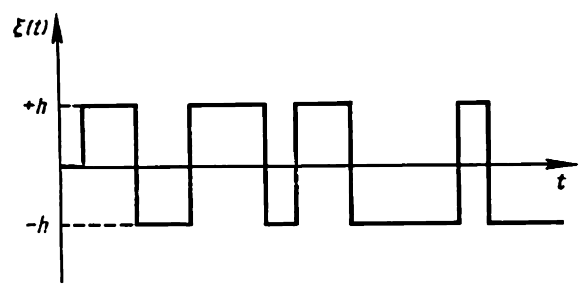


Fig. 4.8. Signal télégraphique

(processus sans *post-action*). Supposons également que la probabilité de plus d'un changement de signe sur l'intervalle $(t, t+\Delta t)$ pour $\Delta t \to 0$ décroît plus vite que Δt (processus *ordinaire*). Introduisons également l'intensité des changements de signe, c'est-à-dire la grandeur

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_0(t, t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

On peut montrer (voir par exemple [16]) qu'en adoptant ces hypothèses le nombre aléatoire $\nu(t_2) - \nu(t_1)$ de changements de signe du signal télégraphique sur l'intervalle (t_1, t_2) est distribué suivant la loi de Poisson

$$p_k(t_1, t_2) = \frac{[\Lambda(t_1, t_2)]^k}{k!} e^{-\Lambda(t_1, t_2)}, \qquad (4.110)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

où

$$\Lambda(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\, dt. \qquad (4.111)$$

Comme $\lambda(t) > 0$ on a $\Lambda(t_1, t_2) > 0$, $(t_1 > t_2)$.

*) Parfois au lieu du nombre de changements de signe on utilise le nombre de zéros, c'est-à-dire le nombre de fois que la fonction $\xi(t)$ coupe l'axe des abscisses. Ces deux méthodes sont équivalentes.

Remarquons que le nombre de changements de signe du signal télégraphique, en tant que fonction aléatoire du temps, est pour les conditions imposées un exemple de processus à accroissements indépendants (voir § 4.1.3) appelé souvent *processus de Poisson*. A t_1 donné les différences $\nu(t_2) - \nu(t_1)$, $t_2 > t_1$ forment un *processus de Markov*.

Pour calculer la fonction de corrélation du signal télégraphique il convient, en vertu de la définition (4.13), de trouver la moyenne sur l'ensemble des réalisations du produit $\xi(t_1)\,\xi(t_2)$. Ce produit est égal à h^2, ou à $-h^2$ (voir fig. 4.8) suivant que l'on a $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ ou $\xi(t_1) = -\xi(t_2)$. L'égalité $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ signifie que sur l'intervalle de t_1 à t_2 a lieu un nombre pair de changements de signe, c'est-à-dire l'un des événements incompatibles: $k = 0$, ou $k = 2$, ou $k = 4$, ou . . .

Utilisant (4.110) on trouve en vertu de la règle d'addition

$$P\{\xi(t_1) = \xi(t_2)\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}(t_1, t_2) = e^{-\Lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\Lambda} \operatorname{ch} \Lambda.$$

De même l'égalité $\xi(t_1) = -\xi(t_2)$ signifie que sur l'intervalle de t_1 à t_2 le nombre de changements de signe est impair, ainsi

$$P\{\xi(t_1) = -\xi(t_2)\} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1}(t_1, t_2) = e^{-\Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} = e^{-\Lambda} \operatorname{sh} \Lambda.$$

Il est facile de trouver maintenant la valeur moyenne du produit, c'est-à-dire la fonction de corrélation

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= m_1 \{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\} = \\ &= h^2 P\{\xi(t_1) = \xi(t_2)\} - h^2 P\{\xi(t_1) = -\xi(t_2)\} = \\ &= h^2 e^{-\Lambda} (\operatorname{ch} \Lambda - \operatorname{sh} \Lambda) = h^2 e^{-2\Lambda(t_1, t_2)} \end{aligned}$$

ou, en utilisant (4.111),

$$B(t_1, t_2) = h^2 e^{-2\Lambda(t_1, t_2)} = h^2 \exp\left\{-2 \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\, dt\right\}. \qquad (4.112)$$

Comme le processus aléatoire considéré n'est pas stationnaire, la fonction de corrélation dépend de deux variables. En prenant la moyenne temporelle de la fonction de corrélation on a

$$B^*(\tau) = h^2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left\{-2 \int_{t_1}^{t_1+\tau} \lambda(x)\, dx\right\} dt_1.$$

Supposons que l'intensité des changements de signe soit une fonction périodique du temps

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_0 t, \tag{4.113}$$

avec de plus, $\lambda(t) > 0$ on a $\lambda_1 < \lambda_0$.

Pour $\tau > 0$ on a

$$\Lambda(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \omega_0 t)\, dt =$$

$$= \lambda_0 \tau + \frac{\lambda_1}{\omega_0} [\sin \omega_0 t (\cos \omega_0 \tau - 1) + \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau] =$$

$$= \lambda_0 \tau + \frac{2\lambda_1}{\omega_0} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \cos \left[\omega_0 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Comme $\Delta(t, \tau)$ est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, il suffit de prendre la moyenne de la fonction de corrélation sur le temps T:

$$B^*(\tau) = \frac{h^2}{T} e^{-2\lambda_0 |\tau|} \int_0^T \exp \left\{ -\frac{4\lambda_1}{\omega_0} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \cos \left(\omega_0 t + \frac{\omega_0 \tau}{2} \right) \right\} dt$$

ou [voir (3.70)]

$$B^*(\tau) = h^2 e^{-2\lambda_0 |\tau|} I_0 \left(\frac{4\lambda_1}{\omega_0} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \right), \tag{4.114}$$

où $I_0(x)$ est la fonction de Bessel de l'argument imaginaire d'ordre zéro.

Pour trouver le spectre énergétique du signal télégraphique il est bon de développer préalablement la fonction de Bessel en série de Fourier sur l'intervalle $\left(0, \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

$$I_0 \left(\frac{4\lambda_1}{\omega_0} \sin \frac{\omega_0 \tau}{2} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 \tau},$$

dont les coefficients sont

$$c_k = c_{-k} = \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda_1}{\omega_0} \right)^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2 (n-k)! (n+k)!},$$

$$k > 0. \tag{4.115}$$

En prenant la transformée de Fourier de (4.114) on peut trouver le spectre énergétique d'un signal télégraphique non stationnaire

$$F(\omega) = 2h^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -2\lambda_0 |\tau| + i (k\omega_0 - \omega) \tau \} d\tau$$

ou

$$F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(\omega), \qquad (4.116)$$

avec

$$F_k(\omega)=\frac{8\lambda_0 h^2 c_k}{4\lambda_0^2+(\omega-k\omega_0)^2}, \qquad (4.117)$$

les coefficients c_k étant déterminés conformément à (4.115).

Introduisons maintenant la condition de *stationnarité* du signal télégraphique. En vertu de cette condition la probabilité de k changements de signe dans l'intervalle $(t, t+\tau)$ dépend seulement de k et de τ et ne dépend pas de t. Dans ce cas l'intensité des changements de signe est constante, on a donc

$$\Lambda(t, \tau)=\int_t^{t+\tau} \lambda_0 dt=\lambda_0\tau, \quad \tau>0.$$

Et en vertu de (4.112)

$$B(\tau) = h^2 e^{-2\lambda_0|\tau|}. \qquad (4.118)$$

L'expression (4.118) est un cas particulier de (4.114) pour $\lambda_1 = 0$.

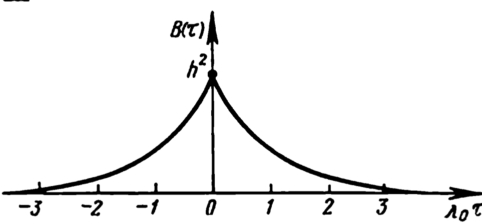


Fig. 4.9. Fonction de corrélation d'un signal télégraphique

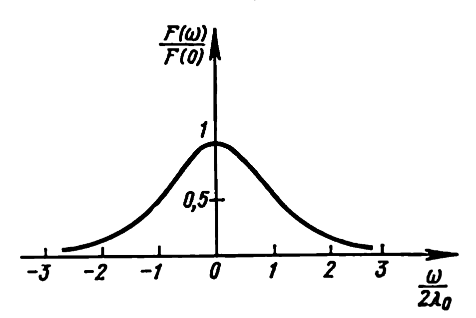


Fig. 4.10. Spectre énergétique d'un signal télégraphique

La fonction de corrélation d'un signal télégraphique stationnaire est montrée sur la figure 4.9. En appliquant le théorème de Wiener-Khintchine [formule (4.63)], il est facile maintenant de trouver le spectre énergétique d'un signal télégraphique stationnaire (fig. 4.10)

$$F(\omega)=4h^2\int_0^{\infty} e^{-2\lambda_0|\tau|}\cos\omega\tau\, d\tau=\frac{8\lambda_0 h^2}{4\lambda_0^2+\omega^2}. \qquad (4.119)$$

L'expression (4.119) pour $\lambda_1 = 0$ est un cas particulier de (4.117), car dans ce cas $c_0 = 1$, $c_k = 0$, $k \neq 0$.

Comparant (4.117) et (4.119), on voit que le spectre énergétique d'un signal non stationnaire représente, sur l'échelle des ordonnées modifiée, une composition des spectres d'un signal stationnaire (fig. 4.10) ayant les maxima aux pulsations $k\omega_0$.

4.3. AUTRES PROPRIÉTÉS DES PROCESSUS ALÉATOIRES

4.3.1. Caractéristiques de la différence de deux valeurs d'un processus aléatoire. Considérons les caractéristiques les plus simples de la différence $\xi_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t)$ de deux valeurs du processus aléatoire $\xi(t)$ pour des instants séparés par un intervalle de durée T. Nous utiliserons ces caractéristiques dans les chapitres qui suivent lors de l'étude de la continuité et de la dérivabilité des processus. Cependant dans certains problèmes ces caractéristiques peuvent être intéressantes par elles-mêmes (par exemple, dans les lignes à retard sans distorsion).

Calculons avant tout la moyenne et le second moment de la différence $\xi_T(t)$. On a

$$m_1\{\xi_T(t)\} = m_1\{\xi(t+T)\} - m_1\{\xi(t)\} = \\ = a_\xi(t+T) - a_\xi(t), \qquad (4.120)$$

$$m_2\{\xi_T(t)\} = m_1\{[\xi(t+T) - \xi(t)]^2\} = \\ = B_\xi(t+T;\ t+T) + B_\xi(t,\ t) - 2B_\xi(t,\ t+T). \qquad (4.121)$$

La fonction de corrélation de la différence $\xi_T(t)$ est

$$B_{\xi_T}(t_1,\ t_2) = m_1\{[\xi(t_1+T) - \xi(t_1)]\,[\xi(t_2+T) - \xi(t_2)]\} = \\ = m_1\{\xi(t_1+T)\,\xi(t_2+T)\} - m_1\{\xi(t_1)\,\xi(t_2+T)\} - \\ - m_1\{\xi(t_1+T)\xi(t_2)\} + m_1\{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\}$$

ou

$$B_{\xi_T}(t_1,\ t_2) = B_\xi(t_1+T,\ t_2+T) - B_\xi(t_1,\ t_2+T) - \\ - B_\xi(t_1+T,\ t_2) + B_\xi(t_1,\ t_2). \qquad (4.122)$$

Calculons également la fonction de corrélation mutuelle du processus $\xi(t)$ et de la différence $\xi_T(t)$. On a

$$B_{\xi\xi_T}(t_1,\ t_2) = m_1\{\xi(t_1)\,\xi_T(t_2)\} = m_1\{\xi(t_1)\,[\xi(t_2+T) - \xi(t_2)]\} = \\ = m_1\{\xi(t_1)\,\xi(t_2+T)\} - m_1\{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\}$$

ou

$$B_{\xi\xi_T}(t_1, t_2) = B_\xi(t_1, t_2+T) - B_\xi(t_1, t_2), \qquad (4.123)$$

$$B_{\xi_T\xi}(t_1,\ t_2) = B_\xi(t_1+T,\ t_2) - B_\xi(t_1,\ t_2). \qquad (4.123')$$

Si $\xi(t)$ est un processus stationnaire (tout au moins au sens général), en vertu de (4.120) à (4.123) on a

$$m_1\{\xi_T(t)\} = 0, \qquad (4.124)$$

$$m_2\{\xi_T(t)\} = M_2\{\xi_T(t)\} = 2\,[B_\xi(0) - B_\xi(T)], \qquad (4.125)$$

$$B_{\xi_T}(\tau) = 2B_\xi(\tau) - B_\xi(\tau+T) - B_\xi(\tau - T), \qquad (4.126)$$

$$B_{\xi\xi_T}(\tau) = B_\xi(T+\tau) - B_\xi(\tau), \qquad (4.127)$$

$$B_{\xi_T\xi}(\tau) = B_\xi(\tau - T) - B_\xi(\tau),\ \tau = t_2 - t_1. \qquad (4.127')$$

Le spectre énergétique $F_{\xi_T}(\omega)$ de la différence $\xi_T(t)$ est lié par une relation simple au spectre énergétique $F_\xi(t)$ du processus $\xi(t)$, stationnaire au sens général. En portant (4.126) dans (4.63) on obtient

$$F_{\xi_T}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi_T}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = 4\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau -$$

$$- 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau + T)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau - 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau - T)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)\, [2e^{-i\omega\tau} - e^{-i\omega(\tau-T)} - e^{-i\omega(\tau+T)}]\, d\tau =$$

$$= 4\,(1 - \cos\omega T)\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

ou

$$F_{\xi_T}(\omega) = 4\sin^2\frac{\omega T}{2} F_\xi(\omega). \tag{4.128}$$

Le spectre énergétique mutuel de $\xi(t)$ et $\xi_T(t)$ en vertu de (4.92) et (4.127) est

$$F_{\xi\xi_T}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi\xi_T}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} [B_\xi(T+\tau) - B_\xi(\tau)]\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)\, e^{-i\omega(\tau-T)}\, d\tau - 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= (e^{i\omega T} - 1)\cdot 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau$$

ou

$$F_{\xi\xi_T}(\omega) = (e^{i\omega T} - 1)\, F_\xi(\omega). \tag{4.129}$$

Les parties réelle et imaginaire de ce spectre sont respectivement égales à

$$U_{\xi\xi_T}(\omega) = -2\sin^2\frac{\omega T}{2} F_\xi(\omega) \tag{4.130}$$

et

$$V_{\xi\xi_T}(\omega) = \sin\omega T F_\xi(\omega). \tag{4.130'}$$

4.3.2. Continuité. La notion de continuité d'un processus aléatoire (de sa dérivée, de son intégrale, d'une série) est liée à des *opérations limites probabilistes.* Comme nous l'avons déjà mentionné

au § 3.5, ces opérations n'ont pas de définition unique et dépendent toujours des critères de convergence.

Un processus aléatoire est dit *continu* au point *t en moyenne quadratique* *) si

$$\lim_{T\to 0} m_1 \{|\xi(t+T)-\xi(t)|^2\} = 0. \tag{4.131}$$

Un processus aléatoire continu pour toutes les valeurs de t sur un certain intervalle est dit continu sur cet intervalle.

En vertu de (4.121) la condition nécessaire et suffisante de continuité d'un processus aléatoire au point t est que sa fonction de corrélation pour $t_1 = t_2 = t$ soit continue [ce qui signifie que $\lim_{t_1, t_2\to t} B_\xi(t_1, t_2) = B(t, t) = m_1\{\xi^2(t)\} < \infty$].

En vertu de (4.125) pour qu'un processus $\xi(t)$, stationnaire au sens général, soit continu *partout*, c'est-à-dire quel que soit t, il faut et il suffit que sa fonction de corrélation soit continue au point $\tau = 0$. Autrement dit les processus de puissance moyenne finie sont continus.

La fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$ d'un processus aléatoire continu, stationnaire au sens général, est une fonction continue. En effet

$$B_\xi(\tau+T) - B_\xi(\tau) = m_1\{[\xi(t+\tau+T)-\xi(t+\tau)]\,\xi(t)\},$$

et comme la covariance des variables aléatoires $\xi(t+\tau+T) - \xi(t+\tau)$ et $\xi(t)$ est égale à leur coefficient de corrélation (dont le module est inférieur à l'unité), multiplié par la racine carrée du produit de leurs variances [voir (2.106)], on a **)

$$|B_\xi(\tau+T) - B_\xi(\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant [M_2\{\xi(t+\tau+T)-\xi(t+\tau)\}\, M_2\{\xi(t)\}]^{\frac{1}{2}}.$$

Etant donné que la variance $M_2\{\xi(t)\}$ d'un processus aléatoire, stationnaire au sens général, continu en moyenne quadratique, est finie et que $\lim_{T\to 0} M_2\{\xi(t+\tau+T)-\xi(t+\tau)\} = 0$, la fonction de corrélation de ce processus est

$$|B_\xi(\tau+T) - B_\xi(\tau)| \to 0 \quad \text{pour } T\to 0.$$

On a ainsi démontré que si un processus est continu, sa fonction de corrélation l'est également partout. Il s'ensuit également que pour que la fonction de corrélation d'un processus stationnaire soit conti-

*) La continuité en moyenne quadratique entraîne la continuité *en probabilité* (voir § 3.5). En effet

$$\lim_{T\to 0} P\{|\xi(t+T)-\xi(t)| \geqslant \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

**) Il faut également tenir compte de (4.124).

nue pour tout τ il suffit seulement qu'elle soit continue au point $\tau = 0$ *).

4.3.3. Dérivabilité. Un processus aléatoire est *dérivable en moyenne quadratique* **) au point t s'il existe une variable aléatoire $\xi'(t)$, appelée *dérivée en moyenne quadratique* du processus $\xi(t)$ au point t, telle que

$$\lim_{T\to 0} m_1 \left\{ \left| \frac{\xi(t+T)-\xi(t)}{T} - \xi'(t) \right|^2 \right\} = 0. \tag{4.132}$$

Les caractéristiques de probabilité de la dérivée $\xi'(t)$ peuvent être obtenues par un passage à la limite dans les caractéristiques de la différence

$$\xi_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t).$$

En utilisant (4.120) on obtient

$$a_{\xi'}(t) = m_1\{\xi'(t)\} = \lim_{T\to 0} m_1 \left\{ \frac{\xi_T(t)}{T} \right\} = \lim_{T\to 0} \frac{a_\xi(t+T)-a_\xi(t)}{T} = a'_\xi(t),$$

c'est-à-dire

$$a_{\xi'}(t) = a'_\xi(t). \tag{4.133}$$

Ainsi, la moyenne de la dérivée d'un processus aléatoire est égale à la dérivée de la moyenne du processus à un instant quelconque, lorsque cette moyenne est dérivable. En vertu de (4.133) la moyenne de la dérivée d'un processus aléatoire stationnaire (au moins au sens général) *est toujours nulle.*

La fonction de corrélation de la dérivée d'un processus aléatoire est

$$B_{\xi'}(t_1, t_2) = \lim_{T\to 0} m_1 \left\{ \frac{\xi_T(t_1)}{T} \frac{\xi_T(t_2)}{T} \right\} = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T^2} B_{\xi_T}(t_1, t_2).$$

Pour calculer cette limite nous allons développer les trois premiers termes du second membre de (4.122) en série de Taylor:

$$B_\xi(t_1+T, t_2+T) = B_\xi(t_1, t_2) + T\left(\frac{\partial B_\xi}{\partial t_1} + \frac{\partial B_\xi}{\partial t_2}\right) + \\ + \frac{T^2}{2}\left(\frac{\partial^2 B_\xi}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2 B_\xi}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 B_\xi}{\partial t_2^2}\right) + O(T^3),$$

*) Si la fonction de corrélation $B(t_1, t_2)$ d'un processus non stationnaire est continue pour $t_1 = t_2 = t$, elle est continue pour chacun des arguments t_1 et t_2.

**) La dérivabilité en moyenne quadratique entraîne la dérivabilité *en probabilité* (voir § 3.5), car

$$\lim_{T\to 0} P\left\{ \left| \frac{\xi(t+T)-\xi(t)}{T} - \xi'(t) \right| > \varepsilon \right\} = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

$$B_\xi(t_1, t_2+T) = B_\xi(t_1, t_2) + T\frac{\partial B_\xi}{\partial t_2} + \frac{T^2}{2}\frac{\partial^2 B_\xi}{\partial t_2^2} + O(T^3),$$

$$B_\xi(t_1+T, t_2) = B_\xi(t_1, t_2) + T\frac{\partial B_\xi}{\partial t_1} + \frac{T^2}{2}\frac{\partial^2 B_\xi}{\partial t_1^2} + O(T^3).$$

En vertu de (4.122) on obtient alors

$$B_{\xi'}(t_1, t_2) = \lim_{T\to 0}\left\{\frac{\partial^2 B_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} + O(T)\right\},$$

c'est-à-dire

$$B_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 B_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}. \tag{4.134}$$

Pour que la fonction de corrélation d'un processus aléatoire soit dérivable il faut et il suffit que sa dérivée seconde mixte existe et soit continue pour $t_1 = t_2 = t$.

Si un processus aléatoire est stationnaire (du moins au sens général), en développant le second membre de (4.126) en série de Taylor on obtient l'expression suivante pour la fonction de corrélation $B_{\xi'}(t)$ de la dérivée $\xi'(t)$:

$$B_{\xi'}(\tau) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T^2}B_{\xi_T}(\tau) = \lim_{T\to 0}\{-B''_\xi(\tau) + O(T)\}$$

ou

$$B_{\xi'}(\tau) = -B''_\xi(\tau). \tag{4.135}$$

Ainsi la fonction de corrélation de la dérivée $\xi'(t)$ est égale à la dérivée seconde de la fonction de corrélation $\xi(t)$ prise avec le signe contraire.

Par un passage à la limite dans (4.128) on trouve également le spectre énergétique $F_{\xi'}(\omega)$ de la dérivée

$$F_{\xi'}(\omega) = \lim_{T\to 0}\frac{4}{T^2}\sin^2\frac{\omega T}{2}F_\xi(\omega) = \omega^2 F_\xi(\omega). \tag{4.136}$$

La formule (4.136) peut également être obtenue à partir de (4.135), en dérivant deux fois l'intégrale (4.64) par rapport au paramètre τ.

La variance (puissance moyenne) de la dérivée est égale à

$$B_{\xi'}(0) = -B''_\xi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \omega^2 F_\xi(\omega)\,d\omega. \tag{4.137}$$

Comme pour $\tau = 0$ la fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$ est toujours maximale, on a $B''_\xi(0) < 0$.

Le rapport des puissances moyennes de la dérivée $\xi'(t)$ et du processus $\xi(t)$ est égal à

$$\omega_1^2=\frac{B_{\xi'}(0)}{B_\xi(0)}=-R''_\xi(0)=\frac{\int\limits_0^\infty \omega^2 F_\xi(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty F_\xi(\omega)\,d\omega}. \qquad (4.137')$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus aléatoire stationnaire soit dérivable en moyenne quadratique est que la puissance moyenne $B_{\xi'}(0)$ de sa dérivée soit finie *). En vertu de (4.137) cette condition signifie également que l'intégrale $\int\limits_0^\infty \omega^2 F_\xi(\omega)\,d\omega$ est finie, c'est-à-dire que l'intensité du spectre énergétique aux fréquences élevées décroît plus rapidement que ω^{-3}.

Nous allons maintenant trouver la fonction de corrélation mutuelle du processus aléatoire $\xi(t)$ dérivable en moyenne quadratique et de sa dérivée $\xi'(t)$. En développant le second membre de (4.123) en série de Taylor suivant la variable t_2 on obtient

$$B_{\xi\xi_T}(t_1, t_2)=T\frac{\partial B_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2}+O(T^2),$$

d'où

$$B_{\xi\xi'}(t_1, t_2)=\lim_{T\to 0} m_1\left\{\frac{\xi(t_1)\,\xi_T(t_2)}{T}\right\}=\lim_{T\to 0}\frac{B_{\xi\xi_T}(t_1, t_2)}{T}=\frac{\partial B_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2},$$

donc

$$B_{\xi\xi'}(t_1, t_2)=\frac{\partial B_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \qquad (4.138)$$

Pour un processus aléatoire stationnaire (du moins au sens général), en vertu de (4.127) et (4.127') on a

$$B_{\xi\xi'}(\tau)=\lim_{T\to 0}\frac{B_\xi(T+\tau)-B_\xi(\tau)}{T}=B'_\xi(\tau)=-B_{\xi'\xi}(\tau),$$

donc

$$B_{\xi\xi'}(\tau)=-B_{\xi'\xi}(\tau)=B'_\xi(\tau). \qquad (4.139)$$

*) Cette condition ne se trouve pas remplie pour un signal télégraphique stationnaire [voir (4.118) et (4.119)] non dérivable en moyenne quadratique. Cependant le signal télégraphique est continu en moyenne quadratique, car sa fonction de corrélation (4.118) est habituellement continue pour $\tau = 0$. Remarquons que chaque réalisation d'un signal télégraphique possède une infinité de points de discontinuité, ce qui cependant n'est pas en contradiction avec sa continuité en moyenne.

Par un passage à la limite dans (4.129) on peut également trouver le spectre énergétique mutuel du processus et de sa dérivée

$$F_{\xi\xi'}(\omega) = \lim_{T\to 0} \frac{F_{\xi\xi_T}(\omega)}{T} = F_\xi(\omega) \lim_{T\to 0} \frac{e^{i\omega T}-1}{T} = i\omega F_\xi(\omega),$$

donc

$$F_{\xi\xi'}(\omega) = i\omega F_\xi(\omega). \tag{4.140}$$

Ce résultat découle également de (4.64). En dérivant l'intégrale par rapport au paramètre τ on obtient

$$B_{\xi\xi'}(\tau) = B'_\xi(\tau) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \omega F_\xi(\omega) \sin\omega\tau\, d\omega. \tag{4.140'}$$

Ainsi (4.140) entraîne (4.95).

Remarquons que le spectre énergétique mutuel du processus et de sa dérivée est une grandeur purement imaginaire. Par suite leur fonction de corrélation mutuelle est impaire

$$B_{\xi\xi'}(\tau) = -B_{\xi\xi'}(-\tau).$$

Pour $\tau = 0$ on a en vertu de (4.140')

$$B_{\xi\xi'}(0) = B'_\xi(0) = 0. \tag{4.141}$$

Ainsi la fonction de corrélation mutuelle d'un processus aléatoire stationnaire et de sa dérivée *aux mêmes instants* est toujours nulle. ce qui veut dire qu'une fonction aléatoire et sa dérivée aux mêmes instants *ne sont pas cohérentes.*

Remarquons également que la dérivée $\xi'(t)$ d'un processus aléatoire stationnaire est stationnaire et stationnairement liée à $\xi(t)$.

Cherchons maintenant l'expression générale pour la distribution conjointe du processus aléatoire $\xi(t)$ et de sa dérivée $\xi'(t)$ aux mêmes instants. Soit $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ la densité de probabilité bidimensionnelle du processus $\xi(t)$. Posant $t_2 = t - \frac{T}{2}$, $t_1 = t + \frac{T}{2}$ on voit que pour $T \to 0$ les variables aléatoires $\frac{\xi(t_1)+\xi(t_2)}{2}$ et $\frac{\xi(t_2)-\xi(t_1)}{2}$ convergent vers $\xi(t)$ et $\xi'(t)$ respectivement. Il s'ensuit que la densité de probabilité du couple $\xi(t)$, $\xi'(t)$ est égale à

$$W_2(x, y, t) = \lim_{T\to 0} T w_2\left(x - \frac{T}{2}y,\ x + \frac{T}{2}y,\ t\right). \tag{4.142}$$

En vertu de (4.142) et vu la symétrie de la densité de probabilité à deux dimensions d'un processus aléatoire [voir (4.7)]. la distribution conjointe d'un processus aléatoire et de sa dérivée aux mêmes instants est une fonction paire de l'argument y correspon-

dant à la valeur de la dérivée. On a donc

$$W_2(x, y, t) = W_2(x, -y, t). \qquad (4.142')$$

Si le processus aléatoire $\xi'(t)$ est dérivable en moyenne quadratique, la grandeur $\xi''(t)$ est appelée dérivée seconde en moyenne quadratique du processus $\xi(t)$ au point t. D'une manière analogue on peut définir les dérivées d'ordre plus élevé.

Pour que la dérivée n-ième $\xi^{(n)}(t)$ existe il faut et il suffit qu'existe la dérivée mixte d'ordre $2n$ de la fonction de corrélation du processus $\xi(t)$

$$B_{\xi}^{(n)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2n} B_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^n}. \qquad (4.143)$$

La fonction de corrélation de la dérivée n-ième d'un processus stationnaire au sens général est égale à

$$B_{\xi}^{(n)}(\tau) = (-1)^n B_{\xi}^{(2n)}(\tau), \qquad (4.143')$$

et son spectre énergétique à

$$F_{\xi}^{(n)}(\omega) = \omega^{2n} F_{\xi}(\omega). \qquad (4.144)$$

La dérivée n-ième du processus existe dans ce cas, si la dérivée d'ordre $2n$ de sa fonction de corrélation est continue pour $\tau = 0$ ou, ce qui est équivalent, le spectre énergétique aux fréquences élevées décroît plus rapidement que $\omega^{-(2n+1)}$.

Il est facile de voir que dans le cas général la fonction de corrélation mutuelle des dérivées k-ième et l-ième du processus est égale à

$$B_{\xi}^{(k)}{}_{\xi}^{(l)}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{k+l} B_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1^k \partial t_2^l}, \qquad (4.145)$$

et pour les processus stationnaires au sens général elle est égale à

$$B_{\xi}^{(k)}{}_{\xi}^{(l)}(\tau) = (-1)^k B_{\xi}^{(k+l)}(\tau). \qquad (4.146)$$

4.3.4. Intégrabilité. On peut également calculer l'*intégrale en moyenne quadratique* du processus aléatoire $\xi(t)$:

$$\zeta(t) = \int_a^b h(t, v)\, \xi(v)\, dv, \qquad (4.147)$$

où $h(t, v)$ est une fonction donnée, a et b étant des constantes arbitraires.

Cette intégrale est une fonction aléatoire vers laquelle tend en moyenne quadratique, pour $\max \Delta v_k \to 0$, la suite des fonctions aléatoires $\zeta_n(t)$ qui sont elles-mêmes des sommes intégrales

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} h(t, v_k)\, \xi(v_k)\, (v_k - v_{k-1}). \qquad (4.147')$$

La valeur moyenne de l'intégrale est égale à

$$a_{\zeta}(t) = m_1 \left\{ \int_a^b h(t, v)\, \xi(v)\, dv \right\} = \int_a^b h(t, v)\, m_1\{\xi(v)\}\, dv$$

ou

$$a_\zeta(t) = \int_a^b h(t, v)\, a_\xi(v)\, dv. \tag{4.148}$$

Si le processus $\xi(t)$ est stationnaire (du moins au sens général), on a

$$a_\zeta(t) = a_\xi \int_a^b h(t, v)\, dv. \tag{4.149}$$

Calculons la fonction de corrélation de cette intégrale. On a

$$B_\zeta(t_1, t_2) = m_1\{\zeta(t_1)\,\zeta(t_2)\} =$$

$$= m_1\left\{\int_a^b \int_a^b h(t_1, v_1)\, h(t_2, v_2)\, \xi(v_1)\, \xi(v_2)\, dv_1\, dv_2\right\} =$$

$$= \int_a^b \int_a^b h(t_1, v_1)\, h(t_2, v_2)\, B_\xi(v_1, v_2)\, dv_1\, dv_2$$

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b h(t_1, v_1)\, h(t_2, v_2)\, B_\xi(v_1, v_2)\, dv_1\, dv_2. \tag{4.150}$$

Pour que l'intégrale (4.147) existe en moyenne quadratique, il faut et il suffit que l'intégrale (4.150) soit convergente au sens habituel.

Calculons de plus la fonction de corrélation mutuelle du processus $\xi(t)$ et de l'intégrale $\zeta(t)$:

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = m_1\{\xi(t_1)\zeta(t_2)\} = m_1\left\{\int_a^b h(t_2, v)\, \xi(t_1)\, \xi(v)\, dv\right\} =$$

$$= \int_a^b h(t_2, v)\, m_1\{\xi(t_1)\, \xi(v)\}\, dv$$

ou

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \int_a^b h(t_2, v)\, B_\xi(t_1, v)\, dv. \tag{4.151}$$

Parfois dans les applications on a besoin d'étudier les caractéristiques statistiques de l'*intégrale indéfinie* d'un processus aléatoire $\xi(t)$, stationnaire tout au moins au sens général, soit

$$\eta_T(t) = \int_{-T}^{t} \xi(t)\, dt, \quad t \geqslant -T. \tag{4.152}$$

Il est tout à fait évident que le processus $\eta_T(t)$ *n'est pas stationnaire*. Ses caractéristiques numériques élémentaires (valeur moyenne et moment du second ordre) sont des fonctions du temps. En effet

$$m_1\{\eta_T(t)\} = \int_{-T}^{t} m_1\{\xi(t)\}\, dt = (t + T)\, a_\xi. \tag{4.153}$$

De plus

$$m_2\{\eta_T(t)\} = m_1\{\eta_T^2(t)\} =$$

$$= \int_{-T}^{t}\int_{-T}^{t} m_1\{\xi(u)\,\xi(v)\}\,du\,dv = \int_{-T}^{t}\int_{-T}^{t} B_\xi(u-v)\,du\,dv.$$

En remplaçant les variables d'intégration u, v par u, $\tau = u - v$, on obtient

$$m_1\{\eta_T^2(t)\} = 2\int_0^{t+T}(t+T-\tau)\,B_\xi(\tau)\,d\tau. \qquad (4.154)$$

Utilisons les résultats du § 4.2.9 pour trouver le spectre énergétique de l'intégrale indéfinie d'un processus aléatoire stationnaire. Commençons par définir le spectre courant du processus $\eta_T(t)$. En vertu de (4.98) on a

$$S_{\eta_T}^{(k)}(t,\omega) = \int_{-T}^{t}\eta_T^{(k)}(t_1)\,e^{-i\omega t_1}\,dt_1 = \int_{-T}^{t}\int_{-T}^{t_1}\xi^{(k)}(u)\,e^{-i\omega t_1}\,du\,dt_1.$$

En changeant l'ordre d'intégration et en intégrant sur t_1, on a

$$S_{\eta_T}^{(k)}(t,\omega) = \frac{1}{i\omega}\left[S_T^{(k)}(t,\omega) - \eta_T^{(k)}(t)\,e^{-i\omega t}\right], \qquad (4.155)$$

où

$$S_T^{(k)}(t,\omega) = \int_{-T}^{t}\xi^{(k)}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

En vertu de (4.155) on obtient

$$|S_{\eta_T}^{(k)}(t,\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2}\{|S_T^{(k)}(t,\omega)|^2 + [\eta_T^{(k)}(t)]^2 -$$

$$- \eta_T^{(k)}(t)\,[S_T^{(k)}(t,\omega)\,e^{i\omega t} + S_T^{(k)}(t,-\omega)\,e^{-i\omega t}]\}. \qquad (4.156)$$

Calculons la moyenne sur l'ensemble de la grandeur $|S_{\eta_T}^{(k)}(t,\omega)|^2$. La moyenne du premier terme de (4.156) est égale à

$$\frac{1}{\omega^2}\,m_1\{|S_T^{(k)}(t,\omega)|^2\}$$

(supposant que $\omega \neq 0$), la moyenne des autres termes est

$$\frac{1}{\omega^2}\,m_1\{[\eta_T^{(k)}(t)]^2 - \eta_T^{(k)}(t)\,[S_T^{(k)}(t,\omega)\,e^{i\omega t} + S_T^{(k)}(t,-\omega)\,e^{-i\omega t}]\} =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\int_{-T}^{t}\int_{-T}^{t} B_\xi(u-v)\,[1 - e^{-i\omega(v-t)} - e^{i\omega(v-t)}]\,du\,dv =$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\int_0^{t+T} B_\xi(\tau)\left[t+T-\tau - \frac{\sin\omega(t+T-\tau) + \sin\omega(t+T) - \sin\omega\tau}{\omega}\right]d\tau.$$

Le spectre énergétique instantané de l'intégrale d'un processus aléatoire stationnaire est, en vertu de (4.101), égal à

$$\Phi_{\eta_T}(t,\omega)=2\,\frac{\partial}{\partial t}\,m_1\{|S_{\eta_T}^{(k)}(t,\,\omega)|^2\}=$$

$$=\frac{1}{\omega^2}\,\Phi_T(t,\,\omega)+\frac{4}{\omega^2}\int\limits_0^{t+T}B_\xi(\tau)\,[1-\cos\omega\,(t+T)-\cos\omega\,(t+T-\tau)]\,d\tau, \qquad (4.157)$$

où

$$\Phi_T(t,\,\omega)=2\,\frac{\partial}{\partial t}\,m_1\,\{|\,S_T^{(k)}(t,\,\omega)\,|^2\}.$$

Pour calculer le spectre énergétique de l'intégrale indéfinie

$$\eta(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\xi(t)\,dt$$

il faut prendre la moyenne temporelle de $\Phi_{\eta_T}(t,\,\omega)$ et passer à la limite pour $T\to\infty$. Désignant les spectres énergétiques des processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$ par $F_\xi(\omega)$ et $F_\eta(\omega)$, on obtient

$$F_\eta(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\Phi_{\eta_T}(t,\,\omega)\,dt=\frac{1}{\omega^2}\,F_\xi(\omega)+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi_T(t,\,\omega)\,dt,$$

où

$$\varphi_T(t,\,\omega)=\frac{4}{\omega^2}\int\limits_0^{t+T}B_\xi(\tau)\,[1-\cos\omega\,(t+T)-\cos\omega\,(t+T-\tau)]\,d\tau.$$

Pour que la grandeur $\frac{1}{\omega^2}F_\xi(\omega)$ soit finie pour $\omega\to 0$, il faut que $F_\xi(0)=$ $=0$, ce qui équivaut à $\int\limits_0^\infty B_\xi(\tau)\,d\tau=0$ [voir (4.67)]. Mais alors dans la dernière égalité, à la limite, le second terme s'annule et finalement *)

$$F_\eta(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\,F_\xi(\omega). \qquad (4.158)$$

4.4. PROCESSUS ALÉATOIRES NORMAUX

4.4.1. Fonctions de répartition. Nous avons donné ci-dessus certaines caractéristiques probabilistes des processus aléatoires ainsi que leurs propriétés. Dans les applications on rencontre très souvent des *processus aléatoires* dits *normaux* (de Laplace-Gauss).

---

*) La formule (4.158) est vraie pour des spectres énergétiques $F_\xi(\omega)$ quelconques *à bandes*. Pour des spectres à basses fréquences pour des ω petites on doit avoir la condition $F_\xi(\omega)=o(\omega^2)$.

Un processus aléatoire $\xi(t)$ est dit normal (ou gaussien) si les densités de probabilité d'ordre quelconque pour l'ensemble des variables aléatoires $\xi_k = \xi(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sont normales, c'est-à-dire données par les formules suivantes [voir (2.55)]

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \exp\left\{-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik} \frac{x_i - a_i}{\sigma_i} \frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right\}, \quad (4.159)$$

où

$$a_k = m_1\{\xi(t_k)\}; \quad (4.160)$$
$$\sigma_k^2 = m_1\{[\xi(t_k) - a_k]^2\}; \quad (4.161)$$
$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} \ldots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} \ldots & R_{nn} \end{vmatrix}; \quad (4.162)$$
$$R_{ii} = 1; \ R_{ik} = R_{ki}.$$

La grandeur D_{ik} est le déterminant obtenu en barrant dans le déterminant D la ligne et la colonne correspondant à l'élément R_{ik} qui est le coefficient de corrélation des variables aléatoires $\xi(t_i)$ et $\xi(t_k)$. On a

$$R_{ik} = \frac{m_1\{[\xi(t_i) - a_i][\xi(t_k) - a_k]\}}{\sigma_i \sigma_k} = \frac{B(t_i, t_k) - a_i a_k}{\sigma_i \sigma_k} = R(t_i, t_k). \quad (4.163)$$

Il est évident qu'un processus aléatoire normal peut être obtenu à partir de la fonction caractéristique à n dimensions [comparer avec (3.123)]

$$\Theta_n(v_1, \ldots, v_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} a_k v_k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_i \sigma_k R_{ik} v_i v_k\right\}, \quad (4.164)$$

qui est la transformée de Fourier d'ordre n de (4.159).

Sous la forme la plus générale on peut définir un processus aléatoire normal à l'aide d'une *fonction caractéristique* de la forme [cf. (4.9)]

$$\Theta[v(t)] = \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} a(t) v(t)\, dt - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2)\, dt_1\, dt_2\right]. \quad (4.165)$$

4.4.2. Processus aléatoire normal stationnaire. Soit un processus aléatoire stationnaire au sens général. Toutes les moyennes a_k et

les variances σ_k^2 sont alors constantes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de l'indice k):

$$a_k = a, \ \sigma_k^2 = \sigma^2,$$

et la fonction de corrélation $B(t_l, t_k)$ dépend non pas des deux variables t_l et t_k mais seulement de leur différence $t_l - t_k$. La densité de probabilité (4.159) ne change pas alors lors du déplacement du groupe de points $t_1, \ldots, t_n$ le long de l'axe du temps d'une grandeur constante. Autrement dit, si les conditions mentionnées sont remplies, le processus aléatoire normal est stationnaire en toute rigueur. Ainsi, si un processus aléatoire normal est stationnaire *au sens général* il l'est également *en toute rigueur*.

La densité de probabilité d'ordre n d'un processus aléatoire stationnaire normal ne dépendra donc que de $n-1$ paramètres $\tau_{k-1} = t_k - t_1$, $k = 2, \ldots, n$ (l'une quelconque des grandeurs $| t_l - t_k | = | \tau_l - \tau_k |$ peut s'exprimer en fonction de τ_j) et s'écrira comme suit:

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{(2\pi)^n D}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 D} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(x_l - a)(x_k - a)\right\}, \quad (4.166)$$

où a et σ sont des nombres constants, et D et D_{ik} des fonctions numériques des paramètres $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ déterminés par les valeurs du coefficient de corrélation $R(\tau) = \frac{B(\tau) - a^2}{\sigma^2}$ pour $n-1$ valeurs données de τ.

Dans le déterminant (4.162) $R_{ll} = R(0) = 1$ et $R_{ik} = R_{ki} = R(\tau_k - \tau_l)$, c'est-à-dire que les éléments de la matrice de corrélation, symétriques par rapport à leur diagonale principale, sont égaux entre eux.

La fonction de corrélation multidimensionnelle d'un processus aléatoire stationnaire est [cf. (4.164)]

$$\Theta_n(v_1, \ldots, v_n, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = \exp\left\{ia \sum_{k=1}^{n} v_k - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} R_{ik} v_i v_k\right\}. \quad (4.166')$$

Les processus aléatoires normaux peuvent différer par la forme de la fonction de corrélation ou du spectre énergétique, qui sont donnés dans chaque cas particulier à partir de conditions supplémentaires. Si deux processus aléatoires normaux ne sont pas cohérents, c'est-à-dire si leur fonction de corrélation mutuelle est nulle, ils sont indépendants (ce qui comme nous l'avons déjà remarqué n'est pas vrai dans le cas général).

Les deux premières densités de probabilité d'un processus aléatoire normal stationnaire sont :

$$w_1(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\tag{4.167}$$

$$w_2(x_1, x_2, \tau)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\times\right.$$

$$\left.\times[(x_1-a)^2-2R(\tau)(x_1-a)(x_2-a)+(x_2-a)^2]\right\}.\tag{4.168}$$

Si deux valeurs quelconques d'un processus aléatoire normal à des instants différents ne sont pas corrélées, on a $R_{ik} = R_{ki} = 0$ $(k \neq i)$ et (4.162) donne

$$D=1,\ D_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}\tag{4.169}$$

La densité de probabilité d'ordre n est, en vertu de (4.166), égale à

$$w_n(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{\sigma^n\sqrt{(2\pi)^n}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_k-a)^2}{2\sigma^2}},\tag{4.170}$$

c'est-à-dire qu'elle est égale au produit de n densités de probabilité normales unidimensionnelles, par conséquent les valeurs instantanées du processus à deux instants quelconques sont indépendantes.

Pour qu'un processus aléatoire normal stationnaire soit *ergodique* (donc pour que la condition de transitivité métrique se trouve également remplie), *il suffit* *) que son spectre énergétique soit continu, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}|B(\tau)|\,d\tau$ soit convergente [voir (4.65)].

Souvent on a à étudier des processus représentant une somme d'un processus aléatoire normal stationnaire $\xi(t)$ et d'un processus déterministe $S(t)$. Compte tenu de (4.19″) on trouve que les densités de probabilités de la somme $\xi(t)+S(t)$ ont également une distribution normale et peuvent être obtenues à partir de la distribution (4.166) d'un processus stationnaire normal, si dans l'exposant de l'exponentielle on remplace chacun des binômes $x_k - a$ par $x_k - a - S(t_k)$. C'est pourquoi la somme considérée est un processus aléatoire normal qui cependant *n'est pas stationnaire*.

Les processus aléatoires normaux stationnaires à spectre uniforme correspondent à de nombreux effets observés dans les systèmes

*) Pour plus de détail voir [6, § 5.10].

radiotechniques. On peut montrer (voir par exemple [12, chap. 11]) que les bruits propres (de fluctuation) dus à l'effet de grenaille et au mouvement thermique des électrons sont distribués suivant la loi normale, ce qui se trouve confirmé par l'expérience. D'après certaines données le spectre de ces bruits est uniforme jusqu'à des fréquences de l'ordre de 10^{13} Hz, ce qui est bien au-delà de la gamme des fréquences utilisées en radiotechnique.

Il faut noter que les bruits propres ne sont pas toujours normalement distribués. C'est par exemple le cas du bruit de contact apparaissant entre deux conducteurs, ou des bruits de certains appareils à semi-conducteurs.

4.4.3. Transformations linéaires des processus aléatoires normaux. Comme nous l'avons montré au § 3.3.5, une somme de variables aléatoires normales (pas obligatoirement indépendantes) est également normalement distribuée. Par conséquent une combinaison linéaire de processus aléatoires normaux $\xi_i(t)$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} [c_i(t)\,\xi_i(t) + S_i(t)]$$

(où $c_i(t)$, $S_i(t)$ sont des fonctions connues) est également un processus aléatoire *normal*. Connaissant les valeurs moyennes, les variances, les fonctions de corrélation et d'autocorrélation des processus normaux $\xi_i(t)$, on peut facilement trouver la densité de probabilité d'ordre quelconque du processus $\eta(t)$.

Soit, par exemple, la somme de deux processus aléatoires normaux $\eta(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$ et soient $a_{\xi_1}(t)$, $a_{\xi_2}(t)$, $\sigma^2_{\xi_1}(t)$, $\sigma^2_{\xi_2}(t)$, $B_{\xi_1}(t_1, t_2)$, $B_{\xi_2}(t_1, t_2)$, $B_{\xi_1\xi_2}(t_1, t_2)$, $B_{\xi_2\xi_1}(t_1, t_2)$ leurs moyennes, variances, fonctions de corrélation et d'autocorrélation respectivement. Utilisant la représentation matricielle de la fonction caractéristique [voir (3.124)] on peut écrire la densité de probabilité à $2n$ dimensions des processus $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ sous une forme compacte, soit

$$\Theta_{2n}(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = e^{i\mathbf{a}'\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{v}'\mathbf{M}\mathbf{v}}, \tag{4.171}$$

où $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$; $\mathbf{a}$ étant le vecteur colonne des valeurs moyennes $[a_{\xi_1}(t_1), \ldots, a_{\xi_2}(t_n)]$; $M(t_i, t_j)$ la covariance matricielle des variables aléatoires $\xi_1(t_i)$, $\xi_2(t_j)$ avec

$$M(t_i, t_j) = \left\| \begin{matrix} M_{\xi_1}(t_i, t_j) & M_{\xi_1\xi_2}(t_i, t_j) \\ M_{\xi_2\xi_1}(t_i, t_j) & M_{\xi_2}(t_i, t_j) \end{matrix} \right\|, \tag{4.171'}$$

et $M_{\xi_1}(t_i, t_j) = \| B_{\xi_1}(t_i, t_j) \|$, $M_{\xi_1\xi_2} = \| B_{\xi_1\xi_2}(t_i, t_j) \|$, etc.

Ainsi la fonction caractéristique à n dimensions de la somme $\eta = \xi_1 + \xi_2$ est

$$\Theta_n(\mathbf{v}, \mathbf{t}) = e^{i\mathbf{a}'_\eta\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{v}'\mathbf{M}_\eta\mathbf{v}},$$

où

$$\mathbf{v} = (v_1 = u_1, \ldots, v_n = u_n), \ \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n);$$
$$\mathbf{a}_\eta = \mathbf{a}_{\xi_1} + \mathbf{a}_{\xi_2}$$

et

$$\mathbf{M}_\eta = \mathbf{M}_{\xi_1} + \mathbf{M}_{\xi_1\xi_2} + \mathbf{M}_{\xi_2\xi_1} + \mathbf{M}_{\xi_2}.$$

Considérons maintenant les opérations linéaires *limites*, c'est-à dire la dérivation et l'intégration d'un processus aléatoire normal. Les raisonnements précédents permettent de conclure que si la dérivée et l'intégrale (en moyenne quadratique) d'un processus aléatoire normal existent, ce sont également des processus aléatoires normaux.

Comme la densité de probabilité unidimensionnelle d'un processus aléatoire normal est déterminée par deux fonctions du temps, à savoir par la moyenne et la variance, la densité de probabilité unidimensionnelle de la dérivée d'un processus aléatoire normal est égale à

$$w_{1\xi'}(y, t) = \frac{1}{\sigma_{\xi'}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-a_{\xi'})^2}{2\sigma_{\xi'}^2}\right], \tag{4.172}$$

où en vertu de (4.133) et (4.134)

$$a_{\xi'}(t) = a'_\xi(t),$$
$$\sigma_{\xi'}^2(t) = \left.\frac{\partial^2 B_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \, \partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t} - [a'_\xi(t)]^2.$$

Pour un processus aléatoire normal (4.172) se simplifie, car dans ce cas $a'_\xi = 0$ et $\sigma_{\xi'}^2 = -B''_\xi(0)$. Si de plus $a_\xi = 0$ $(B_\xi(0) = \sigma_\xi^2)$, on a

$$w_{1\xi'}(y) = \frac{1}{\sigma_\xi \omega_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_\xi^2 \omega_1^2}\right], \tag{4.173}$$

où [voir (4.137)]

$$\omega_1^2 = -\frac{B''_\xi(0)}{\sigma_\xi^2} = -R''_\xi(0) = \frac{\int_0^\infty \omega^2 F_\xi(\omega)\, d\omega}{\int_0^\infty F_\xi(\omega)\, d\omega}. \tag{4.174}$$

D'une manière analogue, en utilisant (4.133) et (4.134), il est facile d'écrire la densité de probabilité bidimensionnelle d'un processus aléatoire normal. Ainsi pour la dérivée d'un processus normal stationnaire (pour $a_\xi = 0$) on a

$$w_{2\xi'}(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2\omega_1^2\sqrt{1-R_{\xi'}^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{y_1^2 - 2R_{\xi'}(\tau)\, y_1 y_2 + y_2^2}{2\sigma_\xi^2\omega_1^2[1-R_{\xi'}^2(\tau)]}\right\}, \tag{4.175}$$

où $R_{\xi'}(\tau) = -\dfrac{R''_\xi(\tau)}{\omega_1^2}$.

D'une manière analogue la formule (4.134) permet de trouver la matrice de corrélation pour les valeurs de la dérivée à n instants, et par conséquent, d'obtenir l'expression de sa densité de probabilité à n dimensions.

La densité de probabilité unidimensionnelle de l'intégrale

$$\zeta(t)=\int_a^b h(t, v)\,\xi(v)\,dv$$

d'un processus aléatoire normal $\xi(t)$ est

$$W_\zeta(z)=\frac{1}{\sigma_\zeta\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(z-a_\zeta)^2}{2\sigma_\zeta^2}\right], \tag{4.176}$$

où, en vertu de (4.148) et (4.150), on a

$$a_\zeta(t)=\int_a^b h(t, v)\,a_\xi(v)\,dv,$$

$$\sigma_\zeta^2(t)=\int_a^b\int_a^b h(t, v_1)\,h(t, v_2)\,B_\xi(v_1, v_2)\,dv_1\,dv_2-a_\zeta^2(t).$$

Les densités de probabilité multidimensionnelles de l'intégrale d'un processus aléatoire normal correspondent à la distribution conjointe d'un ensemble de variables aléatoires normales $\zeta_i=\zeta(t_i)$, $i=1, \ldots, n$, dont la matrice de corrélation est donnée par (4.150).

4.4.4. **Distribution conjointe d'un processus et de sa dérivée.** Non seulement la distribution conjointe de plusieurs processus aléatoires normaux est normale, mais la distribution conjointe de processus aléatoires normaux et de leurs transformations linéaires est également normale *). En particulier, la distribution conjointe d'un processus aléatoire normal et de sa dérivée est normale.

Soit un processus aléatoire normal stationnaire. Puisqu'aux mêmes instants les valeurs d'un processus aléatoire stationnaire et de sa dérivée ne sont pas cohérentes [voir (4.141)], pour un processus normal elles deviennent des variables aléatoires *indépendantes.* Ainsi en utilisant (4.173) on trouve la densité de probabilité conjointe d'un processus aléatoire normal stationnaire (pour $a_\xi=0$) et de sa dérivée aux mêmes instants, soit:

$$w_2(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2\,\omega_1}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\left(x^2+\frac{y^2}{\omega_1^2}\right)\right\}. \tag{4.177}$$

La distribution conjointe d'un processus normal stationnaire et de sa dérivée à différents instants est une distribution normale *bidimensionnelle* des variables aléatoires normales $\xi(t)$ et $\xi'(t+\tau)$.

---

*) Voir par exemple [9].

Dans ce cas la matrice de corrélation normée est

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & R' & (\tau) \\ R' & (\tau) & \omega_1^2 \end{Vmatrix}.$$

Compte tenu de (4.139), on trouve

$$w_2(x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2 \sqrt{\omega_1^2 - [R'(\tau)]^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{ - \frac{\omega_1^2 x^2 - 2R'(\tau)\, xy + y^2}{2\sigma_\xi^2 (\omega_1^2 - [R'(\tau)]^2)} \right\}. \qquad (4.178)$$

Pour $\tau = 0$, $R'(0) = 0$ la formule (4.178) devient (4.177).

La distribution conjointe d'un processus aléatoire normal stationnaire et de sa dérivée aux instants t et $t + \tau$ est une distribution *quadridimensionnelle* normale des quatre variables aléatoires normales $\xi(t)$, $\xi(t+\tau)$, $\xi'(t)$, $\xi'(t+\tau)$. La matrice corrélationnelle normée est dans ce cas [voir (4.171')]:

$$M = \begin{Vmatrix} M_\xi & M_{\xi\xi'} \\ M_{\xi'\xi} & M_{\xi'} \end{Vmatrix},$$

où

$$M_\xi = \begin{Vmatrix} 1 & R(\tau) \\ R(\tau) & 1 \end{Vmatrix}; \quad M_{\xi\xi'} = \begin{Vmatrix} 0 & R'(\tau) \\ -R'(\tau) & 0 \end{Vmatrix};$$
$$M_{\xi'\xi} = \begin{Vmatrix} 0 & -R'(\tau) \\ R'(\tau) & 0 \end{Vmatrix}; \quad M_{\xi'} = \begin{Vmatrix} \omega_1^2 & -R''(\tau) \\ -R''(\tau) & \omega_1^2 \end{Vmatrix}.$$

Ainsi

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & R(\tau) & 0 & R'(\tau) \\ R(\tau) & 1 & -R'(\tau) & 0 \\ 0 & -R'(\tau) & \omega_1^2 & -R''(\tau) \\ R'(\tau) & 0 & -R''(\tau) & \omega_1^2 \end{Vmatrix}. \qquad (4.179)$$

Le déterminant de cette matrice est *)

$$D = (\omega_1^4 - R''^2)(1 - R^2) + R'^2 (R'^2 - 2RR'' - 2\omega_1^2) \qquad (4.180)$$

et les cofacteurs des éléments de la matrice D

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = \omega_1^2 (\omega_1^2 - R'^2) - R''^2, \\ D_{12} &= D_{21} = RR''^2 - R''R'^2 - R\omega_1^4, \\ D_{33} &= D_{44} = \omega_1^2 (1 - R^2) - R'^2, \\ D_{13} &= D_{31} = -D_{24} = -D_{42} = -R'(R'' + R\omega_1^2), \\ D_{14} &= D_{41} = D_{23} = D_{32} = -R'(RR'' - R'^2 + \omega_1^2), \\ D_{34} &= D_{43} = R''(1 - R^2) + RR'^2. \end{aligned} \qquad (4.181)$$

*) Dans les formules (4.180), (4.181) on a omis les arguments des fonctions $R(\tau)$, $R'(\tau)$, $R''(\tau)$.

Compte tenu de (4.166) on peut facilement trouver la distribution quadridimensionnelle cherchée

$$w_4(x_1, x_2, y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^4 \sqrt{D}} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_\xi^2 D}\left[D_{11}(x_1^2+x_2^2)+2D_{12}x_1x_2+2D_{34}y_1y_2+D_{33}(y_1^2+y_2^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2D_{13}(x_1y_1-x_2y_2)+2D_{14}(x_1y_2+x_2y_1)\right]\right\}, \quad (4.182)$$

où les grandeurs D et D_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) sont données par les formules (4.180), (4.181).

4.5. PROCESSUS DE MARKOV

4.5.1. Equation de Markov généralisée. Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce chapitre, en plus des processus représentés par des fonctions aléatoires où le temps varie d'une manière continue, on rencontre dans les applications des modèles de processus dont le cours peut être représenté par une suite de pas successifs *). Les *processus de Markov*, qui sont les processus aléatoires sans post-action, formeut l'une des classes les plus importantes de processus aléatoires à temps discret. La fonction de répartition conditionnelle $F_2(y, t \mid x_0, t_0)$ caractérise complètement un processus de Markov; cette fonction donne la probabilité d'avoir $\xi(t) < y$ si l'on sait que pour $t_0 < t$ on avait $\xi(t_0) = x_0$. Si la dérivée

$$w_2(y, t \mid x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial y} F_2(y, t \mid x_0, t_0)$$

existe et si l'on connaît de plus la densité de probabilité unidimensionnelle $w_1(x, t)$, la formule (4.21′) permet de calculer la densité de probabilité d'ordre quelconque

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= w_1(x_1, t_1) \prod_{i=2}^{n} w_2(x_i, t_i \mid x_{i-1}, t_{i-1}). \quad (4.183)$$

Ainsi, la densité unidimensionnelle et la densité de probabilité de transition d'un pas déterminent entièrement (au sens probabiliste) le développement du processus de Markov.

Si la densité de probabilité de transition dépend seulement de la différence $t_i - t_{i-1}$, le processus de Markov est dit *stationnaire*

*) En fait, lorsque l'on se donne un processus aléatoire au moyen des densités de probabilité multidimensionnelles, ceci équivaut à identifier le processus à un ensemble fini de processus aléatoires donnant les valeurs de la fonction aléatoire à des instants fixes (voir § 4.1.2).

(uniforme). Dans ce cas l'expression (4.183) s'écrira

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \\ = w_1(x_1)\prod_{i=2}^{n} w_2(x_i, t_i - t_{i-1} \mid x_{i-1}). \qquad (4.183')$$

Les densités de probabilité de transition pour les processus de Markov ne sont pas des densités de probabilités conditionnelles arbitraires, satisfaisant seulement aux conditions habituelles (d'être non négatives et normées), c'est-à-dire à

$$w_2(y, t \mid x_0, t_0) \geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_2(y, t \mid x_0, t_0)\, dy = 1.$$

Il se trouve que la densité de probabilité de transition doit également satisfaire à une certaine *équation intégrale*. En effet, en vertu de (4.183) pour $n = 3$ on a

$$w_3(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = \\ = w_1(x_1, t_1)\, w_2(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)\, w_2(x_3, t_3 \mid x_2, t_2).$$

En intégrant les deux membres de cette égalité par rapport à x_2 on obtient

$$w_2(x_1, x_3, t_1, t_3) = \\ = w_1(x_1, t_1) \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)\, w_2(x_3, t_3 \mid x_2, t_2)\, dx_2,$$

et comme

$$\frac{w_2(x_1, x_3, t_1, t_3)}{w_1(x_1, t_1)} = w_2(x_3, t_3 \mid x_1, t_1),$$

on a

$$w_2(x_3, t_3 \mid x_1, t_1) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_3, t_3 \mid x_2, t_2)\, w_2(x_2, t_2 \mid x_1, t_1)\, dx_2. \qquad (4.184)$$

L'équation obtenue est analogue à la formule (1.51) reliant les probabilités de transition des chaînes de Markov. C'est l'*équation généralisée de Markov* *).

Pour un processus de Markov stationnaire, l'équation (4.184) peut s'écrire

$$w_2(x_3, t_3 - t_1 \mid x_1) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_3, t_3 - t_2 \mid x_2)\, w_2(x_2, t_2 - t_1 \mid x_1)\, dx_2. \qquad (4.184')$$

*) Souvent (4.184) est appelée équation de Smoloukhovski (et sous une forme plus générale, équation de Kolmogorov-Chapman).

Un processus de Markov est dit *continu* si pour des intervalles de temps petits des déplacements importants sont peu probables. Généralement la continuité d'un processus de Markov est comprise dans un sens plus fort, à savoir : quel que soit le nombre positif δ, on doit avoir

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|z-x|\geqslant\delta} w_2(z,\ t\,|\,x,\ t-\Delta t)\,dz = 0. \qquad (4.185)$$

4.5.2. Equations de Kolmogorov. Nous allons montrer maintenant que si certaines conditions supplémentaires sont imposées à la densité de probabilité de transition, celle-ci est donnée par une *équation différentielle*. En changeant les désignations des variables et posant $t_1 = t - \Delta t$, $t_2 = t$, $t_3 = T$, l'équation généralisée de Markov (4.184) devient :

$$w_2(y,\ T\,|\,x,\ t-\Delta t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(y,\ T\,|\,z,\ t)\,w_2(z,\ t\,|\,x,\ t-\Delta t)\,dz.$$

De plus, il est évident que

$$w_2(y,\ T\,|\,x,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_2(y,\ T\,|\,x,\ t)\,w_2(z,t\,|\,x,t-\Delta t)\,dz.$$

Les deux dernières équations donnent

$$w_2(y,\ T\,|\,x,\ t-\Delta t) - w_2(y,\ T\,|\,x,\ t) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} [w_2(y,\ T\,|\,z,\ t) - w_2(y,\ T\,|\,x,\ t)] \times$$
$$\times\ w_2(z,\ t\,|\,x,\ t-\Delta t)\,dz. \qquad (4.186)$$

Supposons que l'on puisse développer en série de Taylor la densité de probabilité de transition. On a alors

$$w_2(y,\ T\,|\,z,\ t) - w_2(y,\ T\,|\,x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-x)^k}{k\,!}\,\frac{\partial^k w_2(y,\ T\,|\,x,\ t)}{\partial x^k}. \qquad (4.186')$$

En portant (4.186′) dans (4.186), puis divisant les deux membres par Δt et passant à la limite pour $\Delta t \to 0$, on obtient

$$-\frac{\partial w_2(y,\ T\,|\,x,\ t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(x,\ t)}{k\,!}\,\frac{\partial^k w_2(y,\ T\,|\,x,\ t)}{\partial x^k}, \qquad (4.187)$$

où l'on a introduit la notation

$$A_k(x,\ t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (z-x)^k\,w_2(z,\ t\,|\,x,\ t-\Delta t)\,dz. \qquad (4.188)$$

Supposons que $A_1(x,\ t)$ et $A_2(x,\ t)$ soient finies et différentes de zéro et que $A_k(x,\ t) \equiv 0$ pour $k \geqslant 3$. Dans ces conditions, en

vertu de (4.187), la densité de probabilité de transition d'un processus de Markov *continu* satisfait à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial w_2(y, T \mid x, t)}{\partial t} + A_1(x, t)\frac{\partial w_2(y, T \mid x, t)}{\partial x} + \\ + \frac{1}{2} A_2(x, t)\frac{\partial^2 w_2(y, T \mid x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (4.189)$$

appelée *première équation de Kolmogorov.*

On peut démontrer d'une manière analogue que la densité de probabilité de transition satisfait également à la *seconde équation de Kolmogorov*

$$\frac{\partial w_2(y, T \mid x, t)}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial y}[A_1(y, T) w_2(y, T \mid x, t)] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[A_2(y, T) w_2(y, T \mid x, t)], \quad (4.190)$$

où en vertu de (4.188)

$$A_1(y, T) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} (z-y) w_2(z, T \mid y, T-\Delta t)\, dz, \quad (4.190')$$

$$A_2(y, T) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} (z-y)^2 w_2(z, T \mid y, T-\Delta t)\, dz. \quad (4.190'')$$

Parfois la première et la seconde équations de Kolmogorov sont respectivement appelées équation *inverse* (« orientée vers le passé ») et équation *directe* (« orientée vers l'avenir »). La seconde équation de Kolmogorov est également connue sous le nom d'*équation de Fokker-Planck.* Les deux équations (4.189) et (4.190) appartiennent à la classe des équations différentielles paraboliques aux dérivées partielles. Dans l'équation (4.189) les variables sont x et $t \leqslant T$, les variables y et T entrant seulement par la condition aux limites $w_2(y, T \mid x, T) = \delta(y - x)$. Les variables de l'équation (4.190) sont y et $T \geqslant t$, x et t entrant seulement par la condition initiale $w_2(y, t \mid x, t) = \delta(y - x)$.

Écrivons la seconde équation de Kolmogorov pour un processus de Markov stationnaire. Dans ce cas les fonctions A_1 et A_2 ne dépendent pas du temps, et la densité de probabilité de transition dépend seulement de la différence $\tau = T - t$. On a alors en vertu de (4.190)

$$\frac{\partial w_2(y, \tau \mid x)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}[A_1(y) w_2(y, \tau \mid x)] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[A_2(y) w_2(y, \tau \mid x)] \quad (4.191)$$

avec la condition initiale $w_2(y, 0 \mid x) = \delta(y - x)$. La formule

(4.188) s'écrira alors comme suit :

$$A_k(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (z-x)^k w_2(z, \Delta t \mid x)\, dz. \qquad (4.192)$$

L'intégrale dans le second membre correspond au moment d'ordre k de la variation de l'état pour un petit intervalle de temps Δt. Par hypothèse, pour $k \geqslant 3$ ces moments sont des infiniment petits d'ordre $o\,[(\Delta t)^2]$.

Si pour $\tau \to \infty$ la densité de probabilité de transition a une limite ne dépendant pas de l'état initial, cette densité est appelée densité de probabilité *limite*

$$w(y) = \lim_{\tau \to \infty} w_2(y, \tau \mid x). \qquad (4.193)$$

En vertu de (4.193) on a également $\frac{\partial w_2(y, \tau \mid x)}{\partial \tau} \to 0$ pour $\tau \to \infty$. C'est pourquoi on peut trouver la densité de probabilité limite à partir de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$\frac{d}{dy}[A_2(y)\, w(y)] = 2A_1(y)\, w(y) + C_1, \qquad (4.194)$$

dont la solution est

$$w(y) = \frac{1}{A_2(y)} e^{f(y)} \left[C_2 + C_1 \int e^{-f(y)}\, dy \right], \qquad (4.195)$$

avec

$$f(y) = 2 \int \frac{A_1(y)}{A_2(y)}\, dy; \qquad (4.195')$$

les constantes C_1 et C_2 sont données par la condition de normalisation $\int_{-\infty}^{\infty} w(y)\, dy = 1$ et une quelconque des conditions aux limites pour $w(y)$, par exemple, $w(\infty) = w(-\infty) = 0$.

4.5.3. Processus de Markov multidimensionnel. Deux processus aléatoires de Markov $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ donnent un processus de Markov bidimensionnel, s'ils sont complètement caractérisés par la fonction de répartition conditionnelle $F_4(x_1, x_2, t \mid x_{10}, x_{20}, t_0)$ donnant la probabilité d'avoir $\xi_1(t) \leqslant x_1$, $\xi_2(t) \leqslant x_2$ sachant que pour $t_0 < t$ on avait les égalités $\xi_1(t_0) = x_{10}$, $\xi_2(t_0) = x_{20}$. La densité de probabilité de transition (si elle existe)

$$w_4(x_1, x_2, t \mid x_{10}, x_{20}, t_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} F_4(x_1, x_2, t \mid x_{10}, x_{20}, t_0)$$

doit satisfaire à l'équation de Markov généralisée suivante:

$$w_4(x_{13}, x_{23}, t_3 \mid x_{11}, x_{21}, t_1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} w_4(x_{13}, x_{23}, t_3 \mid x_{12}, x_{22}, t_2) \times$$

$$\times\, w_4(x_{12}, x_{22}, t_2 \mid x_{11}, x_{21}, t_1)\, dx_{12}\, dx_{22}. \qquad (4.196)$$

Chacun des processus aléatoires $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ est une *composante* d'un processus de Markov bidimensionnel. La composante d'un processus de Markov bidimensionnel n'est pas obligatoirement un processus de Markov unidimensionnel, car en général, si l'équation (4.196) est vérifiée, ceci n'entraîne pas obligatoirement que les densités de probabilité de transition $w_2(x_1, t \mid x_{10}, t_0)$ et $w_2(x_2, t \mid x_{20}, t_0)$ satisfont à l'équation (4.184).

D'une manière analogue, on peut introduire un processus de Markov multidimensionnel donné par les composantes $\xi_1(t)$, $\xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ avec des densités de probabilité de transition multidimensionnelles satisfaisant à l'équation

$$w_{2n}(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{n3}, t_3 \mid x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} w_{2n}(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{n3}, t_3 \mid x_{12}, x_{22}, \ldots \ldots, x_{n2}, t_2)\, w_{2n}(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}, t_2 \mid x_{11}, x_{21}, \ldots \ldots, x_{n1}, t_1)\, dx_{12}, dx_{22}, \ldots, dx_{n2}. \quad (4.197)$$

On peut également trouver les équations de Kolmogorov pour un processus de Markov multidimensionnel. Ecrivons la seconde équation de Kolmogorov pour un processus de Markov *continu* stationnaire multidimensionnel, soit:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, \tau \mid x_{10}, \ldots, x_{n0}) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} [A_k(x_1, \ldots, x_n)\, w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, \tau \mid x_{10}, \ldots, x_{n0})] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l} [A_{kl}(x_1, \ldots, x_n)\, w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, \tau \mid x_{10}, \ldots, x_{n0})], \quad (4.198)$$

où

$$A_k(x_{10}, \ldots, x_{n0}) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - x_{k0}) \times w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, \tau \mid x_{10}, \ldots, x_{n0})\, dx_1 \ldots dx_n; \quad (4.199)$$

$$A_{kl}(x_{10}, \ldots, x_{n0}) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - x_{k0})(x_l - x_{l0}) \times w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, \tau \mid x_{10}, \ldots, x_{n0})\, dx_1 \ldots dx_n, \quad k, l = 1, \ldots n. \quad (4.199')$$

les conditions initiales pouvant s'écrire comme suit

$$w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, 0 \mid x_{10}, \ldots, x_{n0}) = \prod_{k=1}^{n} \delta(x_k - x_{k0}). \qquad (4.200)$$

4.5.4. Processus de Markov normal. Soit un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. En utilisant (2.76) écrivons la densité de probabilité conditionnelle de ce processus aléatoire normal (voir également fig. 2.14)

$$w_2(y, \tau \mid x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \times \exp\left[-\frac{(Rx-y)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right], \qquad (4.201)$$

$$w_2(y, 0 \mid x) = \delta(y-x).$$

Calculons les fonctions $A_k(y)$ déterminées à partir de (4.192) pour la densité de probabilité en question

$$A_1(y) = \lim_{\tau\to 0_+} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (z-y) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \exp\left[-\frac{(Ry-z)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right] dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\tau\to 0_+} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-v\sigma\sqrt{1-R^2} + Ry - y\right) e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= \lim_{\tau\to 0_+} \frac{R-1}{\tau} y = yR'(0_+), \qquad (4.202)$$

$$A_2(y) = \lim_{\tau\to 0_+} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (z-y)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \exp\left[-\frac{(Ry-z)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right] dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\tau\to 0_+} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-v\sigma\sqrt{1-R^2} + Ry - y\right)^2 e^{-\frac{v^2}{2}} dv =$$

$$= \lim_{\tau\to 0_+} \frac{1}{\tau} [\sigma^2(1-R^2) + y^2(1-R)^2] = -2\sigma^2 R'(0_+), \qquad (4.202')$$

$$A_n(y) \equiv 0, \quad n \geqslant 3, \qquad (4.202'')$$

où $R'(0_+)$ est la valeur de la dérivée lorsque l'on s'approche de zéro à gauche. Si $R'(\tau)$ est continue à l'origine, on a $R'(0) = 0$. Supposons que $R'(\tau)$ ait une coupure pour $\tau = 0$. On a alors $A_1(y) \neq 0$, $A_2(y) \neq 0$.

Calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau}=\frac{\partial w_2}{\partial R}R'(\tau)=w_2\frac{\partial w_2}{\partial R}R'(\tau)=$$

$$=R'(\tau)\,w_2(y,\tau\mid x)\left[\frac{R}{1-R^2}-\frac{x(Rx-y)}{\sigma^2(1-R^2)}-\frac{R(Rx-y)^2}{\sigma^2(1-R^2)^2}\right] \qquad (4.203)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[A_1(y)\,w_2(y,\tau\mid x)]=$$

$$=\left[R'(0_+)+\frac{R'(0_+)\,y\,(Rx-y)}{\sigma^2(1-R^2)}\right]w_2(y,\tau\mid x), \qquad (4.203')$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[A_2(y)\,w_2(y,\tau\mid x)]=$$

$$=-\left[\frac{(Rx-y)^2R'(0_+)}{\sigma^2(1-R^2)^2}-\frac{R'(0_+)}{1-R^2}\right]w_2(y,\tau\mid x). \qquad (4.203'')$$

En portant (4.203) à (4.203") dans (4.191) on obtient

$$\frac{R'(\tau)}{1-R^2(\tau)}\left\{R(\tau)-\frac{[R(\tau)x-y][x-R(\tau)y]}{\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\right\}=$$

$$=\frac{R(\tau)R'(0_+)}{1-R^2(\tau)}\left\{R(\tau)-\frac{[R(\tau)x-y][x-R(\tau)y]}{\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\right\},$$

et comme les expressions se trouvant dans les accolades sont différentes de zéro, la fonction (4.201) satisfait à l'équation de Kolmogorov si

$$R'(\tau)=R(\tau)\,R'(0_+). \qquad (4.204)$$

L'unique solution de l'équation (4.204) satisfaisant à la condition $R(0)=1$ est

$$R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}, \qquad (4.205)$$

où $\alpha=-R'(0_+)$.

Ainsi, *un processus aléatoire normal ayant pour fonction de corrélation l'exponentielle* (4.205) $\left(\text{ou dont le spectre énergétique est de la forme } F(\omega)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2+\omega^2}\right)$ *est un processus de Markov continu.* Un processus aléatoire normal, ayant une fonction de corrélation (ou le spectre énergétique) d'une forme différente, ne peut être un processus de Markov. Evidemment, en vertu de (4.205), un processus normal de Markov n'est pas dérivable en moyenne quadratique.

La densité de probabilité limite d'un processus de Markov normal est égale à

$$w(y)=\lim_{\tau\to\infty}w_2(y,\tau\mid x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

ce qui est en accord avec (4.195).

Mentionnons enfin que, bien qu'un processus aléatoire normal ne puisse être markovien que si (et seulement si) son spectre énergétique est semblable au spectre d'un signal aléatoire télégraphique

[voir (4.119)], dans certains cas on peut considérer ce processus, dont le spectre énergétique est une fraction rationnelle, comme la *composante d'un processus de Markov multidimensionnel* formé d'un processus normal stationnaire et de ses dérivées.

4.5.5. Processus de Wiener. Soit un processus aléatoire $\xi(t)$ à accroissements indépendants (voir § 4.1.3) pour lequel la différence $\xi(t+\tau) - \xi(t)$ suit une distribution normale de paramètres

$$m_1\{\xi(t+\tau) - \xi(t)\} = 0,$$
$$m_1\{[\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2\} = \sigma^2 |\tau|. \qquad (4.206)$$

Si $t > t_0$ et si avec une probabilité unité on a $\xi(t_0) = \xi_0$, pour un t_0 donné la différence $\xi(t) - \xi(t_0)$ forme un *processus de Wiener* (ce processus est en même temps markovien). La densité de probabilité multidimensionnelle d'un processus de Wiener est

$$w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\sigma^2(t_k - t_{k-1})}}, \qquad (4.207)$$
$$t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > t_0 = 0, \quad x_0 = 0.$$

On peut montrer que la fonction de corrélation de la *dérivée* d'un processus de Wiener est une fonction delta. Par conséquent la dérivée d'un processus de Wiener est un *bruit blanc normal*.

Le processus de Wiener décrit le mouvement brownien d'une particule effectuant des déplacements désordonnés dus aux chocs des molécules d'un liquide. La constante σ^2 dépend alors de la masse de la particule et de la viscosité du liquide.

Problèmes

4.1. Démontrer que le processus quasi déterministe

$$\xi(t) = a\cos(\eta t + \varphi) \qquad (1)$$

est rigoureusement stationnaire, si les variables aléatoires a, η et φ sont mutuellement indépendantes, φ étant distribuée uniformément dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Vérifier les relations

$$m_1\{\xi(t)\} = 0, \quad m_1\{\xi^2(t)\} = \frac{1}{2} m_1\{a^2\}, \qquad (2)$$

$$B_\xi(t) = \frac{m_2\{a\}}{2} \frac{\Theta_{1\eta}(\tau) + \Theta_{1\eta}(-\tau)}{2}, \qquad (3)$$

où $\Theta_{1\eta}(\tau)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire η.

Démontrer que si $a = A_0$ et $\eta = \omega_0$ sont constantes, le processus $\xi(t)$ est ergodique avec

$$m_1\{\xi^2(t)\} = \frac{A_0^2}{2}, \quad B_\xi(\tau) = \frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau, \qquad (4)$$

et le temps relatif où la réalisation de ce processus se trouve au-dessous du niveau y est donné par la fonction de répartition (3.15').

4.2. Démontrer que la moyenne temporelle sur l'intervalle fini $2T$ de la réalisation d'un processus aléatoire $\xi(t)$ stationnaire au sens général, c'est-àa dire $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\,dt$ converge en moyenne quadratique pour $T \to \infty$ vers la moyenne du processus $\xi(t)$, si sa moyenne et sa variance sont limitées et si

$$\int_0^\infty |B_\xi(\tau) - m_{1\xi}^2|^2\, d\tau < \infty.$$

Vérifier également l'inégalité

$$M_2\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\,dt\right\} \leqslant 2\sigma_\xi^2\frac{\tau_0}{T},$$

où τ_0 est le temps de corrélation [voir (4.52)].

Démontrer que pour que la grandeur $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\,\xi(t+\tau)\,dt$ converge en moyenne quadratique vers la fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$ d'un processus aléatoire stationnaire $\xi(t)$ il suffit que

$$\int_0^\infty \{[B_\xi(\tau) - m_{1\xi}^2]^2 + [B_\xi(\tau+\tau_0) - m_{1\xi}^2][B_\xi(\tau-\tau_0) - m_{1\xi}^2]\}\, d\tau$$

soit convergente pour toutes les valeurs de τ_0.

4.3. Montrer que la fonction caractéristique unidimensionnelle d'un processus stationnaire quasi déterministe $\xi(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$, où ω_0 est une constante, φ est distribuée uniformément dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, et la densité de probabilité de a est $W_1(r)$, a pour expression

$$\Theta_{1\xi}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(rv)\, W_1(r)\, dr,$$

où J_0 est une fonction de Bessel d'ordre zéro.

Conseil: écrire la densité de probabilité unidimensionnelle de $\xi(t)$ sous la forme [voir (2.39)]

$$W_{1\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(r)\, w_\xi(x \mid r)\, dr \qquad (5)$$

et utiliser le résultat du problème 3.14.

Montrer à partir de (5) que pour $\frac{\sigma}{a} \ll 1$ la distribution normale de l'amplitude de moyenne a et de variance σ^2 peut s'exprimer sous la forme approchée suivante:

$$\Theta_{1\xi}(v) \approx J_0(av)\, I_0\left(\frac{\sigma^2 v^2}{4}\right) e^{\frac{\sigma^2 v^2}{4}}. \qquad (6)$$

4.4. Notant que pour les conditions du problème 4.3 la distribution unidimensionnelle $w_{1\xi}(x)$ est toujours symétrique (car $\Theta_{1\xi}(v)$ est une fonction

réelle et paire), montrer que les moments pairs du processus $\xi(t)$ et de l'amplitude a sont liés par la relation suivante:

$$m_{2n}\{a\} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} m_{2n}\{\xi\}. \tag{7}$$

Montrer que si $w_{1\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, on a

$$m_{2n}\{a\} = 2^n n!\,\sigma^{2n} \tag{8}$$

[voir (3.114)].

4.5. Démontrer les relations suivantes pour un processus aléatoire normal:

$$m_1\{\xi(t_1)\,\xi(t_2)\,\xi(t_3)\,\xi(t_4)\} =$$
$$= B_\xi(t_1, t_2)\,B_\xi(t_3, t_4) + B_\xi(t_1, t_3)\,B_\xi(t_2, t_4) +$$
$$+ B_\xi(t_1, t_4)\,B_\xi(t_2, t_3) - 2a_\xi(t_1)\,a_\xi(t_2)\,a_\xi(t_3)\,a_\xi(t_4). \tag{9}$$

Généraliser la formule (9) au cas d'un processus aléatoire normal de moyenne nulle

$$m_1\left\{\prod_{i=1}^{2n+1} \xi(t_i)\right\} = 0,$$

$$m_1\left\{\prod_{i=1}^{2n} \xi(t_i)\right\} = \sum_{k,\,r} \prod B_\xi(t_{i_k}, t_{i_r}), \tag{9'}$$

où la somme est prise de toutes les manières possibles permettant de former n couples à partir de $2n$ instants.

4.6. Montrer que la fonction de corrélation d'un processus markovien normal stationnaire satisfait à l'équation fonctionnelle suivante:

$$R(t_3 - t_1) = R(t_2 - t_1)\,R(t_3 - t_2). \tag{10}$$

4.7. Montrer que les trois processus déterministes impulsionnels suivants:

$$S_1(t) = e^{at}, \quad |t| \leqslant 1, \tag{11}$$

$$S_2(t) = \begin{cases} e^{a(t+1)}, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ e^{a(t-1)}, & 0 < t \leqslant 1, \end{cases} \tag{11'}$$

$$S_3(t) = e^{at}\left[1 + \frac{8a}{\pi}\left(\frac{a}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} - \sin\frac{\pi t}{2}\right)\cos\frac{\pi t}{2}\right], \quad |t| \leqslant 1, \tag{11''}$$

ont même fonction de corrélation temporelle, soit

$$\langle S_1(t)\,S_1(t+\tau)\rangle = \langle S_2(t)\,S_2(t+\tau)\rangle =$$
$$= \langle S_3(t)\,S_3(t+\tau)\rangle = \frac{1}{2a} e^{2a|\tau|}\,\text{sh}\,a(2 - |\tau|). \tag{12}$$

Pour $a \to 0$ la formule (12) devient celle de la fonction de corrélation temporelle d'une impulsion rectangulaire

$$\langle S(t)\,S(t+\tau)\rangle = 1 - \frac{|\tau|}{2}, \quad |\tau| \leqslant 2. \tag{13}$$

4.8. Soit $\xi(t)$ un processus aléatoire stationnaire au sens général et supposons que

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \xi(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Montrer que le spectre énergétique instantané du processus aléatoire non stationnaire $\xi_0(t)$ est égal à

$$\Phi_{\xi_0}(t, \omega) = 4\int_0^t B_\xi(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau, \quad t > 0, \tag{15}$$

où $B_\xi(\tau)$ est la fonction de corrélation du processus $\xi(t)$.

4.9. Démontrer que la densité de probabilité bidimensionnelle et la fonction caractéristique bidimensionnelle d'une oscillation harmonique d'amplitude A_0 constante et de pulsation ω_0, dont la phase est uniformément distribuée, sont égales à

$$w_2(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{A_0^2 - x_1^2}}\left\{\delta\left[x_2 - A_0\cos\left(\omega_0\tau + \arc\cos\frac{x_1}{A_0}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \delta\left[x_2 - A_0\cos\left(\omega_0\tau - \arc\cos\frac{x_1}{A_0}\right)\right]\right\} \tag{16}$$

$$\Theta_2(v_1, v_2, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \varepsilon_m I_m(A_0v_1)\, I_m(A_0v_2)\cos m\omega_0\tau, \tag{17}$$
$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_m = 2, \quad m \geqslant 1.$$

Chapitre 5

TRANSFORMATIONS DES PROCESSUS ALÉATOIRES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES INERTIELS

5.1. LOIS DE TRANSFORMATIONS

5.1.1. Classification des éléments des systèmes radiotechniques. De nombreux problèmes de radiotechnique se réduisent à l'étude des transformations que subissent certains processus à la traversée des dispositifs plus ou moins compliqués. Laissant de côté les propriétés physiques et techniques tant des processus agissants que des systèmes radiotechniques, nous allons nous arrêter sur les principales définitions, la terminologie adoptée et la classification, ceci dans la mesure où nous en aurons besoin pour l'exposé ultérieur.

Les processus se déroulant dans les systèmes radiotechniques sont des combinaisons différentes de signaux utiles et de bruits déformant ces signaux. Chacune des composantes d'un processus peut être soit une fonction déterminée, soit une fonction aléatoire du temps.

Les éléments des systèmes radiotechniques se divisent généralement en deux groupes: *les éléments non linéaires non inertiels* et *les éléments linéaires inertiels* (ou dynamiques) *). En principe, tout élément radiotechnique est non linéaire et inertiel. Cependant, sous ces hypothèses générales la résolution des problèmes en question se heurte à des difficultés mathématiques. A l'heure actuelle il n'y a pas de méthode générale permettant d'analyser les systèmes non linéaires inertiels, même dans le cas où ceux-ci sont attaqués par des processus déterministes. C'est pourquoi il semble raisonnable de diviser les systèmes en systèmes linéaires et systèmes non linéaires (non inertiels). On peut alors dans chaque cas calculer l'erreur commise.

Ainsi, par exemple, si la charge anodique d'un tube électronique est essentiellement ohmique, on peut négliger l'inertie de sa caractéristique. On peut dans une certaine approximation considérer un détecteur à charge sélective comme un système non linéaire et non inertiel (redresseur) et un système linéaire inertiel (charge) mis en série. L'effet total dû à l'action d'un système non linéaire est le résultat de deux transformations dont l'une est non linéaire et non inertielle et l'autre linéaire et inertielle. Notons cependant que

*) Les éléments inertiels sont parfois appelés systèmes à mémoire finie ou infinie, et les éléments non inertiels, systèmes à mémoire nulle ou sans mémoire.

dans certains cas une telle idéalisation, même en première approximation, conduit non seulement à des erreurs importantes, mais donne une représentation qualitativement fausse des processus étudiés.

La caractéristique d'un élément non linéaire non inertiel peut s'écrire sous la forme d'une transformation univoque non linéaire *):

$$y(t) = f[x(t)], \tag{5.1}$$

où x correspond à l'entrée, et y à la sortie, la valeur de $y(t)$ à un instant t est donnée par la valeur de $x(t)$ à ce même instant t.

Les caractéristiques de la forme (5.1) décrivent, souvent avec une précision suffisante, un grand nombre d'éléments radiotechniques: limiteurs, redresseurs, mélangeurs, convertisseurs de fréquence, modulateurs, détecteurs.

Dans les systèmes inertiels les valeurs de $y(t)$ à la sortie dépendent non seulement des valeurs de $x(t)$ à l'entrée à l'instant t, mais également des valeurs antérieures. Pour un système linéaire inertiel, la valeur de $y(t)$ peut être obtenue par *superposition* (addition) de toutes les valeurs de $x(t)$, chacune d'elles étant pondérée par un coefficient $h(t, \tau)$, dépendant en général de l'instant τ, où le processus a été appliqué à l'entrée, et de l'instant t où l'on observe le processus à la sortie du système. Ainsi le processus $y(t)$ à la sortie d'un système linéaire peut s'exprimer en fonction du processus à l'entrée $x(t)$ à l'aide de l'*intégrale* **):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{5.2}$$

On appelle $h(t, \tau)$ *fonction de transition impulsionnelle*; cette fonction caractérise complètement un système linéaire.

Pour les systèmes linéaires *physiquement réalisables* on a $h(t, \tau) \equiv 0$ pour $t < \tau$ (la valeur de $y(t)$ en un instant donné dépend seulement des valeurs de $x(\tau)$ aux instants antérieurs à t). Dans ce cas la limite supérieure de l'intégration dans (5.2) est égale à t:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{5.2'}$$

---

*) Un cas particulier de la transformation (5.1) est la transformation linéaire non inertielle $y(t) = K(t)\, x(t)$, où $K(t)$ est une fonction donnée du temps (ou une constante comme dans le cas d'un amplificateur linéaire).

**) Très souvent les systèmes linéaires sont décrits par des *équations différentielles linéaires*. Cette méthode est équivalente à celle qui a été exposée ci-dessus. La fonction de transition impulsionnelle $h(t, \tau)$ est bien connue dans la théorie des équations différentielles sous le nom de fonction d'influence ou de fonction de Green, et la formule (5.2) représente la solution d'un certain *problème aux limites* (voir, par exemple, R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der Mathematischen Physik*. J. Springer Verlag, Berlin, 1931).

Si de plus $x(\tau) \equiv 0$ pour $\tau < 0$ on a

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \qquad (5.2'')$$

Au lieu de la fonction de transition impulsionnelle pour caractériser les systèmes linéaires inertiels on peut également utiliser une *fonction de transfert* $k(i\omega, t)$ représentant la transformée de Fourier de $h(t, \tau)$:

$$k(i\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)\, e^{-i\omega(t-\tau)}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t-\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \qquad (5.3)$$

$$h(t, t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(i\omega, t)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (5.3')$$

Les fonctions de transition impulsionnelles et les fonctions de transfert en tant que fonctions de deux variables caractérisent des systèmes linéaires dont les paramètres varient dans le temps. De tels systèmes et les phénomènes s'y déroulant sont parfois appelés *paramétriques*. Les systèmes paramétriques linéaires peuvent démoduler, moduler et convertir *).

5.1.2. Systèmes linéaires à paramètres constants. Les systèmes à *paramètres invariables dans le temps* forment une classe importante de systèmes linéaires, pouvant être divisée en systèmes linéaires à constantes localisées et en systèmes linéaires à constantes réparties **). On classe parmi les premiers les circuits isolés et couplés, les réseaux de filtres et les amplificateurs à plusieurs étages, les lignes à retard, les circuits dérivateurs et intégrateurs, etc. Parmi les systèmes linéaires à constantes réparties on peut citer des lignes et des guides d'ondes.

Dans le cas des systèmes linéaires à paramètres constants la fonction de transition impulsionnelle ne dépend que de la *différence* $t - \tau$, t étant l'instant où le signal est observé à la sortie et τ celui

*) Remarquons cependant, qu'on obtient généralement des systèmes paramétriques (linéaires) à partir de dispositifs travaillant en régime *non linéaire*. Pour l'étude de la modulation et de l'hétérodynage en tant que transformations non linéaires des signaux voir chapitre 12.

**) Du point de vue mathématique ceci correspond à la classification des équations différentielles *linéaires* en équations à coefficients variables (systèmes paramétriques), équations différentielles ordinaires à coefficients constants (constantes localisées) et équations différentielles aux dérivées partielles à coefficients constants (constantes réparties). Souvent il est difficile d'écrire la fonction de transition impulsionnelle (la fonction de Green de l'équation différentielle correspondante) sous forme explicite.

où il a été appliqué à l'entrée du système, c'est-à-dire $h(t, \tau) = h(t - \tau)$. Dans ce cas la formule (5.2) devient

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau. \tag{5.4}$$

Pour les systèmes physiquement réalisables on a

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau, \tag{5.4'}$$

et dans le cas où $x(t) \equiv 0$ pour $t < 0$

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau. \tag{5.4''}$$

La fonction de transfert et la fonction de transition impulsionnelle d'un système linéaire à paramètres constants sont liées par des transformées de Fourier

$$k(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, e^{-i\omega u}\, du, \tag{5.5}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{5.5'}$$

Le module et l'argument de la fonction de transfert $k(i\omega)$ sont appelés respectivement caractéristique *fréquentielle* (ou réponse en fréquence) $C(\omega)$ et caractéristique *de phase* $\varphi(\omega)$ d'un système linéaire

$$k(i\omega) = C(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}. \tag{5.6}$$

Comme $C(\omega)$ est une fonction paire, et $\varphi(\omega)$ une fonction impaire, on peut facilement exprimer la fonction de transition impulsionnelle en fonction des caractéristiques fréquentielle et de phase, soit:

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} C(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega. \tag{5.7}$$

On appelle *largeur de la bande passante* de la réponse en fréquence la largeur de la base du rectangle dont la hauteur est égale à l'ordonnée maximale $C^2(\omega_0)$, et l'aire, à l'aire sous la courbe du carré de

la caractéristique fréquentielle *), c'est-à-dire

$$\Delta_c = \frac{\int\limits_0^{\infty} C^2(\omega)\, d\omega}{C^2(\omega_0)}. \tag{5.8}$$

Si la caractéristique fréquentielle d'un système linéaire a une résonance nette au voisinage de la pulsation ω_0 et si $\omega_0 \gg \Delta_c$, ce système linéaire est dit *à bande étroite.*

Si l'on prend $\omega' = \omega - \omega_0$ pour variable d'intégration, la formule (5.7) devient

$$h(t) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\omega_0}^{\infty} C(\omega' + \omega_0) \cos[\omega' t + \varphi(\omega' + \omega_0)]\, d\omega' \right\} \cos \omega_0 t -$$
$$- \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\omega_0}^{\infty} C(\omega' + \omega_0) \sin[\omega' t + \varphi(\omega' + \omega_0)]\, d\omega' \right\} \sin \omega_0 t.$$

Pour les systèmes à bande étroite les limites inférieures d'intégration dans les intégrales se trouvant entre les accolades peuvent sans grande erreur être étendues à $-\infty$. Introduisant les notations

$$C(\omega' + \omega_0) = C_0(\omega'), \quad \varphi(\omega' + \omega_0) = \varphi_0(\omega')$$

et

$$h_c(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_0(\omega') \cos[\omega' t + \varphi_0(\omega')]\, d\omega', \tag{5.9}$$

$$h_s(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_0(\omega') \sin[\omega' t + \varphi_0(\omega')]\, d\omega', \tag{5.9'}$$

on obtient alors

$$h(t) = h_c(t) \cos \omega_0 t - h_s(t) \sin \omega_0 t = $$
$$= h_0(t) \cos[\omega_0 t + \gamma(t)], \tag{5.10}$$

où

$$h_0(t) = \sqrt{h_c^2(t) + h_s^2(t)}; \tag{5.11}$$

$$\gamma(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{h_s(t)}{h_c(t)}. \tag{5.11'}$$

Si la caractéristique fréquentielle est paire, et la caractéristique de phase impaire par rapport à la pulsation de résonance ω_0, en

---

*) Il est souvent commode de mesurer la largeur de bande d'un système linéaire entre les points où l'amplification en puissance est égale à la moitié de la valeur maximale ou bien l'amplification en tension est 0,7 de la valeur maximale. Pour les études théoriques la définition (5.8) est plus commode. Cependant les deux définitions conduisent à des résultats voisins. La largeur de bande définie conformément à (5.8) est parfois appelée largeur de bande *effective.*

vertu de (5.9) et (5.9′) on a $h_s(t) \equiv 0$, $\gamma(t) \equiv 0$, la fonction de transition impulsionnelle d'un système linéaire à bande étroite peut alors s'écrire comme suit

$$h(t) = h_c(t) \cos \omega_0 t. \tag{5.12}$$

On voit que c'est une fonction $h_c(t)$ lentement variable dans le temps modulant une porteuse cosinusoïdale.

Notons pour terminer, que pour les systèmes linéaires à constantes localisées les fonctions de transfert sont des fonctions homographiques de la variable $i\omega$, et les caractéristiques fréquentielles et de phase des fonctions homographiques de la fréquence.

5.1.3. Deux types de problèmes dans la théorie des transformations des processus aléatoires. Le présent chapitre est consacré à l'étude des transformations que subissent les processus aléatoires à la traversée des systèmes linéaires, et le chapitre suivant traite des transformations non linéaires. Deux types de problèmes seront étudiés, à savoir:

1. Le calcul de la fonction de corrélation et du spectre énergétique du processus à la sortie du système.
2. Le calcul des densités de probabilité multidimensionnelles du processus à la sortie du système.

Il est évident que la solution des problèmes du premier type peut s'obtenir à partir de la solution du second type.

Les dispositifs radiotechniques réels comportent en général tant des éléments linéaires que non linéaires. C'est pourquoi pour obtenir la solution complète du problème il faut effectuer plusieurs transformations successives du processus aléatoire.

Dans ce chapitre et dans le chapitre suivant on donne les méthodes de solution des problèmes mentionnés ci-dessus séparément pour les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. Dans les chapitres ultérieurs les méthodes générales sont illustrées par des exemples.

5.2. TRANSFORMATIONS DES PROCESSUS ALÉATOIRES DANS LES SYSTÈMES À PARAMÈTRES FIXÉS

5.2.1. Caractéristiques énergétiques. Un système linéaire à fonction de transition impulsionnelle $h(t, \tau)$ transforme conformément à (5.2) le processus aléatoire $\xi(t)$, appliqué à son entrée, en un autre processus aléatoire $\zeta(t)$ qui est l'intégrale du premier:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)\, \xi(\tau)\, d\tau. \tag{5.13}$$

Il s'agit ici d'une intégrale en moyenne quadratique, conformément à la définition donnée dans le § 4.3.4.

La relation entre les fonctions de corrélation des processus à la sortie et à l'entrée d'un système linéaire est en vertu de (4.150)

donnée par

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, v_1) \times$$
$$\times\, h(t_2, v_2)\, B_\xi(v_1, v_2)\, dv_1\, dv_2. \quad (5.14)$$

Pour le processus d'entrée stationnaire (au sens général), la formule (5.14) peut s'écrire sous la forme

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, v_1) \times$$
$$\times\, h(t_2, v_2)\, B_\xi(v_2 - v_1)\, dv_1\, dv_2. \quad (5.15)$$

La formule (5.15) montre que le processus à la sortie d'un système linéaire à paramètres variables n'est pas stationnaire même si le processus appliqué à l'entrée est stationnaire. Le carré moyen du processus à la sortie du système est égal à

$$m_2(t) = B_\zeta(t, t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t, v_1)\, h(t, v_2)\, B_\xi(v_2 - v_1)\, dv_1\, dv_2. \quad (5.16)$$

En utilisant (4.151) on trouve la fonction de corrélation mutuelle des processus à l'entrée et à la sortie d'un système linéaire

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2, v)\, B_\xi(t_1, v)\, dv. \quad (5.17)$$

Considérons maintenant des systèmes linéaires à paramètres constants. En effectuant dans (5.14) le changement de variables $u = t_1 - v_1$, $v = t_2 - v_2$, on trouve

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, h(v)\, B_\xi(t_1 - u, t_2 - v)\, du\, dv. \quad (5.18)$$

Si le processus d'entrée d'un système linéaire est stationnaire (au moins au sens général), on a

$$B_\zeta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, h(v)\, B_\xi(u - v + \tau)\, du\, dv. \quad (5.19)$$

Le processus de sortie de ce système linéaire est également stationnaire au sens général.

La formule (5.19) peut s'écrire sous la forme

$$B_\zeta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} b_h(z)\, B_\xi(\tau - z)\, dz, \quad (5.19')$$

la fonction

$$b_h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, h(u+z)\, du \tag{5.19''}$$

dépendant seulement des paramètres du système linéaire.

Par transformation de Fourier, à partir de (5.19) on obtient l'expression du spectre énergétique d'un processus, stationnaire au sens général, à la sortie d'un système à paramètres constants

$$F_\zeta(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_\zeta(\tau)\, e^{-\omega\tau}\, d\tau =$$
$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, h(v) \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(u - v + \tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau\, du\, dv.$$

En effectuant le changement de variable $z = \tau - v + u$ on peut, compte tenu de (5.5′), trouver la relation existant entre les spectres énergétiques à l'entrée et à la sortie d'un système linéaire, soit

$$F_\zeta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, e^{i\omega u}\, du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\, e^{-i\omega v}\, dv \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(z) \times$$
$$\times\, e^{-i\omega z}\, dz = k(i\omega)\, k(-i\omega)\, F_\xi(\omega),$$

mais comme

$$k(i\omega)\, k(-i\omega) = |\, k(i\omega)\,|^2 = C^2(\omega),$$

on a

$$F_\zeta(\omega) = C^2(\omega)\, F_\xi(\omega). \tag{5.20}$$

La formule (5.20) donne la loi de transformation du spectre énergétique d'un processus aléatoire stationnaire à la traversée d'un système linéaire dont la caractéristique fréquentielle est $C(\omega)$. La caractéristique de phase d'un système linéaire, n'a, comme il fallait s'y attendre, aucune influence sur la loi de transformation du spectre énergétique du processus.

En vertu de (5.20) la fonction de corrélation $B_\zeta(\tau)$ d'un processus aléatoire à la sortie d'un système linéaire est

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_\xi(\omega)\, C^2(\omega) \cos\omega\tau\, d\omega. \tag{5.21}$$

En vertu de (5.19) et (5.21) la puissance moyenne du processus à la sortie d'un système linéaire est égale à

$$B_\zeta(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_\xi(\omega)\, C^2(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(v-u)\, h(v)\, h(u)\, dv\, du. \tag{5.22}$$

Ainsi, les formules (5.19) à (5.21) donnent la transformation du spectre énergétique d'un processus aléatoire stationnaire et de sa fonction de corrélation à la traversée d'un système linéaire, à condition toutefois de connaître la caractéristique fréquentielle (ou la fonction de transition impulsionnelle) du système et le spectre énergétique ou la fonction de corrélation du processus d'entrée.

La fonction de corrélation mutuelle des processus à l'entrée et à la sortie d'un système linéaire est en vertu de (5.17) égale à

$$B_{\xi\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) B_{\xi}(\tau - u)\, du. \tag{5.23}$$

Pour un système linéaire physiquement réalisable l'intégration dans (5.19) et les intégrations suivantes sont étendues seulement aux valeurs positives des variables.

Si l'on étudie les *processus transitoires* dans les systèmes linéaires il faut tenir compte de l'instant de branchement, c'est-à-dire poser $\xi(t) \equiv 0$ pour $t < 0$. On a alors [comparer avec (5.4″)]

$$\zeta(\tau) = \int_0^t \xi(t - \tau) h(\tau)\, d\tau. \tag{5.24}$$

Donc le processus transitoire de sortie $\zeta(t)$ dans les systèmes linéaires à paramètres constants n'est pas stationnaire même si le processus aléatoire d'entrée $\xi(t)$ est stationnaire. La valeur moyenne du processus à la sortie d'un système linéaire est alors égale à [comparer avec (4.148)]

$$a_{\zeta}(t) = \int_0^t h(\tau) a_{\xi}(t - \tau)\, d\tau, \tag{5.25}$$

et si $\xi(t)$ est stationnaire on a

$$a_{\zeta}(t) = a_{\xi} \int_0^t h(\tau)\, d\tau. \tag{5.25'}$$

La fonction de corrélation du processus transitoire est

$$B_{\zeta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B_{\xi}(u - v + t_2 - t_1) h(u) h(v)\, du\, dv. \tag{5.26}$$

Le second moment du processus dépend du temps, il est égal à

$$m_2\{\zeta(t)\} = B_{\zeta}(t, t) = \int_0^t \int_0^t B_{\xi}(u - v) h(u) h(v)\, du\, dv. \tag{5.26'}$$

L'intégrale indéfinie du processus aléatoire $\xi(t)$ est un cas particulier de $\zeta(t)$ pour $h(\tau) \equiv 1$ (voir § 4.3.4).

Remarquons qu'en utilisant les propriétés de filtrage des dérivées des fonctions delta [voir annexe III, formule (9)] on peut considérer la dérivation d'un processus aléatoire comme le résultat du passage de ce processus à travers un système linéaire à fonction de transition impulsionnelle égale à $\delta'(t)$. En vertu de (5.5) pour un tel système linéaire $k(i\omega) = -i\omega$, le carré de la caractéristique fréquentielle est alors $C^2(\omega) = \omega^2$. En utilisant la formule (5.20) on peut trouver le spectre de la dérivée $F_{\xi'}(\omega) = \omega^2 F_\xi(\omega)$ ce qui coïncide avec la formule (4.136) obtenue d'une manière différente.

5.2.2. Bruit blanc à la traversée d'un système linéaire. Considérons le cas fort important, où à l'entrée d'un système linéaire agit un bruit blanc, processus stationnaire au sens général, à spectre énergétique uniforme pour toutes les fréquences [voir (4.74)]

$$F_\xi(\omega) = 2N_0 = \text{const},$$

et dont la fonction de corrélation en vertu de (4.75) est

$$B_\xi(\tau) = N_0\delta(\tau).$$

Utilisant (5.15) et la propriété de filtrage de la fonction delta (voir annexe III) il est alors facile de trouver l'expression de la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un système linéaire lorsqu'on applique un bruit blanc à son entrée

$$B_\zeta(t_1, t_2) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, v)\, h(t_2, v)\, dv, \tag{5.27}$$

pour les systèmes physiques réels on a

$$B_\zeta(t_1, t_2) = N_0 \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, v)\, h(t_2, v)\, dv, \qquad t_2 > t_1. \tag{5.27'}$$

La valeur moyenne du carré du processus de sortie est

$$B_\zeta(t, t) = m_1\{\zeta^2(t)\} = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t, v)\, dv. \tag{5.28}$$

En utilisant (5.17) ainsi que la propriété de filtrage de la fonction delta il est facile de voir que pour $B_\xi(t_1, v) = N_0\delta(v - t_1)$ on a

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = N_0 h(t_2, t_1).$$

On a ainsi une méthode corrélationnelle simple de calcul de la fonction de transition impulsionnelle $h(t_2, t_1)$ d'un système linéaire. Si on applique un bruit blanc à l'entrée du système, la fonction de corrélation mutuelle des processus d'entrée et de sortie coïncide exactement avec $h(t_2, t_1)$.

Pour les systèmes linéaires à paramètres constants, en vertu de (5.27), on a :

$$B_\zeta(\tau) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(v)\, h(v+\tau)\, dv = \frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} C^2(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega, \qquad (5.29)$$

avec

$$B_\zeta(0) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(v)\, dv = \frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} C^2(\omega)\, d\omega. \qquad (5.29')$$

Par conséquent, la fonction de corrélation du bruit blanc à la sortie d'un système linéaire à paramètres constants coïncide, à un facteur constant près, avec la convolution de la fonction de transition impulsionnelle du système [ou avec la fonction $b_h(\tau)$, voir (5.19″)].

Le spectre énergétique $F_\zeta(\omega)$ d'un processus aléatoire à la sortie de ce système s'obtient à partir de (5.20):

$$F_\zeta(\omega) = 2N_0 C^2(\omega), \qquad (5.30)$$

ce qui est en accord avec (5.29).

Ainsi, le spectre énergétique du bruit blanc à la sortie d'un système linéaire à paramètres constants a l'allure du carré de la caractéristique fréquentielle du système.

Dans le cas d'un système linéaire à bande étroite, dont la caractéristique fréquentielle est symétrique par rapport à la pulsation ω_0, la fonction de corrélation à la sortie, en vertu de (5.12), devient

$$B_\zeta(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_c(v)\, h_c(v+\tau)\, [\cos \omega_0\tau + \cos(2\omega_0 v + \omega_0\tau)]\, dv,$$

mais comme la fonction $h_c(v)$ varie bien plus lentement que $\cos \omega_0\tau$, on peut négliger l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} h_c(v)\, h_c(v+\tau) \cos(2\omega_0 v + \omega_0\tau)\, dv$, de sorte que

$$B_\zeta(\tau) = \frac{N_0}{2} \cos \omega_0\tau \int_{-\infty}^{\infty} h_c(v)\, h_c(v+\tau)\, dv = \frac{N_0}{2} b_{h_c}(\tau) \cos \omega_0\tau. \qquad (5.31)$$

Compte tenu de (5.9), on peut exprimer (5.31) en fonction de la caractéristique fréquentielle *), on a ainsi:

$$B_\zeta(\tau) = \left[\frac{2N_0}{\pi} \int_0^{\infty} C_0^2(\omega) \cos \omega t \, d\omega\right] \cos \omega_0\tau, \qquad (5.32)$$

où

$$C_0(\omega) = C(\omega + \omega_0).$$

L'expression (5.32) montre que la fonction de corrélation d'un bruit blanc ayant traversé un système linéaire à bande étroite de

*) Car la transformée de Fourier de $C_0^2(\omega)$ est égale à la convolution des fonctions de transition impulsionnelles $h_c(v)$.

pulsation de résonance ω_0 n'est, au facteur $\cos \omega_0 \tau$ près, autre que la fonction de corrélation du bruit blanc ayant traversé un système de caractéristique fréquentielle $C_0(\omega)$, obtenue par déplacement de ω_0 vers les fréquences basses de la caractéristique $C(\omega)$. Comparant (5.32) et (4.73) on voit que le processus à la sortie d'un système linéaire à bande étroite est un processus aléatoire à bande étroite.

Le quotient de la puissance moyenne de la dérivée du processus par la puissance moyenne du processus à la sortie d'un système linéaire dont l'entrée est attaquée par un bruit blanc, est égal à [voir (4.137')]

$$\omega_1^2 = \frac{B_{\zeta'}(0)}{B_\zeta(0)} = \frac{\int_0^\infty \omega^2 C^2(\omega)\, d\omega}{\int_0^\infty C^2(\omega)\, d\omega}. \tag{5.33}$$

Pour un système à bande étroite de pulsation centrale ω_0 et de caractéristique fréquentielle symétrique par rapport à ω_0 on a

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{\int_0^\infty \omega^2 C_0^2(\omega)\, d\omega}{\int_0^\infty C_0^2(\omega)\, d\omega}. \tag{5.34}$$

Pour que le processus à la sortie d'un système linéaire soit dérivable il suffit que l'intégrale $\int_0^\infty \omega^2 C^2(\omega)\, d\omega$ ait une limite.

5.2.3. Systèmes linéaires à paramètres localisés. Nous allons maintenant étudier ce que devient un bruit blanc à la traversée d'un système linéaire à paramètres localisés. Considérons quelques exemples.

1. Circuits dérivateurs et intégrateurs (circuits *CR* et *RC*). La fonction de transfert d'un circuit dérivateur *) est

$$k(i\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC},$$

d'où l'expression du carré de sa caractéristique fréquentielle

$$C^2(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

*) On conserve ici la terminologie habituelle (voir par ex. [9]); il n'y a évidemment pas de sens à parler de dérivation d'un bruit blanc, car pour que le circuit considéré puisse dériver un processus il faut que le temps de corrélation du processus soit très supérieur à la constante de temps du circuit, c'est-à-dire il faut que l'on ait $\tau_0 \gg RC$.

Le spectre énergétique et la fonction de corrélation d'un processus à la sortie d'un circuit dérivateur recevant à l'entrée un bruit blanc sont en vertu de (5.29) et (5.30)

$$F_{\zeta}(\omega) = 2N_0 \frac{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}, \tag{5.35}$$

$$B_{\zeta}(\tau) = \frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \cos \omega\tau \, d\omega = N_0 \delta(\tau) - \frac{N_0 \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha\tau x)}{1+x^2} dx,$$

mais

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|},$$

on a donc

$$B_{\zeta}(\tau) = N_0 \delta(\tau) - \frac{N_0 \alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|}. \tag{5.36}$$

Pour $\tau = 0$ la fonction de corrélation (5.36) n'est pas limitée, par conséquent le processus à la sortie du circuit n'est pas continu en moyenne quadratique (voir § 4.3.2).

Soit maintenant un circuit intégrateur dont la fonction de transfert est *)

$$k(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega RC},$$

et le carré de la caractéristique fréquentielle

$$C^2(\omega) = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}^2\right)}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

La largeur de la bande passante est en vertu de (5.8)

$$\Delta_c = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} = \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Le spectre énergétique, la fonction de corrélation et le coefficient de corrélation du processus à la sortie d'un circuit intégrateur attaqué par un bruit blanc, en vertu de (5.29) et (5.30), sont donnés

*) Voir note à la page 236. Comme dans ce cas $h(u) = \alpha e^{-\alpha u}$, $u > 0$, pour que le processus puisse être intégré par le circuit en question, le temps de corrélation du processus doit être très inférieur à la constante de temps du circuit, c'est-à-dire il faut qu'on ait $\tau_0 \ll RC$.

par les expressions suivantes:

$$F_\zeta(\omega) = \frac{2N_0}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}, \tag{5.37}$$

$$B_\zeta(\tau) = \frac{N_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega\tau}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\omega = \frac{N_0 \alpha}{2} e^{-\alpha|\tau|}, \tag{5.38}$$

$$R_\zeta(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}. \tag{5.38'}$$

Le temps de corrélation du processus à la sortie d'un circuit intégrateur est

$$\tau_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2\Delta_c}.$$

La figure 5.1 donne le coefficient de corrélation et le spectre énergétique à la sortie d'un circuit intégrateur. La courbe du coefficient de corrélation n'est construite que pour les valeurs positives de l'argument τ; étant une fonction paire, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

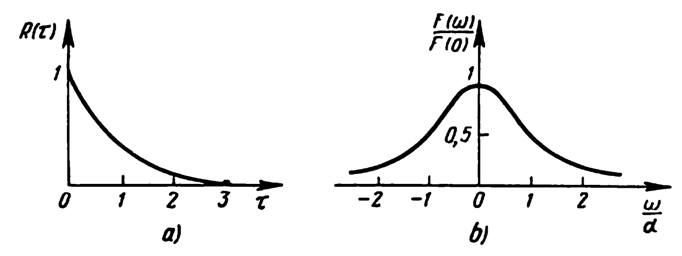


Fig. 5.1. Coefficient de corrélation (*a*) et spectre énergétique (*b*) d'un bruit blanc à la sortie d'un circuit intégrateur

Bien que le processus à la sortie du circuit soit, dans ce cas, continu en moyenne quadratique, il n'est pas dérivable (voir § 4.3.3). En effet, la puissance moyenne du processus à la sortie

$$B_\zeta(0) = \frac{N_0 \alpha}{2} = 2N_0 \frac{\Delta_c}{2\pi}$$

est finie, et l'intégrale

$$\int_0^\infty \omega^2 F_\zeta(\omega)\, d\omega = 2N_0 \int_0^\infty \frac{\omega^2}{1+\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\omega$$

est divergente (la dérivée de la fonction de corrélation est discontinue pour $\tau = 0$).

Remarquons que les courbes de la fonction de corrélation et du spectre énergétique d'un bruit blanc ayant traversé un circuit inté-

grateur ont le même aspect que les courbes correspondantes d'un signal télégraphique généralisé (voir fig. 4.9 et 4.10). Si le bruit blanc suit une distribution normale, le processus à la sortie du circuit intégrateur est un processus *markovien* normal (voir § 4.5.4).

2. Circuit oscillant simple. La fonction de transfert d'un circuit oscillant simple, composé d'une inductance L, d'un condensateur C et d'une résistance R en série, est égale à

$$k(i\omega)=\frac{1}{1+i\omega\frac{d}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

où $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la fréquence de résonance et $d=R\sqrt{\frac{C}{L}}$ l'amortissement qui est une grandeur inverse au facteur de surtension Q du circuit.

Le carré de la caractéristique fréquentielle est

$$C^2(\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\omega^2\frac{d^2}{\omega_0^2}}.$$

A partir de (5.8) on trouve la largeur de la bande passante

$$\Delta_c=\frac{\pi}{2}\omega_0 d=\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0}{Q}=\pi\beta,\quad \beta=\frac{\omega_0 d}{2}=\frac{R}{2L}.$$

Si le facteur de surtension est élevé on a $\frac{\Delta_c}{\omega_0}=\frac{\pi}{2Q}\ll 1$, ce qui veut dire que la caractéristique fréquentielle possède un domaine de résonance nettement exprimé au voisinage de ω_0. Le circuit est alors à bande étroite et l'on a

$$C_0^2(\omega)=\frac{1}{\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2+d^2}=\frac{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2}{\omega^2+\beta^2}.$$

Le spectre énergétique d'un bruit blanc à la sortie de ce circuit est

$$F_\zeta(\omega)=\frac{N_0}{2}\frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+\beta^2}. \tag{5.39}$$

En vertu de (5.32) on a pour la fonction de corrélation

$$B_\zeta(\tau)=\frac{2N_0}{\pi}\frac{\omega_0^2}{4}\int_0^\infty\frac{\cos\omega\tau}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega\cos\omega_0\tau$$

ou

$$B_\zeta(\tau)=\frac{N_0}{2}\frac{\omega_0^2}{\beta}e^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau. \tag{5.40}$$

et

$$R_\zeta(\tau) = e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \qquad (5.40')$$

Sur la figure 5.2 on trouvera le coefficient de corrélation et le spectre énergétique du processus à la sortie d'un circuit oscillant simple lorsqu'un bruit blanc est appliqué à son entrée *).

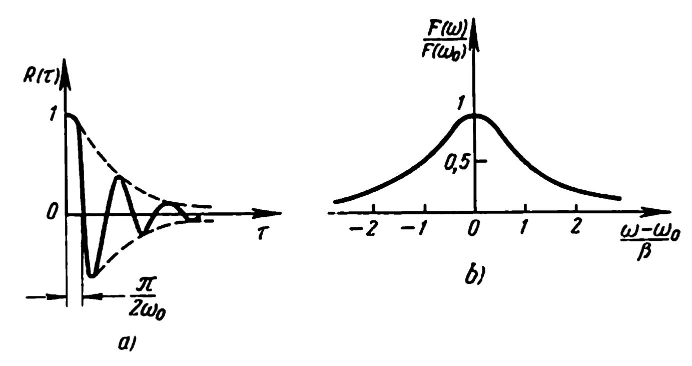


Fig. 5.2. Coefficient de corrélation (*a*) et spectre énergétique (*b*) d'un bruit blanc à la sortie d'un circuit oscillant

Le processus à la sortie d'un circuit oscillant à bande étroite est, lui aussi, à bande étroite, continu en moyenne quadratique, mais n'est pas dérivable car

$$B_\zeta(0) = \frac{N_0}{4} \frac{\omega_0^2}{\beta} = N_0 Q^2 \beta,$$

et l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\omega^2}{\omega^2+\beta^2} d\omega$ est divergente. Le temps de corrélation du processus (voir (4.73)) est égal à $\tau_0 = \frac{1}{\beta} = \frac{\pi}{2\Delta_c}$.

3. Amplificateur à résonance à étages multiples. La forme de la caractéristique fréquentielle d'un amplificateur à étages multiples au fur et à mesure de l'augmentation du nombre des étages tend (sous certaines conditions) vers la courbe de Gauss

$$C(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta^2}},$$

le paramètre β étant lié à la largeur de bande par la relation $\Delta_c = \beta\sqrt{\pi}$. Cette caractéristique fréquentielle est une idéalisation,

*) Les expressions du coefficient de corrélation pour une relation arbitraire entre ω_0 et Δ_c sont données dans le problème 5.1. Pour le cas des circuits couplés voir le problème 5.2.

car un système linéaire ayant une telle caractéristique est physiquement irréalisable.

Le spectre énergétique du bruit blanc à la sortie de ce système est également donné par une courbe de Gauss

$$F_\zeta(\omega) = 2N_0 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}. \tag{5.41}$$

Remarquons que le spectre énergétique (5.41) n'est pas, en toute rigueur, celui d'un processus aléatoire stationnaire, car $F_\zeta(\omega)$ n'est pas une fonction paire par rapport à l'*origine* des coordonnées.

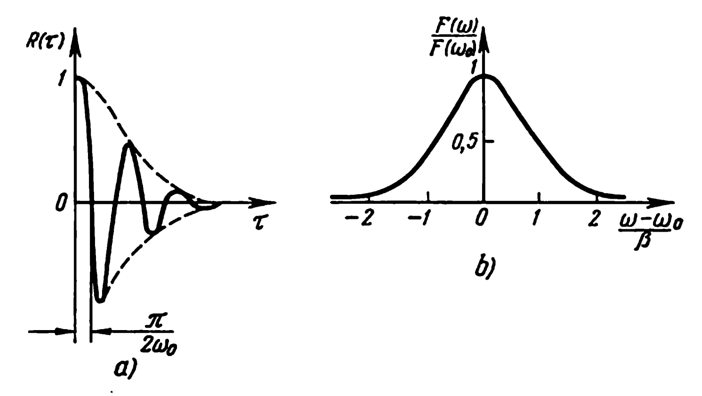


Fig. 5.3. Coefficient de corrélation (*a*) et spectre énergétique (*b*) d'un bruit blanc à la sortie d'un amplificateur à étages multiples

Pour que le spectre soit symétrique par rapport à la pulsation $\omega = 0$ il faut que la caractéristique fréquentielle ait la forme de la somme

$$C^2(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\beta^2}}.$$

Cependant pour $\omega_0 \gg \beta$, c'est-à-dire pour un amplificateur à bande étroite, l'influence du second terme est négligeable.

La fonction de corrélation et le coefficient de corrélation du processus à la sortie d'un amplificateur à bande étroite sont en vertu de (5.32) donnés par les expressions

$$B_\zeta(\tau) = \frac{2N_0}{\pi} \cos\omega_0\tau \int_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}} \cos\omega\tau \, d\omega = \frac{N_0\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}} \cos\omega_0\tau, \tag{5.42}$$

$$R_\zeta(\tau) = e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}} \cos\omega_0\tau. \tag{5.42'}$$

La figure 5.3 montre la courbe du coefficient de corrélation et celle du spectre énergétique du bruit blanc à la traversée d'un amplificateur à étages multiples. La courbe en pointillé de la figure 5.3, *a* correspond à $\omega_0 = 0$.

Si l'on applique un bruit blanc à l'entrée d'un amplificateur à bande étroite à étages multiples, à sa sortie on a un processus à bande étroite, qui est non seulement continu, mais également dérivable en moyenne quadratique (autant de fois qu'on le désire), car tant les puissances moyennes que leurs dérivées sont continues.

En vertu de (5.42) on a

$$B_\xi(0)=\frac{N_0\beta}{\sqrt{\pi}}=\frac{N_0\Delta_c}{\pi},$$

et à partir de (5.34) on obtient

$$\omega_1^2=\omega_0^2+\frac{\int\limits_0^\infty \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}}\,d\omega}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}}\,d\omega},$$

c'est-à-dire

$$\omega_1^2=\omega_0^2+\frac{\beta^2}{2}=\omega_0^2+\frac{\Delta_c^2}{2\pi}. \tag{5.43}$$

Le temps de corrélation du processus est égal à [voir (4.73)]

$$\tau_0=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{2}}\,d\tau=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\Delta_c\sqrt{2}}.$$

4. F i l t r e p a r f a i t. L'équation de la caractéristique fréquentielle d'un filtre parfait est

$$C(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega-\omega_0|\leqslant\frac{\Delta_c}{2},\\ 0, & |\omega-\omega_0|>\frac{\Delta_c}{2}.\end{cases}$$

Pour $\Delta_c \ll \omega_0$ le filtre est un système linéaire à bande étroite. Une caractéristique fréquentielle rectangulaire, tout comme une caractéristique gaussienne, est une idéalisation mathématique physiquement irréalisable pour un système linéaire. Les filtres réels à paramètres localisés peuvent cependant avoir des caractéristiques fréquentielles assez voisines du rectangle.

Le spectre énergétique, la fonction de corrélation et le coefficient de corrélation du bruit blanc, à la traversée d'un filtre parfait, sont (fig. 5.4)

$$F_\xi(\omega)=\begin{cases}2N_0, & |\omega-\omega_0|\leqslant\frac{\Delta_c}{2},\\ 0, & |\omega-\omega_0|>\frac{\Delta_c}{2}.\end{cases} \tag{5.44}$$

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta_c}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta_c}{2}} 2N_0 \cos\omega\tau\, d\omega = \frac{2N_0}{\pi\tau} \sin\frac{\tau\Delta_c}{2} \cos\omega_0\tau, \tag{5.45}$$

$$R_\zeta(\tau) = \frac{\sin\frac{\tau\Delta_c}{2}}{\frac{\tau\Delta_c}{2}} \cos\omega_0\tau. \tag{5.45'}$$

Remarquons que l'expression (5.45') est de la même forme que (5.32); c'est le produit d'une fonction variant lentement dans le temps $\frac{\sin\frac{\tau\Delta_c}{2}}{\frac{\tau\Delta_c}{2}}$ par un terme haute fréquence $\cos\omega_0 t$, ceci étant

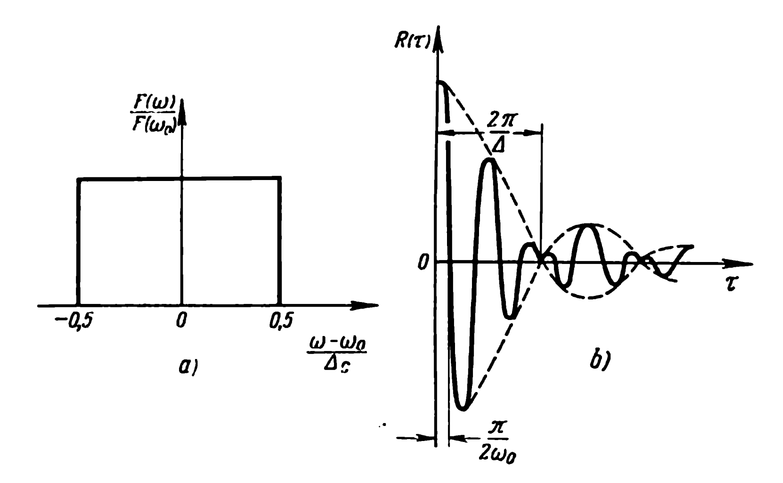


Fig. 5.4. Spectre énergétique (*a*) et coefficient de corrélation (*b*) d'un bruit blanc à la traversée d'un filtre parfait

vrai non seulement pour des filtres à bande étroite mais quels que soient ω_0 et Δ_c. Cependant seule la caractéristique fréquentielle rectangulaire est douée de cette particularité.

La courbe en pointillé de la figure 5.4, *b* correspond à un filtre passe-bas ($\omega_0 = 0$).

Le processus à la sortie d'un filtre parfait est dérivable en moyenne quadratique (un nombre arbitraire de fois). Les puissances moyennes du processus et de sa dérivée sont données par les formules

$$B_\zeta(0) = \frac{N_0\Delta_c}{\pi}, \quad B_{\zeta'}(0) = \omega_1^2 B_\zeta(0), \tag{5.46}$$

où

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{\Delta_c} \int\limits_0^{\frac{\Delta_c}{2}} \omega^2 \, d\omega = \omega_0^2 + \frac{\Delta_c^2}{12} . \qquad (5.46')$$

Le temps de corrélation du processus est

$$\tau_0 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \frac{\tau\Delta_c}{2}}{\frac{\tau\Delta_c}{2}} \, d\tau = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\Delta_c} = \frac{\pi}{\Delta_c} . \qquad (5.46'')$$

5.2.4. Processus à bande étroite à la traversée d'un système à bande étroite. Soit un processus aléatoire dont le spectre énergétique se trouve concentré au voisinage de la pulsation Ω_0, traversant un système linéaire à bande étroite de pulsation de résonance ω_0 et de caractéristique fréquentielle symétrique. En vertu de (5.12) et (4.71) on peut écrire comme suit la fonction de transition impulsionnelle du système et la fonction de corrélation du processus d'entrée

$$h(t) = h_c(t) \cos \omega_0 t,$$
$$B_\xi(\tau) = a_{c_1}(\tau) \cos \Omega_0 \tau + a_{s_1}(\tau) \sin \Omega_0 \tau .$$

L'expression (5.19') permet alors de trouver l'expression de la fonction de corrélation du processus à la sortie du système [voir (5.31)]

$$B_\zeta(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_h(z) \, [a_{c_1}(\tau - z) \cos (\omega_0 + \Delta\omega)(\tau - z) + $$
$$+ a_{s_1}(\tau - z) \sin (\omega_0 + \Delta\omega)(\tau - z)] \, dz, \qquad (5.47)$$

où

$$\Delta\omega = \Omega_0 - \omega_0,$$

$$b_h(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_c(u) \, h_c(u+z) \cos \omega_0 u \cos \omega_0 (u+z) \, du \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \cos \omega_0 z \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_c(u) \, h_c(u+z) \, du = \frac{1}{2} b_{h_c}(z) \cos \omega_0 z. \qquad (5.48)$$

En portant (5.48) dans (5.47) et tenant compte de ce que $b_{h_c}(z)$, $a_{c_1}(\tau)$, $a_{s_1}(\tau)$ sont des fonctions variant bien plus lentement que $\cos \omega_0 \tau$ et $\sin \omega_0 \tau$ (ce qui permet de négliger les intégrales contenant des fonctions variant rapidement) on obtient

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_{h_c}(z) \, \{a_{c_1}(\tau - z) \cos [\omega_0 \tau + \Delta\omega (\tau - z)] + $$
$$+ a_{s_1}(\tau - z) \sin [\omega_0 \tau + \Delta\omega (\tau - z)]\} \, dz.$$

Introduisant les notations

$$a_{c_2}(\tau)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} b_{h_c}(z)\,[a_{c_1}(\tau-z)\cos\Delta\omega(\tau-z)+$$
$$+a_{s_1}(\tau-z)\sin\Delta\omega(\tau-z)]\,dz, \qquad (5.49)$$

$$a_{s_2}(\tau)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} b_{h_c}(z)\,[a_{s_1}(\tau-z)\cos\Delta\omega(\tau-z)-$$
$$-a_{c_1}(\tau-z)\sin\Delta\omega(\tau-z)]\,dz, \qquad (5.49')$$

on peut écrire la fonction de corrélation sous la forme suivante

$$B_{\zeta}(\tau)=a_{c_2}(\tau)\cos\omega_0\tau+a_{s_2}(\tau)\sin\omega_0\tau, \qquad (5.50)$$

ce qui montre que le processus à la sortie du système est dans ce cas à bande étroite. Remarquons que, même lorsque le spectre du processus d'entrée est symétrique par rapport à Ω_0, donc si $a_{s_1}(\tau)\equiv\equiv 0$, les deux termes de l'expression (5.50) sont différents de zéro car, vu le décalage $\Delta\omega\neq 0$, le spectre énergétique du processus de sortie n'est en général pas symétrique.

A titre d'exemple considérons la formule (5.50) dans le cas où le système linéaire est un amplificateur à bande étroite, de pulsation de résonance ω_0 et de caractéristique fréquentielle gaussienne, et où le processus d'entrée est un bruit blanc ayant traversé un système à bande étroite de pulsation de résonance Ω_0 et de caractéristique fréquentielle gaussienne, les bandes passantes des deux systèmes linéaires étant les mêmes. En vertu de (5.42) on trouve

$$a_{c_1}(\tau)=\frac{N_0\beta}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}, \qquad a_{s_1}(\tau)=0,$$
$$b_{h_c}(z)=\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\beta^2z^2}{4}}.$$

En vertu de (5.49) et (5.49') on a

$$a_{c_2}(\tau)=\frac{N_0\beta^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2z^2}{4}}e^{-\frac{\beta^2(\tau-z)^2}{4}}\cos\Delta\omega(\tau-z)\,dz=$$
$$=\frac{N_0\beta^2}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{\tau}{2}-u\right)^2}\cos\Delta\omega u\,du=$$
$$=\frac{N_0\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\cos\left(\frac{\Delta\omega}{\beta}v-\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)dv=$$

$$=\frac{N_0\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\cos\frac{\Delta\omega\tau}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}\cos\frac{\Delta\omega}{\beta}v\,dv=$$

$$=\frac{N_0\beta}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}e^{-2\left(\frac{\Delta\omega}{2\beta}\right)^2}\cos\frac{\Delta\omega\tau}{2}, \qquad (5.51)$$

$$a_{s_2}(\tau)=-\frac{N_0\beta^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta^2z^2}{4}}e^{-\frac{\beta^2}{4}(\tau-z)^2}\sin\Delta\omega(\tau-z)\,dz=$$

$$=-\frac{N_0\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}\sin\left(-\frac{\Delta\omega}{\beta}v+\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)dv=$$

$$=-\frac{N_0\beta}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\sin\frac{\Delta\tau}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}\cos\frac{\Delta\omega}{\beta}v\,dv=$$

$$=-\frac{N_0\beta}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}e^{-2\left(\frac{\Delta\omega}{2\beta}\right)^2}\sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}. \qquad (5.52)$$

En portant (5.51) et (5.52) dans (5.50) on trouve la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à bande étroite de spectre énergétique gaussien ayant traversé un système linéaire à bande étroite, de caractéristique fréquentielle gaussienne, désaccordé par rapport à la fréquence centrale:

$$B_\zeta(\tau)=\frac{N_0\beta}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}e^{-2\left(\frac{\Delta\omega}{2\beta}\right)^2}\cos\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau. \qquad (5.53)$$

Le coefficient de corrélation correspondant est égal à

$$R_\zeta(\tau)=e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\cos\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau=e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{8}}\cos\frac{\omega_0+\Omega_0}{2}\tau. \qquad (5.53')$$

Ainsi l'enveloppe du coefficient de corrélation a la même forme que dans (5.42′) et la porteuse est égale à la demi-somme de la porteuse du processus et de la fréquence de résonance du système. Il est évident qu'ici il est plus facile d'obtenir par transformation de Fourier la fonction de corrélation (5.53) à partir du spectre énergétique

$$F_\zeta(\omega)=2N_0e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}e^{-\frac{(\omega-\Omega_0)^2}{\beta^2}}=2N_0e^{-\frac{2}{\beta^2}\left(\omega-\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}e^{-2\left(\frac{\Delta\omega}{2\beta}\right)^2}.$$

5.2.5. Systèmes paramétriques. Considérons plusieurs exemples où un processus aléatoire stationnaire traverse des systèmes paramétriques, c'est-à-dire des systèmes linéaires dont les paramètres varient dans le temps suivant une loi donnée.

1. L i g n e s à r e t a r d. L'effet d'une ligne à retard peut être décrit par la relation

$$\zeta(t) = \xi[t - \tau(t)],$$

où $\tau(t)$ est une fonction donnée du temps. Il s'ensuit que la fonction de transition impulsionnelle d'une ligne à retard est de la forme [voir (5.13)]

$$h(t, t-u) = \delta[\tau(t) - u]. \tag{5.54}$$

En portant (5.54) dans (5.15) et en utilisant la propriété de filtrage de la fonction delta, on obtient l'expression de la fonction de corrélation du processus à la sortie d'une ligne à retard

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta[\tau(t_1) - t_1 + v_1]\,\delta[\tau(t_2) - t_2 + v_2] \times \\ \times B_\xi(v_2 - v_1)\,dv_1\,dv_2 = B_\xi[\tau(t_1) - \tau(t_2) + t_2 - t_1]. \tag{5.55}$$

Si le retard τ est constant (ne dépend pas du temps), on peut à partir de (5.55) trouver la fonction de corrélation $B_\xi(t_2 - t_1)$ du processus d'entrée, dont les caractéristiques comme il se devait pour un processus stationnaire ne dépendent pas du déplacement constant dans le temps. Remarquons également que si le retard varie lentement *), c'est-à-dire si $\tau(t) = -kt$, on a

$$B_\zeta(t_2 - t_1) = B_\xi[(1+k)(t_2 - t_1)]. \tag{5.56}$$

Dans ce cas le processus à la sortie de la ligne à retard reste stationnaire (au sens général) et sa fonction de corrélation peut être obtenue à partir de la fonction de corrélation du processus $\xi(t)$ par changement d'échelle suivant l'axe du temps de $(1+k)$ fois. La forme du spectre énergétique se conserve également, mais l'échelle suivant l'axe des fréquences change de $\frac{1}{1+k}$ fois **).

2. M o d u l a t e u r d' a m p l i t u d e. Supposons que la fonction de transfert d'un système linéaire ne dépende pas de la fréquence

$$k(i\omega, t) = f(t). \tag{5.57}$$

En vertu de (5.3′) la fonction de transition impulsionnelle de ce système est

$$h(t, t-u) = \frac{1}{2\pi} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u}\,d\omega = f(t)\,\delta(u) \tag{5.58}$$

et

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-u)\,\xi(u)\,du = f(t)\,\xi(t), \tag{5.59}$$

---

*) C'est le cas, par exemple, des systèmes de télécommunication dont les points d'émission et de réception sont en mouvement les uns par rapport aux autres : dans ce cas $k = v/v_m$, où v est la composante radiale de la vitesse, v_m la vitesse de propagation du processus dans le milieu.

**) Si k est petit et le spectre de $\xi(t)$ est à bande étroite (au voisinage de la porteuse ω_0) le changement d'échelle mentionné est équivalent à un déplacement de $-k\omega_0$ de tout le spectre, ce qui correspond à l'effet Doppler.

c'est-à-dire que lorsque le processus $\xi(t)$ traverse ce système linéaire, ses valeurs instantanées se trouvent multipliées par $f(t)$.

Si à l'entrée du modulateur d'amplitude agit un processus aléatoire stationnaire $\xi(t)$, on aura en vertu de (5.14) pour la fonction de corrélation du processus de sortie

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v_1) f(v_2)\,\delta(t_1 - v_1)\,\delta(t_2 - v_2) \times$$
$$\times B_\xi(v_2 - v_1)\,dv_1\,dv_2 = f(t_1) f(t_2) B_\xi(t_2 - t_1), \qquad (5.60)$$

ce qui découle évidemment directement aussi bien de (5.59) que de la définition de la fonction de corrélation.

3. Circuit RC intégrateur à paramètre variable. Considérons un circuit RC dont le paramètre $\alpha = \frac{1}{RC}$ varie dans le temps suivant la loi $\alpha = \alpha(t)$. La fonction de transition impulsionnelle de ce système linéaire est égale à

$$h(t, v) = \alpha_0 e^{-\int_v^t \alpha(x)dx}, \quad t > v. \qquad (5.61)$$

Lorsque $\alpha = \alpha_0$, (5.61) devient $h(t, v) = e^{-\alpha_0(t-v)}$, la fonction de transfert correspondante étant $k(i\omega) = (1 + i\omega\alpha_0)^{-1}$ (voir § 5.2.3).

Compte tenu de (5.27) on peut calculer la fonction de corrélation du processus à la sortie du système paramétrique linéaire étudié si à l'entré on applique un bruit blanc:

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \alpha_0^2 N_0 \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\left[\int_v^{t_1} \alpha(x)dx \int_v^{t_2} \alpha(x)dx\right]} dv, \quad t_2 > t_1. \qquad (5.62)$$

Pour $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ et $\alpha(x) = 0$, $x \leqslant 0$ on obtient à partir de (5.62)

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \alpha_0^2 N_0 \int_0^{t_1} \frac{v^2}{t_1 t_2}\,dv = \frac{\alpha_0^2 N_0}{3}\,\frac{t_1^2}{t_2}, \quad t_2 > t_1. \qquad (5.63)$$

5.2.6. Fonction de corrélation mutuelle des processus à la sortie des systèmes linéaires. La solution de certains problèmes est liée à l'étude de la fonction de corrélation mutuelle des processus à la sortie de plusieurs systèmes linéaires dont les entrées sont attaquées toutes par le même processus aléatoire $\xi(t)$. Considérons deux systèmes linéaires de fonctions de transition impulsionnelles $h_1(t, \tau)$ et $h_2(t, \tau)$. Soient $\zeta_1(t)$ et $\zeta_2(t)$ les processus à la sortie de ces systèmes lorsqu'on applique à leurs entrées le signal $\xi(t)$. En vertu de (5.13) on a

$$\zeta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t, \tau)\,\xi(\tau)\,d\tau, \qquad (5.64)$$

$$\zeta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t, \tau)\,\xi(\tau)\,d\tau. \qquad (5.64')$$

La fonction de corrélation mutuelle de ces processus est

$$B_{\zeta_1\zeta_2}(t_1, t_2) = m_1\{\zeta_1(t_1)\,\zeta_2(t_2)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t_1, u)\,h_2(t_2, v)\,B_\xi(u, v)\,du\,dv. \qquad (5.65)$$

Dans le cas d'un processus d'entrée stationnaire au sens général pour les systèmes linéaires à paramètres constants la formule (5.65) devient

$$B_{\zeta_1\zeta_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\,h_2(v)\,B_\xi(u - v + \tau)\,du\,dv. \qquad (5.66)$$

En utilisant (5.66) et (4.92) on peut calculer le spectre énergétique mutuel des processus considérés

$$F_{\zeta_1\zeta_2}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_{\zeta_1\zeta_2}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\,h_2(v)\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(u - v + \tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau\,du\,dv.$$

En remplaçant τ par $\tau - u + v$ on peut séparer les variables d'intégration, ce qui donne

$$F_{\zeta_1\zeta_2}(\omega) = k_1(i\omega)\,k_2(-i\omega)\,F_\xi(\omega), \qquad (5.67)$$

où $k_1(i\omega)$, $k_2(i\omega)$ sont les fonctions de transfert des systèmes linéaires. Si les systèmes sont identiques, c'est-à-dire si $k_1(i\omega) \equiv k_2(i\omega) = k(i\omega)$, (5.67) devient (5.20), tout comme (5.66) devient (5.19). Pour $k_2(i\omega) \equiv 1$ on a

$$F_{\zeta\xi}(\omega) = k(i\omega)\,F_\xi(\omega), \quad |F_{\zeta\xi}(\omega)|^2 = F_\xi(\omega)\,F_\zeta(\omega).$$

A titre d'exemple on peut étudier la fonction de corrélation mutuelle d'un bruit blanc à la sortie de deux circuits intégrateurs de constantes de temps $R_1C_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ et $R_2C_2 = \frac{1}{\alpha_2}$ respectivement. En utilisant l'expression de la fonction de transfert du circuit intégrateur (voir § 5.2.3) et la formule (5.67) on trouve le spectre énergétique mutuel cherché

$$F_{\zeta_1\zeta_2}(\omega) = \frac{2N_0\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + i\omega)(\alpha_2 - i\omega)}. \qquad (5.68)$$

La fonction de corrélation mutuelle est

$$B_{\zeta_1\zeta_2}(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}\,d\omega}{\left(1+\frac{i\omega}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{i\omega}{\alpha_2}\right)} = \begin{cases} \alpha N_0 e^{-\alpha_1\tau}, & \tau \geqslant 0, \\ \alpha N_0 e^{\alpha_2\tau}, & \tau \leqslant 0, \end{cases} \qquad (5.69)$$

$\frac{1}{\alpha}$ étant la somme des constantes de temps $R_1C_1 + R_2C_2$. La figure 5.5 montre l'allure de la courbe (5.69) pour $\alpha_1 > \alpha_2$.

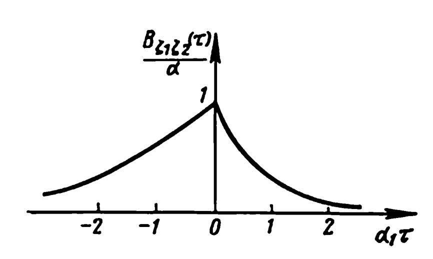


Fig. 5.5. Fonction de corrélation mutuelle d'un bruit blanc à la sortie de deux circuits intégrateurs

Soient n systèmes linéaires. La fonction de corrélation mutuelle et le spectre énergétique aux sorties des systèmes i-ième et j-ième ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) sont donnés par (5.66) et (5.67) en remplaçant simplement les indices 1 et 2 par i et j. Si l'on prend la somme des processus de sortie de tous les n systèmes linéaires, la fonction de corrélation et le spectre énergétique de cette somme sont donnés par les formules (4.56) et (4.97).

5.3. DISTRIBUTION D'UN PROCESSUS APRÈS TRANSFORMATION LINÉAIRE

5.3.1. Moments. Comme le montrent les résultats du § 5.2.1 l'étude de la transformation par un système linéaire de la fonction de corrélation d'un processus et de son spectre énergétique est assez simple, pour cela on n'a même pas besoin de connaître la densité de probabilité du processus d'entrée. Il est bien plus difficile de calculer la densité de probabilité du processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un système linéaire si le processus d'entrée $\xi(t)$ n'est pas normal.

Ce n'est que si le processus $\xi(t)$ à l'entrée d'un système linéaire suit une loi normale que le problème est facile à résoudre. Le processus aléatoire $\zeta(t)$ à la sortie d'un système linéaire est la limite en moyenne quadratique de la somme intégrale $\sum_{k=-N}^{N} h(t, \tau_k) \times \xi(\tau_k)(\tau'_{k+1} - \tau'_k)$, $\tau'_k < \tau_k < \tau'_{k+1}$ pour $|\tau'_{k+1} - \tau'_k| \to 0$ [voir (4.147')]. Dans le cas qui nous intéresse les grandeurs $\xi(\tau_{-N}), \ldots, \xi(\tau_0), \ldots, \xi(\tau_N)$ sont liées par une distribution normale à $(2N + 1)$ dimensions. Comme la somme de variables aléatoires normalement distribuées (même dépendantes, voir § 3.3.5) est normalement distribuée, la distribution de la somme en question est normale quel que soit N.

Ainsi, à la traversée d'un système linéaire un processus aléatoire normal reste normal. Seuls changent la fonction de corrélation et le spectre énergétique, conformément aux formules mentionnées ci-dessus.

Notons ici qu'on conclut de la *normalité* d'un bruit blanc si, appliqué à l'entrée d'un système linéaire, il est normalement distribué à la sortie.

Nous avons déjà noté qu'en radiotechnique on a souvent affaire à l'analyse d'un système linéaire placé après un élément non linéaire. C'est pourquoi même si le processus aléatoire soumis à la transformation non linéaire est normal, il ne le sera plus à l'entrée du système linéaire suivant.

Le problème de la transformation des densités de probabilité dans un système linéaire (inertiel), lorsqu'on applique à son entrée un processus non normal, est très difficile à résoudre. Il existe plusieurs méthodes approchées permettant de résoudre ce problème, basées toutes sur certaines hypothèses concernant les caractéristiques probabilistes du processus aléatoire d'entrée et les propriétés du système linéaire. Au chapitre 9 nous allons étudier ce problème en supposant que le processus à l'entrée du système linéaire est le carré d'un processus aléatoire normal.

Nous allons étudier une méthode approchée basée sur le calcul des moments de la distribution du processus à la sortie d'un système linéaire. Pour simplifier l'exposé nous allons nous limiter au calcul de la densité de probabilité *unidimensionnelle* d'un processus *stationnaire* à la sortie d'un système linéaire à paramètres constants. On peut sans aucune difficulté généraliser cette méthode au cas des fonctions multidimensionnelles et aux processus non stationnaires, bien que les difficultés de calcul puissent s'avérer être insurmontables.

Si les moments $m_{k\zeta}$ d'ordre quelconque du processus $\zeta(t)$ existent, la fonction caractéristique unidimensionnelle $\Theta_{1\zeta}(v)$ peut être représentée sous la forme d'une série [voir (3.111)]

$$\Theta_{1\zeta}(v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k m_{k\zeta} v^k}{k!}.$$

Ainsi, ayant un nombre suffisant de moments de la distribution, on peut, avec une certaine approximation, construire la courbe de la densité de probabilité ou tout au moins avoir une idée de son aspect (voir également § 2.4.1).

Désignons par $m_{k\zeta}(\tau_1, \ldots, \tau_{k-1})$ le moment mixte d'ordre k du processus aléatoire $\zeta(t)$ à la sortie d'un système linéaire. Par définition il s'exprime comme suit [voir (4.10)]:

$$m_{k\zeta}(\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}) = m_1\{\zeta(t)\,\zeta(t+\tau_1)\ldots\zeta(t+\tau_{k-1})\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1\ldots x_k w_{k\zeta}(x_1, \ldots, x_k, \tau_1, \ldots, \tau_{k-1}) \times$$
$$\times\, dx_1\ldots dx_k.$$

Le moment initial d'ordre k de la densité de probabilité unidimensionnelle de ce processus peut être défini au moyen de la relation

limite suivante:

$$m_{k\zeta}=\int_{-\infty}^{\infty} x^k w_{1\zeta}(x)\,dx=$$

$$=m_1\{\zeta^k(t)\}=\lim_{\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{k-1}\to 0} m_{k\zeta}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{k-1}). \qquad (5.70)$$

Il est facile de trouver la relation existant entre les moments mixtes des processus à la sortie et à l'entrée du système linéaire. En effet, compte tenu de (5.4) on a

$$m_{k\zeta}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{k-1}) = m_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h(u_1)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots h(u_k)\,\xi(t-u_1)\ldots\xi(t+\tau_{k-1}-u_k)\,du_1\ldots du_k\right\}.$$

En changeant l'ordre d'intégration et en prenant la moyenne on obtient

$$m_{k\zeta}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h(u_1)\ldots$$

$$\ldots h(u_k)\,m_{k\xi}(\tau_1+u_1-u_2,\ \ldots,\ \tau_{k-1}+u_1-u_k)\times$$

$$\times\,du_1\ldots du_k, \qquad (5.71)$$

où $m_{k\xi}$ est le moment mixte d'ordre k du processus à l'entrée du système linéaire.

Si au lieu du moment mixte on introduit sa transformée de Fourier (spectre multidimensionnel) on peut éviter l'intégration multidimensionnelle exigée par la formule (5.71), on a

$$m_k(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{k-1})=\frac{1}{(4\pi)^{k-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_{k-1})\times$$

$$\times\, e^{i(\omega_1\tau_1+\ldots+\omega_{k-1}\tau_{k-1})}\,d\omega_1\ldots d\omega_{k-1}, \qquad (5.72)$$

$$F(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_{k-1}) = 2^{k-1}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} m_k(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{k-1})\times$$

$$\times\, e^{-i(\omega_1\tau_1+\ldots+\omega_{k-1}\tau_{k-1})}\,d\tau_1\ldots d\tau_{k-1}. \qquad (5.72')$$

La formule (5.72′) permet de trouver la relation existant entre les spectres multidimensionnels des processus à la sortie et à l'en-

trée des systèmes linéaires

$$F_\zeta(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1) \ldots h(u_k) \times$$
$$\times 2^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} m_{k\xi}(\tau_1 + u_1 - u_2, \ldots, \tau_{k-1} +$$
$$+ u_1 - u_k)\, e^{-i(\omega_1\tau_1 + \cdots + \omega_{k-1}\tau_{k-1})}\, d\tau_1 \ldots d\tau_{k-1}\, du_1 \ldots du_k.$$

En remplaçant les variables τ_r par $z_r = \tau_r + u_1 - u_{r+1}$ on obtient

$$F_\zeta(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) = F_\xi(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(u_1)\, e^{iu_1 \sum_{r=1}^{k-1} \omega_r}\, h(u_2)\, e^{-i\omega_1 u_2} \ldots$$
$$\ldots h(u_k)\, e^{-i\omega_{k-1}u_k}\, du_1 \ldots du_k$$

ou en introduisant la fonction de transfert $k(i\omega)$ d'un système linéaire

$$F_\zeta(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) = F_\xi(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\, k\left(-i \sum_{r=1}^{k-1} \omega_r\right) \prod_{l=1}^{k-1} k(i\omega_l). \quad (5.73)$$

La formule (5.73) généralise (5.20) et coïncide avec cette dernière pour $k = 2$.

En vertu de (5.70) et de (5.72) le moment d'ordre k du processus à la sortie d'un système linéaire est égal à

$$m_{k\zeta} = \frac{1}{(4\pi)^{k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F_\zeta(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\, d\omega_1 \ldots d\omega_{k-1}. \quad (5.74)$$

Ainsi, en calculant à l'aide de (5.73) le spectre multidimensionnel du processus à la sortie d'un système linéaire, d'après le spectre multidimensionnel du processus d'entrée et de la fonction de transfert du système, on peut trouver les moments de la distribution unidimensionnelle cherchée du processus de sortie.

Notons que lorsque la bande du spectre énergétique d'un processus à large bande appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bas est de beaucoup supérieure à la bande passante de ce système linéaire, le processus de sortie tend toujours à être *normal*, c'est-à-dire que sa densité de probabilité est suffisamment voisine de la loi normale (voir § 3.4).

En effet, on peut approximativement écrire le processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un filtre sous la forme d'une somme intégrale

$$\zeta(t) = \sum_k h(t, k\Delta\tau)\, \xi(k\Delta\tau)\, \Delta\tau, \quad (5.75)$$

$\Delta\tau$ étant bien inférieur à l'inverse de la bande passante du filtre $\left(\Delta\tau \ll \frac{1}{\Delta_f}\right)$.

Si la largeur du spectre énergétique du processus aléatoire initial $\xi(t)$ est telle que le temps de corrélation τ_0 de ce processus est bien inférieur à $\Delta\tau$, les deux variables aléatoires quelconques $\xi(k\Delta\tau)$ et $\xi(r\Delta\tau)$, $k \neq r$, seront pratiquement indépendantes. L'expression (5.75) montre que le processus à la sortie du filtre est la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, laquelle en vertu du théorème de Liapounov doit avoir une distribution voisine de la loi normale.

Comme le produit de la largeur effective Δ_ξ du spectre d'un processus aléatoire par le temps de corrélation τ_0 est de l'ordre de l'unité, en vertu des conditions de normalisation du processus à la sortie du filtre

$$\tau_0 \ll \Delta\tau \ll \frac{1}{\Delta_f}$$

on a

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_\xi} \ll 1,$$

c'est-à-dire pour que le processus soit normal il suffit que la bande passante du filtre passe-bas soit de beaucoup inférieure à la largeur effective du spectre énergétique du processus aléatoire agissant à son entrée. Il est évident que les arguments avancés ne sont pas une démonstration rigoureuse du théorème de la normalisation des processus pour $\frac{\Delta_f}{\Delta_\xi} \ll 1$. Pour le démontrer il aurait fallu tenir compte des corrélations existant entre les termes de la somme (5.75) et étendre le théorème central limite à une somme de variables aléatoires liées (voir [13]).

5.3.2. Intégration du signal télégraphique. Nous allons maintenant appliquer les méthodes exposées dans le paragraphe précédent au signal télégraphique (voir § 4.2.10) formé par une suite de signaux (dits éléments) rectangulaires, de durée aléatoire, pouvant prendre les valeurs $+h$ et $-h$ (nous supposerons ensuite que $h = 1$ ce qui a peu d'importance). Supposons que le processus soit stationnaire, ordinaire et sans post-action *). Supposons de plus que le signal télégraphique en question $\xi(t)$ soit appliqué à l'entrée d'un circuit intégrateur RC (voir § 5.2.3). Nous allons calculer les moments de la distribution unidimensionnelle à la sortie de l'intégrateur. On calcule tout d'abord, d'après (5.70) et (5.71), le moment $m_1\{\xi(t-u_1)\ldots$

---

*) Remarquons que dans ces conditions le signal télégraphique est un processus markovien homogène à deux états dont les probabilités de transition sont $p_{11}(\tau) = p_{22}(\tau) = e^{-\lambda\tau}\text{ch}\,\lambda\tau$, $p_{12}(\tau) = p_{21}(\tau) = e^{-\lambda\tau}\,\text{sh}\,\lambda\tau$, $\tau = t_2 - t_1 > 0$ (voir également page 191).

$\ldots \xi(t-u_k)\}$. En utilisant les résultats du § 4.2.10, on obtient en appliquant la méthode de récurrence (voir également le problème 4.6)

$$m_1\{\xi(t-u_1)\ldots\xi(t-u_k)\}= \\ =\begin{cases}\exp\left\{-2\lambda\sum_{i=2}^{k}(-1)^i|u_1-u_i|\right\}, & k \text{ pair},\\ 0, & k \text{ impair},\end{cases} \tag{5.76}$$

ou pour $u_1 > u_2 > \ldots > u_k > 0$

$$m_1\{\xi(t-u_1)\ldots\xi(t-u_k)\}= \\ =\begin{cases}\exp\left\{-2\lambda\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}u_i\right\}, & k \text{ pair},\\ 0, & k \text{ impair},\end{cases} \tag{5.77}$$

où λ est le nombre moyen de changements de signe du signal télégraphique par unité de temps.

En vertu de (5.71) et (5.77) la distribution du processus à la sortie de tout système linéaire attaqué par un signal télégraphique est *toujours* symétrique, car tous les moments impairs de cette distribution s'annulent.

Pour les circuits intégrateurs la fonction de transition impulsionnelle est égale à

$$h(u)=\alpha e^{-\alpha u},\qquad u\geqslant 0,\qquad \alpha=\frac{1}{RC}. \tag{5.78}$$

En portant (5.77) et (5.78) dans (5.71) on obtient pour $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{k-1} = 0$ et un k pair

$$m_k=\alpha^k k!\int_0^{\infty}\int_0^{u_1}\ldots\int_0^{u_{k-1}}\exp\left\{-\alpha\sum_{j=1}^{k}u_j-\right. \\ \left.-2\lambda\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}u_i\right\}du_k\,du_{k-1}\ldots du_1. \tag{5.79}$$

On peut facilement calculer la variance à la sortie du circuit intégrateur

$$M_2=m_2=\frac{2\alpha^2}{(2\lambda+\alpha)\,2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}. \tag{5.80}$$

Pour calculer l'intégrale (5.79) pour un k arbitraire fini on peut de nouveau utiliser la méthode de récurrence. On a alors

$$M_{2r}=m_{2r}=\frac{(2r)!}{r!\,2^r}\prod_{l=1}^{r}\frac{1}{2l-1+\frac{2\lambda}{\alpha}}. \tag{5.81}$$

En utilisant la relation fonctionnelle élémentaire des fonctions gamma $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et la définition de la fonction bêta [voir (1.22″)] on peut écrire comme suit la formule (5.81):

$$M_{2r} = \frac{B\left(r+\frac{1}{2},\ \frac{\lambda}{\alpha}\right)}{B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\lambda}{\alpha}\right)}. \tag{5.82}$$

Comparant (5.82) avec (4′) du problème 2.2 on voit que les moments d'ordre $2r$ du processus étudié coïncident avec les moments d'ordre r de la variable aléatoire η distribuée suivant la loi bêta. Ainsi les moments du processus à la sortie de l'intégrateur sont égaux aux moments de la variable aléatoire $\xi = \pm\sqrt{\eta}$ dont la loi de distribution peut être obtenue à partir de la formule (4) du problème 2.2. Comme $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\lambda}{\alpha}$, on obtient en utilisant les règles de calcul des densités de probabilité lors des transformations fonctionnelles (voir § 3.1.2)

$$w_{1\zeta}(y) = \frac{(1-y^2)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}}{B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\lambda}{\alpha}\right)}, \quad |y| \leqslant 1. \tag{5.83}$$

Cette expression n'est autre que la distribution unidimensionnelle du processus à la sortie d'un circuit intégrateur attaqué par un signal télégraphique. Cette distribution ne dépend que du seul paramètre $\frac{\lambda}{\alpha}$ qui est le rapport de la largeur du spectre énergétique du signal télégraphique à la bande passante du circuit intégrateur. La distribution du processus normé $\left(\text{rapportée à la moyenne quadratique } \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}}\right)$ s'écrit

$$w_{1\zeta}(z) = \frac{\left(1-\frac{y^2}{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}}{B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\lambda}{\alpha}\right)\sqrt{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}},$$

$$|z| \leqslant \sqrt{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}. \tag{5.84}$$

Dans le cas d'un circuit intégrateur à bande étroite pour $\frac{\lambda}{\alpha} \to \infty$ on obtient à partir de la formule de Stirling (1.23) la loi normale.

Il est facile de trouver le coefficient d'aplatissement de cette distribution

$$\gamma = -\frac{6}{3+\frac{2\lambda}{\alpha}}$$

et d'écrire les deux premiers termes de la série de Gram-Charlier [voir (2.127)]

$$w_{1\zeta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \left[1 - \frac{3-6z^2+z^4}{4\left(3+\frac{2\lambda}{\alpha}\right)} + \dots\right], \qquad (5.85)$$

$$z = y \Big/ \sqrt{1+\frac{2\lambda}{\alpha}}.$$

Pour un circuit intégrateur à large bande on a

$$\frac{\lambda}{\alpha} \ll 1, \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{\alpha}\right) \approx \frac{\alpha}{\lambda}$$

et en vertu de (5.83)

$$w_{1\zeta}(y) \approx \frac{\lambda}{\alpha}(1-y^2)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}, \quad |y| \leqslant 1. \qquad (5.86)$$

Pour $\frac{\lambda}{\alpha} \to 0$ cette distribution tend vers la distribution cherchée du signal télégraphique

$$w_{1\xi}(y) = \frac{1}{2}[\delta(y-1)+\delta(y+1)]. \qquad (5.87)$$

Remarquons que pour $\lambda = \alpha$ les amplitudes du signal à la sortie de l'intégrateur ont la distribution normale, pour $\lambda = 2\alpha$ la distribution parabolique, et pour $\lambda = \frac{3\alpha}{2}$ la distribution elliptique.

5.3.3. Méthode des équations différentielles. Les méthodes exposées ci-dessus d'analyse des caractéristiques probabilistes d'un processus aléatoire à la sortie d'un système linéaire sont basées sur le fait qu'un système linéaire peut être caractérisé par sa fonction de transition impulsionnelle (ou sa fonction de transfert). Comme nous l'avons déjà mentionné la fonction de transition impulsionnelle d'un système linéaire ne s'exprime pas toujours de façon explicite. L'intégrale (5.13) donnant la relation entre le processus d'entrée et celui de sortie d'un système linéaire doit alors être remplacée par une *équation différentielle linéaire stochastique* (ordinaire ou aux dérivées partielles) avec les conditions initiales et aux limites requises.

Pour simplifier l'écriture on introduit les notations suivantes pour les *opérateurs différentiels linéaires*:

$$A_t = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\frac{d^k}{dt^k}, \quad B_t = \sum_{k=0}^{m} b_k(t)\frac{d^k}{dt^k}, \quad m \leqslant n. \qquad (5.88)$$

Ainsi la relation mentionnée entre les processus aléatoires d'entrée $\xi(t)$ et de sortie $\zeta(t)$ d'un système linéaire peut s'écrire sous la forme de l'équation stochastique suivante:

$$A_t\zeta(t) = B_t\xi(t), \tag{5.89}$$

où les dérivées de $\zeta(t)$ et de $\xi(t)$ sont définies en moyenne quadratique (voir § 4.3.3). Les coefficients $a_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ et $b_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ sont des fonctions données du temps (peut-être des constantes) caractérisant le système linéaire.

A l'aide de (5.89) il est facile d'écrire l'expression donnant la relation entre le moment mixte d'ordre quelconque du processus de sortie et le moment du même ordre du processus d'entrée. Comme

$$\prod_{i=1}^{k} A_{t_i}\zeta(t_i) = \prod_{j=1}^{k} B_{t_j}\xi(t_j),$$

en prenant la moyenne des deux membres et changeant l'ordre de dérivation et de centrage, on trouve

$$A_{t_1}A_{t_2}\ldots A_{t_k}\, m_{k\zeta}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \\ = B_{t_1}B_{t_2}\ldots B_{t_k} m_{k\xi}(t_1, t_2, \ldots, t_k). \tag{5.90}$$

On calcule A_{t_i} et B_{t_j} à partir de (5.88) en remplaçant les dérivées totales $\frac{d^h}{dt^k}$ par les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t_i}$, $\frac{\partial}{\partial t_j}$. L'équation (5.90) équivaut à la formule (5.71), mais malheureusement ces deux relations sont difficiles à utiliser pour le calcul des moments mixtes d'ordre élevé.

A titre d'exemple nous allons étudier le cas simple du passage d'un signal télégraphique à travers un circuit intégrateur RC. Limitons-nous au calcul de la fonction de corrélation à la sortie du circuit intégrateur si à l'instant $t = 0$ on applique à son entrée un signal télégraphique stationnaire aléatoire dont la fonction de corrélation est donnée par (4.118).

L'équation différentielle stochastique d'un intégrateur RC est

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d\zeta(t)}{dt} + \zeta(t) = \xi(t), \quad \alpha = \frac{1}{RC}, \tag{5.91}$$

par conséquent l'équation aux dérivées partielles correspondante, reliant les fonctions de corrélation des processus à la sortie et à l'entrée du circuit est

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2} B_\zeta(t_1, t_2) + \alpha\frac{\partial}{\partial t_1} B_\zeta(t_1, t_2) + \alpha\frac{\partial}{\partial t_2} B_\zeta(t_1, t_2) + \\ + \alpha^2 B_\zeta(t_1, t_2) = \alpha^2 B_\xi(t_1, t_2) = \alpha^2 h^2 e^{-2\lambda_0|t_2-t_1|}. \tag{5.92}$$

La solution de cette équation différentielle pour des conditions initiales nulles est donc

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\alpha h^2}{\alpha^2 - 4\lambda_0^2} [\alpha e^{-2\lambda_0 |t_2 - t_1|} - 2\lambda_0 e^{-\alpha |t_2 - t_1|} +$$

$$+ (\alpha + 2\lambda_0) e^{-\alpha(t_1 + t_2)} - \alpha e^{-(2\lambda_0 t_1 + \alpha t_2)} - \alpha e^{-(\alpha t_1 + 2\lambda_0 t_2)}]. \quad (5.93)$$

La fonction de corrélation (5.93) correspond à un processus aléatoire non stationnaire (transitoire) à la sortie d'un intégrateur RC à l'entrée duquel à l'instant $t = 0$ on applique un signal télégraphique. Pour t_1, $t_2 \to \infty$ et des valeurs finies de $\tau = t_2 - t_1$ en vertu de (5.93) on obtient (voir problème 5.6)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{\alpha h^2}{\alpha^2 - 4\lambda_0^2} (\alpha e^{-2\lambda_0 |\tau|} - 2\lambda_0 e^{-\alpha |\tau|}). \quad (5.93')$$

Remarquons qu'un signal télégraphique « aplani » $\zeta(t)$ est dérivable en moyenne quadratique, car en vertu de (5.93′) on a

$$B'_\zeta(0) = 0, \quad B''_\zeta(0) = -\frac{2\alpha^2\lambda_0}{\alpha + 2\lambda_0} h^2.$$

Il est évident que dans ce cas il n'était pas indispensable d'utiliser une équation stochastique, car tant la fonction de transition impulsionnelle que la fonction de transfert d'un intégrateur RC sont données par des expressions simples (voir § 5.2.3) et les résultats ci-dessus auraient pu être obtenus à partir des formules du § 5.2.1. Ce problème n'est d'ailleurs intéressant qu'à titre d'exemple.

5.3.4. Processus markoviens dans les systèmes linéaires. Lorsqu'un bruit blanc à distribution normale (de moyenne nulle et d'intensité N_0 par unité de bande) agit à l'entrée d'un système linéaire à paramètres localisés, le processus de sortie et ses dérivées sont des processus markoviens multidimensionnels (voir § 4.5.3) et l'équation différentielle stochastique peut se ramener à l'équation de Kolmogorov pour les densités de probabilité conditionnelles.

Nous allons commencer par un circuit intégrateur RC qui est un système linéaire simple, auquel correspond une équation différentielle du premier ordre [voir (5.91)] de la forme

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = -\alpha\zeta(t) + \alpha\xi(t) \quad (5.94)$$

(nous supposons que le processus $\zeta(t)$ à la sortie du circuit est dérivable en moyenne quadratique). Le processus $\xi(t)$ est ici un bruit blanc à distribution normale. En vertu de (5.94) on trouve que l'accroissement du processus $\Delta\zeta(t) = \zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)$ durant un laps de temps Δt court est égal à

$$\Delta\zeta(t) = -\alpha\zeta(t)\,\Delta t + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \xi(t)\,dt. \quad (5.95)$$

Supposons que l'on sache a priori qu'à l'instant t on a $\zeta(t) = x$. En vertu de (5.95) l'accroissement de cette fonction $\Delta\zeta$ est (à une constante près) l'intégrale du bruit blanc, c'est-à-dire un processus de Wiener qui est en même temps un processus *markovien* stationnaire continu (voir § 4.5.5). La densité de probabilité de transition de ce processus de l'état x à l'instant t à l'état y à l'instant $t + \Delta t$ satisfait à la seconde équation de Kolmogorov [voir (4.190)] avec la condition initiale $w_2(y, t \mid x, t) = \delta(y - x)$. Il est alors facile de trouver les coefficients de l'équation de Kolmogorov, qui sont les moments de variation de l'état durant un laps de temps court Δt. En vertu de (5.95) on a

$$A_1(y) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\{\Delta\zeta\}}{\Delta t} = -\alpha y, \tag{5.96}$$

$$A_2(y) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\{(\Delta\zeta)^2\}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} m_1 \Big\{ \alpha^2 y^2 (\Delta t)^2 - \\ - 2\alpha^2 y \Delta t \int_t^{t+\Delta t} m_1\{\xi(t)\}\, dt + \alpha^2 \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} m_1\{\xi(u)\,\xi(v)\}\, du\, dv \Big\},$$

et la fonction de corrélation du bruit blanc étant une fonction delta $m_1\{\xi(u)\,\xi(v)\} = N_0\delta(u - v)$, on a

$$A_2(y) = N_0\alpha^2. \tag{5.97}$$

Etant donné que les moments mixtes impairs des processus aléatoires normaux de moyenne nulle sont nuls et les moments pairs égaux à la somme des produits des fonctions de corrélation pour tous les couples de valeurs du paramètre temporel (voir problème 4.5), on obtient pour le cas qui nous intéresse

$$m_1 \Big\{ \int_t^{t+\Delta t} \dots \int_t^{t+\Delta t} \xi(u_1) \dots \xi(u_n) du_1 \dots du_n \Big\} = \\ = \begin{cases} \sum_{k,r} \prod \delta(u_{i_k} - u_{i_r}), & n \text{ pair}, \\ 0, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Par conséquent

$$A_n(y) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\{(\Delta\zeta)^n\}}{\Delta t} = 0, \quad n \geqslant 3. \tag{5.98}$$

En comparant (5.96)-(5.98) et (4.202)-(4.202″) on voit qu'un processus markovien continu obtenu à partir d'un bruit blanc à la sortie d'un circuit intégrateur est *normal*, sa densité de probabilité

de transition étant donnée par (4.201) avec

$$R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}, \quad \sigma^2=\frac{N_0\alpha}{2}.$$

Sur la figure 5.6 on peut voir comment varie la densité de probabilité de transition à partir de l'instant d'application du processus jusqu'à celui où le processus à la sortie de l'intégrateur s'établit et la densité de probabilité atteint sa valeur limite.

Nous allons maintenant étudier la transformation que subit un bruit blanc à la traversée d'un circuit oscillant formé par une inductance L, une capacité C et une résistance R montées en série. Au

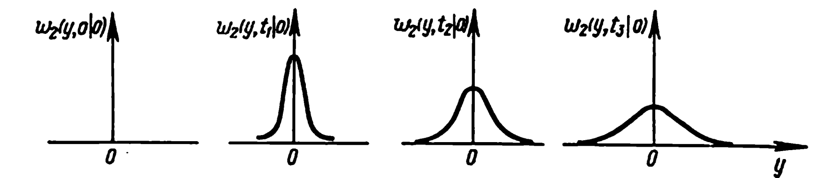


Fig. 5.6. Densités de probabilité de transition

contraire du cas précédent, ici le processus à la sortie du circuit n'est pas markovien, cependant ce processus et sa dérivée forment ensemble un *processus markovien continu bidimensionnel*. L'équation différentielle stochastique du second ordre reliant les processus d'entrée et de sortie de ce circuit oscillant est

$$\begin{gathered}\frac{d^2\zeta(t)}{dt^2}+\beta\frac{d\zeta(t)}{dt}+\omega_0^2\zeta(t)=\xi(t),\\ \beta=\frac{R}{L}, \quad \omega_0^2=\frac{1}{LC}.\end{gathered} \tag{5.99}$$

On peut écrire l'équation (5.99) sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre, soit

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta_1(t)}{dt}&=-\beta\zeta_1(t)-\omega_0^2\zeta(t)+\xi(t),\\ \frac{d\zeta(t)}{dt}&=\zeta_1(t).\end{aligned} \tag{5.100}$$

A partir de (5.100) on peut facilement trouver les coefficients de l'équation de Kolmogorov pour les densités de probabilité de transition d'un processus markovien bidimensionnel [voir (4.198) à (4.200)]. On a:

$$A_1(x_1, x_2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_1\{\Delta\zeta\}}{\Delta t}=x_2,$$

$$A_2(x_1, x_2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_1\{\Delta\zeta_1\}}{\Delta t}=-\beta x_2-\omega_0^2x_1,$$

$$A_{11}(x_1, x_2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\{(\Delta\zeta)^2\}}{\Delta t} = 0,$$

$$A_{12}(x_1, x_2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\{\Delta\zeta\,\Delta\zeta_1\}}{\Delta t} = 0,$$

$$A_{22}(x_1, x_2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\{(\Delta\zeta_1)^2\}}{\Delta t} = N_0.$$

En portant dans (4.198) les expressions obtenues on trouve l'équation de Kolmogorov pour la densité de probabilité de transition quadridimensionnelle du processus $\zeta(t)$ et de sa dérivée $\zeta_1(t)$, soit

$$\frac{\partial w_4}{\partial \tau} = -x_2 \frac{\partial w_4}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}[(\beta x_2 + \omega_0^2 x_1) w_4] + \frac{N_0}{2}\frac{\partial^2 w_4}{\partial x_2^2}, \quad (5.101)$$

où

$$w_4 = w_4(x_1, x_2, \tau \mid x_{10}, x_{20}) \quad (5.101')$$

et la condition initiale s'écrit

$$w_4(x_1, x_2, 0 \mid x_{10}, x_{20}) = \delta(x_1 - x_{10})\,\delta(x_2 - x_{20}).$$

On peut montrer que la *densité de probabilité normale conditionnelle* des quatre variables x_1, x_2, x_{10}, x_{20} satisfait à l'équation (5.101).

D'une manière analogue on aurait pu étudier le passage d'un bruit blanc normal par un système linéaire arbitraire à constantes localisées sachant que les processus d'entrée et de sortie de ce système sont reliés par une équation différentielle stochastique d'ordre n ou par le système équivalent de n équations différentielles linéaires.

5.4. TRANSFORMATIONS DES PROCESSUS ALÉATOIRES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES À PARAMÈTRES ALÉATOIRES

5.4.1. Caractéristiques énergétiques. Dans le chapitre précédent nous avons étudié des processus aléatoires à la traversée des systèmes linéaires dont les caractéristiques sont des fonctions données (déterministes) du temps. L'étude des caractéristiques des processus à la sortie des systèmes linéaires (inertiels) à paramètres *aléatoires* est également très intéressante. A titre d'exemple de ce type de systèmes on peut citer la majorité des canaux de transmission des signaux radio-électriques de l'émetteur au récepteur.

Nous allons caractériser le système linéaire par la fonction de transfert $k(i\omega, t)$ [voir (5.3)], cependant à la différence du cas précédent cette fonction pour chaque pulsation ω (en tant que paramètre réel) est un *processus aléatoire*. Calculons la *fonction de corrélation d'un système linéaire* à paramètres aléatoires à partir de la relation

$$B_c(t_1, t_2, \omega_1, \omega_2) = m_1\{k(i\omega_1, t_1)\,\overline{k(i\omega_2, t_2)}\}. \quad (5.102)$$

Pour les systèmes linéaires *stationnaires* (au sens général) on a

$$B_c(\tau, \omega) = m_1 \{k(i\omega, t)\, k(-i\omega, t+\tau)\} = B_c(\tau, -\omega). \tag{5.103}$$

Dans ce cas on peut également caractériser un système linéaire par la transformation de Fourier de $B_c(\tau, \omega')\, e^{i\omega'\tau}$ par rapport à τ, en introduisant la fonction fréquentielle de deux variables

$$\Gamma(\omega, \omega') = \int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega')\, e^{i\omega'\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{5.104}$$

Remarquons que pour un système linéaire à paramètres constants on a $k(i\omega, t) \equiv k(i\omega)$, par conséquent

$$B_c(\tau, \omega) = k(i\omega)\, k(-i\omega) = C^2(\omega), \tag{5.105}$$

c'est-à-dire que B_c ne dépend pas de τ et coïncide avec le carré de la caractéristique fréquentielle du système. La fonction $\Gamma(\omega, \omega')$ devient alors

$$\Gamma(\omega, \omega') = C^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega'-\omega)\tau}\, d\tau = 2\pi C^2(\omega)\, \delta(\omega' - \omega). \tag{5.106}$$

Nous allons maintenant utiliser les caractéristiques probabilistes d'un système linéaire à paramètres aléatoires pour le calcul de la fonction de corrélation du processus à la sortie du système recevant à l'entrée un processus aléatoire $\xi(t)$ ayant la fonction de corrélation $B_\xi(t_1, t_2)$. On peut écrire la relation générale reliant le processus à la sortie d'un système linéaire au processus à son entrée et à la fonction de transition impulsionnelle du système, on a

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)\, \xi(\tau)\, d\tau. \tag{5.107}$$

Tout comme dans (5.13) il s'agit ici d'une intégrale en moyenne quadratique, avec cette seule différence qu'ici la fonction de transition impulsionnelle $h(t, \tau)$ est *aléatoire* (par rapport à t) et reliée à la fonction de transfert par la transformation intégrale (en moyenne quadratique) suivante

$$h(t, t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(i\omega, t)\, e^{i\omega u}\, d\omega. \tag{5.108}$$

La fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$ peut alors s'écrire sous la forme

$$B_\zeta(t_1, t_2) = m_1\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\} =$$
$$= m_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, u)\, h(t_2, v)\, \xi(u)\, \xi(v)\, du\, dv\right\}. \quad (5.109)$$

Dans la suite nous supposerons que le processus aléatoire $\xi(t)$ et la fonction de transition impulsionnelle aléatoire d'un système linéaire sont *statistiquement indépendants*. En vertu de (5.109), en changeant l'ordre d'intégration et en prenant la moyenne autrement, en remplaçant de plus u et v respectivement par $t_1 - u$ et $t_2 - v$ on a

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m_1\{h(t_1, t_1 - u)\, h(t_2, t_2 - v)\} \times$$
$$\times B_\xi(t_1 - u, t_2 - v)\, du\, dv. \quad (5.110)$$

Exprimons la covariance $m_1\{h(t_1, t_1 - u)\, h(t_2, t_2 - v)\}$ des fonctions de transition impulsionnelles du système à l'aide de la fonction de corrélation du système. Compte tenu de (5.102) et (5.108) on trouve

$$m_1\{h(t_1, t_1 - u)\, h(t_2, t_2 - v)\} =$$
$$= m_1\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(i\omega_1, t_1)\, k(i\omega_2, t_2)\, e^{i(\omega_1 u + \omega_2 v)}\, d\omega_1\, d\omega_2\right\} =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_c(t_1, t_2, \omega_1, \omega_2)\, e^{i(\omega_1 u + \omega_2 v)}\, d\omega_1\, d\omega_2, \quad (5.111)$$

et en portant (5.111) dans (5.110) on obtient

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_c(t_1, t_2, \omega_1, \omega_2) \times$$
$$\times B_\xi(t_1 - u, t_2 - v)\, e^{i(\omega_1 u + \omega_2 v)}\, d\omega_1\, d\omega_2\, du\, dv. \quad (5.112)$$

Si le processus d'entrée est stationnaire (au sens général) on a

$$B_\xi(t_1 - u, t_2 - v) = B_\xi(\tau + u - v), \quad \tau = t_2 - t_1,$$

et, en changeant l'ordre d'intégration, on trouve à partir de (5.112) que l'intégrale interne par rapport à u et v peut s'exprimer comme suit en fonction du spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ du processus d'entrée

[voir également (7) de l'annexe III] :

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau+u-v)\, e^{i(\omega_1 u+\omega_2 v)}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\tau+z)\, e^{i\omega_1 z} e^{iv(\omega_1+\omega_2)}\, dz\, dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi} F_\xi(\omega_1)\, e^{-i\omega_1\tau}\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iv(\omega_1+\omega_2)}\, dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi} F_\xi(\omega_1)\, e^{-i\omega_1\tau}\delta(\omega_1+\omega_2). \qquad (5.113)$$

En portant (5.113) dans (5.112) et en utilisant la propriété de filtrage de la fonction delta, on trouve finalement

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_c(t_1, t_2, \omega, -\omega)\, F_\xi(\omega)\, e^{-i\omega(t_2-t_1)}\, d\omega. \qquad (5.114)$$

Pour les systèmes stationnaires (au sens général) on a en vertu de (5.103)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega)\, F_\xi(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (5.115)$$

Le spectre énergétique du processus à la sortie d'un système linéaire a dans ce cas pour expression

$$F_\zeta(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} B_\zeta(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega')\, F_\xi(\omega')\, e^{i\omega'\tau} e^{-i\omega\tau}\, d\tau\, d\omega'.$$

En utilisant (5.104) on obtient

$$F_\zeta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\omega, \omega')\, F_\xi(\omega')\, d\omega'. \qquad (5.116)$$

Remarquons que la formule (5.20) peut être obtenue à partir de (5.116) comme un cas particulier pour un système linéaire à paramètres constants. En effet, en portant (5.106) dans (5.116) et en utilisant la propriété de filtrage de la fonction delta on trouve (5.20).

La fonction de corrélation du processus à la sortie d'un système linéaire peut s'exprimer à l'aide des fonctions de corrélation du système et du processus à la sortie. En exprimant dans (5.115) le spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ d'après (4.63), on obtient

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega) B_\xi(u) e^{i\omega\tau} e^{-i\omega u} du\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(u) F_c(u, \tau) du, \qquad (5.117)$$

où

$$F_c(\tau, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega) e^{i\omega(\tau-u)} d\omega. \qquad (5.117')$$

Les formules (5.115) et (5.116) donnent la fonction de corrélation et le spectre énergétique du processus ayant traversé un système linéaire stationnaire à paramètres aléatoires, lorsque le processus d'entrée est aléatoire stationnaire. Ces formules montrent que pour résoudre ce problème il suffit de connaître le spectre énergétique du processus d'entrée et la fonction de corrélation du système.

Considérons deux cas particuliers de la formule (5.115). Si à l'entrée d'un système à paramètres aléatoires agit un bruit blanc on a en vertu de (4.74)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_c(\tau, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (5.118)$$

Si le processus d'entrée est une oscillation harmonique d'amplitude constante A_0, de pulsation ω_0 et de phase aléatoire, uniformément distribuée sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$, on a en vertu de (4.79)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{A_0^2}{2} B_c(\tau, \omega_0) \cos \omega_0\tau. \qquad (5.118')$$

5.4.2. Retard aléatoire. Supposons que la fonction de transfert d'un système linéaire à paramètres aléatoires ait la forme

$$k(i\omega, t) = e^{-i\omega\eta(t)}, \qquad (5.119)$$

où $\eta(t)$ est un processus aléatoire stationnaire. En vertu de (5.108) on a alors

$$h(t, t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega[\eta(t)-u]} d\omega = \delta[\eta(t) - u],$$

et en vertu de (5.107)

$$\zeta(t) = \xi[t - \eta(t)]. \qquad (5.119')$$

Ainsi un système linéaire dont la caractéristique est donnée par (5.119) produit à tout instant t un retard aléatoire $\eta(t)$ du processus aléatoire $\xi(t)$.

Calculons l'expression de la fonction de corrélation du système linéaire étudié. En vertu de (5.103) on a

$$B_c(\tau, \omega) = m_1\{e^{-i\omega\eta(t)}e^{i\omega\eta(t+\tau)}\} = m_1\{e^{i\omega[-\eta(t)+\eta(t+\tau)]}\}$$

ou

$$B_c(\tau, \omega) = \Theta_{2\eta}(-\omega, \omega, \tau), \qquad (5.120)$$

où $\Theta_{2\eta}(v_1, v_2, \tau)$ est la fonction caractéristique bidimensionnelle du processus aléatoire stationnaire $\eta(t)$.

Supposons maintenant que le processus $\eta(t)$ soit normal. En vertu de (4.166') on a

$$B_c(\tau, \omega) = e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega^2}, \qquad (5.121)$$

où $R_\eta(\tau)$ et σ_η^2 sont respectivement le coefficient de corrélation et la variance du processus aléatoire stationnaire $\eta(t)$.

Remarquons que pour toute valeur ω donnée, la fonction $B_c(\tau, \omega)$ varie de l'unité pour $\tau = 0$ à $e^{-\sigma_\eta^2\omega^2} \leqslant 1$ pour $\tau \to \infty$.

Conformément à (5.115), la fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$ est égale à

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega^2} F_\xi(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (5.122)$$

En vertu de (5.122) la puissance moyenne $B_\zeta(0)$ du processus $\zeta(t)$ est égale à la puissance moyenne du processus initial $\xi(t)$.

D'autre part, la formule (5.117') donne

$$F_c(\tau-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega^2} e^{i\omega(\tau-u)}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{4\pi[1-R_\eta(\tau)]}} \exp\left\{-\frac{(u-\tau)^2}{4\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]}\right\}.$$

En portant cette expression dans (5.117) on obtient

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{4\pi[1-R_\eta(\tau)]}}\int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(u)\times$$

$$\times \exp\left\{\frac{(u-\tau)^2}{-4\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]}\right\} du. \qquad (5.122')$$

Considérons maintenant quelques exemples de processus aléatoires stationnaires à la traversée d'un système linéaire introduisant un retard aléatoire $\eta(t)$.

1. **Bruit blanc.** Dans ce cas $F_\xi(\omega) = 2N_0 = \text{const}$, et la formule (5.122) donne

$$B_\zeta(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega^2} e^{i\omega\tau}\,d\omega =$$

$$= \frac{N_0}{\sigma_\eta\sqrt{4\pi(1-R_\eta)}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4\sigma_\eta^2(1-R_\eta)}}. \quad (5.123)$$

La relation (5.123) montre que $B_\zeta(0)$ est illimitée, c'est-à-dire que la puissance moyenne du processus est infinie, tout comme pour le processus d'entrée (bruit blanc). Cependant à la différence du processus d'entrée (qui est delta corrélé) les valeurs du processus de sortie pour $\tau > 0$ sont corrélées. La figure 5.7 représente la fonction de corrélation $B_\zeta(\tau)$, construite en supposant que le spectre énergétique du processus $\eta(t)$ est uniforme dans l'intervalle $(-\Delta, \Delta)$ avec $\sigma_\eta\Delta = 1$.

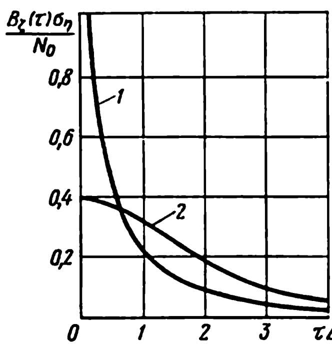


Fig. 5.7. Fonction de corrélation d'un processus après un retard aléatoire:
1 — bruit blanc; 2 — bruit blanc filtré

2. **Bruit blanc en aval d'un filtre passe-bas à caractéristique fréquentielle gaussienne.** Dans ce cas on a $F_\xi(\omega) = 2N_0 e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}}$ et à partir de (5.122) on trouve

$$B_\zeta(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{1}{\beta^2}+\sigma_\eta^2(1-R_\eta)\right]\omega^2} e^{i\omega\tau}\,d\omega =$$

$$= \frac{N_0}{\sqrt{4\pi\left[\frac{1}{\beta^2}+\sigma_\eta^2(1-R_\eta)\right]}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4\left[\frac{1}{\beta^2}+\sigma_\eta^2(1-R_\eta)\right]}}. \quad (5.124)$$

La figure 5.7 donne également la courbe de $B_\zeta(t)$ pour le cas où le spectre énergétique du processus $\eta(t)$ est uniforme dans l'intervalle $(-\Delta, \Delta)$ avec $\sigma_\eta\Delta = \frac{1}{\beta}\Delta = 1$.

3. **Oscillation sinusoïdale d'amplitude constante A_0, de pulsation ω_0, de phase aléatoire, uniformément distribuée sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$.** Dans ce cas [voir (4.79)] on a $F_\xi(\omega) = \pi A_0^2[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$ et en vertu de (5.122) on trouve

que

$$B_\zeta(\tau) = \frac{A_0^2}{2} e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega_0^2} \cos \omega_0 \tau. \tag{5.125}$$

Etudions le spectre énergétique du processus $\zeta(t)$ en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine. En effet on a

$$\begin{aligned} F_\zeta(\omega) &= 4 \int_0^\infty B_\zeta(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau = \\ &= 2A_0^2 \int_0^\infty e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega_0^2} \cos \omega_0\tau \cos \omega\tau \, d\tau = \\ &= A_0^2 \int_0^\infty e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega_0^2} \cos (\omega - \omega_0)\, \tau \, d\tau + \\ &\qquad + A_0^2 \int_0^\infty e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega_0^2} \cos (\omega + \omega_0)\, \tau \, d\tau. \end{aligned}$$

Si les variations de $R_\eta(\tau)$ sont lentes par rapport à celles de $\cos \omega_0\tau$, c'est-à-dire si la plus élevée des valeurs de la fréquence dans le spectre énergétique du retard $\eta(t)$ est bien plus petite que ω_0, on peut négliger la seconde intégrale devant la première et obtenir ainsi l'expression approchée suivante:

$$F_\zeta(\omega) = A_0^2 \int_0^\infty e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega_0^2} \cos (\omega - \omega_0)\, \tau \, d\tau. \tag{5.126}$$

L'intégrale dans le second membre de (5.126) est convergente pour $\omega \neq \omega_0$ et illimitée pour $\omega = \omega_0$ ce qui correspond à la présence d'une fonction delta (raie discrète) dans le spectre du processus $\zeta(t)$ pour $\omega = \omega_0$. En écrivant (5.126) sous la forme

$$\begin{aligned} F_\zeta(\omega) &= A_0^2 \int_0^\infty e^{-\sigma_\eta^2\omega_0^2} \cos (\omega - \omega_0)\, \tau \, d\tau + \\ &\qquad + A_0^2 \int_0^\infty [e^{-\sigma_\eta^2[1-R_\eta(\tau)]\omega_0^2} - e^{-\sigma_\eta^2\omega_0^2}] \cos (\omega - \omega_0)\, \tau \, d\tau, \end{aligned}$$

on obtient le spectre énergétique sous la forme d'une somme de deux termes, l'un étant discret et l'autre continu

$$\begin{aligned} F_\zeta(\omega) = \pi A_0^2 e^{-\sigma_\eta^2\omega_0^2} \delta(\omega - \omega_0) + A_0^2 e^{-\sigma_\eta^2\omega_0^2} \int_0^\infty (e^{\sigma_\eta^2\omega_0^2 R_\eta(\tau)} - 1) \times \\ \times \cos (\omega - \omega_0)\, \tau \, d\tau. \end{aligned} \tag{5.127}$$

Pour $\sigma_\eta^2 \gg \frac{1}{\omega_0^2}$ l'intensité de la composante discrète du spectre est négligeable, et pour la partie continue on peut obtenir une approximation simple. En développant en série de Taylor l'expression de $R_\eta(\tau)$ dans l'exposant de l'exponentielle sous l'intégrale, et en ne conservant que les deux premiers termes, le processus $\eta(t)$ étant supposé dérivable en moyenne quadratique, on obtient pour $\sigma_\eta \omega_0 \gg 1$

$$F_\zeta(\omega)_{\text{cont}} \approx A_0^2 \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 \omega_0^2 R_\eta''(0)\tau^2} \cos(\omega-\omega_0)\tau \, d\tau =$$

$$= \frac{A_0^2 \sqrt{\pi}}{\sigma_\eta \omega_0 \omega_1 \sqrt{2}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_\eta^2 \omega_0^2 \omega_1^2}}, \quad \omega_1^2 = -R_\eta''(0). \qquad (5.128)$$

Ainsi le spectre énergétique d'un processus obtenu à la suite d'un retard aléatoire normalement distribué d'une oscillation harmonique dont la fréquence est bien supérieure à l'inverse de la moyenne quadratique du retard, est continu et de forme gaussienne avec un maximum pour $\omega = \omega_0$. La largeur de bande de ce spectre est égale à $\sigma_\eta \omega_0 \omega_1 \sqrt{2\pi}$. Notons que la forme gaussienne du spectre du processus $\zeta(t)$ apparaît dans le cas considéré *quel que soit* le spectre du processus $\eta(t)$ et que $F_\zeta(\omega)$ ne dépend des caractéristiques énergétiques du processus $\eta(t)$ que par l'intermédiaire de la grandeur ω_1.

Si $\sigma_\eta^2 \ll \frac{1}{\omega_0^2}$, en développant l'exposant de l'exponentielle de l'expression sous l'intégrale de (5.127) en série suivant les puissances de R_η et en ne gardant que le terme linéaire on trouve

$$F_\zeta(\omega) = \pi A_0^2 e^{-\sigma_\eta^2 \omega_0^2} \delta(\omega-\omega_0) +$$
$$+ A_0^2 \omega_0^2 \sigma_\eta^2 \int_0^\infty R_\eta(\tau) \cos(\omega-\omega_0)\tau \, d\tau.$$

En introduisant le spectre énergétique du processus de retard

$$F_\eta(\omega) = 4\sigma_\eta^2 \int_0^\infty R_\eta(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau,$$

on obtient

$$F_\zeta(\omega) = \pi A_0^2 e^{-\sigma_\eta^2 \omega_0^2} \delta(\omega-\omega_0) + \frac{A_0^2}{2} \omega_0^2 F_\eta(\omega-\omega_0). \qquad (5.129)$$

Ainsi, en première approximation pour $\sigma_\eta \omega_0 \ll 1$, le spectre énergétique obtenu à la suite d'un retard aléatoire à distribution normale d'une oscillation harmonique est la superposition de la raie discrète de l'oscillation harmonique de départ et du spectre énergétique du processus de retard, déplacé de ω_0 suivant l'axe

des fréquences et multiplié par le facteur d'échelle constant $\frac{(A_0\omega_0)^2}{2}$.

5.4.3. Multiplicateur. Supposons que la fonction de transfert d'un système linéaire à paramètres aléatoires ne dépende pas de la fréquence, c'est-à-dire posons

$$k(i\omega, t) = \eta(t). \tag{5.130}$$

En vertu de (5.108) on a

$$h(t, t-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\, e^{i\omega u}\, d\omega = \eta(t)\,\delta(u),$$

et en vertu de (5.107)

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\,\delta(t-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau = \eta(t)\,\xi(t). \tag{5.131}$$

Par conséquent, un système linéaire dont la caractéristique est donnée par (5.130) est un multiplicateur de deux processus aléatoires. De tels dispositifs sont utilisés pour la modulation d'amplitude et le changement de fréquence (hétérodynage). La fonction de transfert d'un canal soumis à l'action d'un bruit *multiplicateur* est de la forme (5.130).

La fonction de corrélation du système linéaire considéré coïncide simplement avec la fonction de corrélation du processus $\eta(t)$ comme il est facile de s'en rendre compte en portant (5.130) dans (5.103). Si le processus d'entrée d'un système linéaire est stationnaire (au sens général), il vient de (5.114)

$$B_\zeta(t_1, t_2) = B_\xi(t_2 - t_1)\, B_\eta(t_1, t_2). \tag{5.132}$$

Ainsi la fonction de corrélation du processus de sortie d'un système linéaire à paramètres aléatoires du type multiplicateur est égale au produit des fonctions de corrélation du système et du processus d'entrée *) (à condition toutefois que celui-ci soit stationnaire au sens général).

Il est facile de voir que si le système est stationnaire au sens général on a

$$B_\zeta(\tau) = B_\xi(\tau)\, B_\eta(\tau). \tag{5.133}$$

Soit $\xi(t)$ un bruit blanc d'intensité spectrale égale à $2N_0$. En vertu de (5.107) $\zeta(t)$ est également un bruit blanc d'intensité spectrale $2N_0B_\eta(0)$.

*) Rappelons que dans ce chapitre on suppose que le processus d'entrée d'un système linéaire et la fonction de transfert du système sont statistiquement indépendants.

Lorsque le processus $\xi(t)$ est à bande étroite, la fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$ peut s'écrire sous la forme [voir (4.71)]

$$B_\zeta(\tau) = a_0(\tau) B_\eta(\tau) \cos[\omega_0\tau - \mu(\tau)]. \qquad (5.134)$$

Si $B_\eta(t)$ est une fonction variant lentement dans le temps par rapport à $\cos\omega_0\tau$, en vertu de (5.134) le processus à la sortie du multiplicateur est également un processus aléatoire à bande étroite.

Enfin, lorsque le processus d'entrée est une oscillation harmonique d'amplitude A_0 et de pulsation ω_0 constantes, la phase étant aléatoire et uniformément distribuée sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$, la fonction de corrélation à la sortie du multiplicateur est égale à

$$B_\zeta(\tau) = \frac{A_0^2}{2} B_\eta(\tau) \cos\omega_0\tau, \qquad (5.135)$$

par conséquent lorsque $B_\eta(\tau)$ varie lentement par rapport à $\cos\omega_0\tau$, le spectre énergétique de $\zeta(t)$ est de la forme

$$F_\zeta(\omega) = \frac{A_0^2}{4} F_\eta(\omega - \omega_0). \qquad (5.136)$$

On remarque qu'il coïncide au facteur constant $\left(\frac{A_0}{2}\right)^2$ près avec le spectre du processus $\eta(t)$ déplacé de ω_0 suivant l'axe des fréquences.

Problèmes

5.1. Montrer que pour une valeur arbitraire du coefficient de surtension Q, l'expression du coefficient de corrélation du processus à la sortie d'un circuit isolé série lorsqu'on applique un bruit blanc à son entrée est

pour $Q > \frac{1}{2}$ (circuit oscillant)

$$R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}\left(\cos\omega_k\tau + \frac{\beta}{\omega_k}\sin\omega_k|\tau|\right), \qquad (1)$$

$$\omega_k^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0;$$

pour $Q = \frac{1}{2}$ (cas limite d'un circuit oscillant et d'un circuit apériodique)

$$R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}(1 + \beta|\tau|); \qquad (2)$$

pour $Q < \frac{1}{2}$ (circuit apériodique)

$$R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}\left(\operatorname{ch}\omega_k\tau + \frac{\beta}{\omega_k}\operatorname{sh}\omega_k|\tau|\right), \qquad (3)$$

$$\omega_k^2 = \beta^2 - \omega_0^2 > 0,$$

où $\beta = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_0}{2Q}$.

Vérifier que les formules (1) à (3) conservent leur forme dans le cas d'un circuit formé par un condensateur, une inductance et une résistance en parallèle.

5.2. En utilisant l'expression du carré de la caractéristique fréquentielle de deux circuits identiques à bande étroite couplés

$$C^2(\omega)=\frac{C_0^2}{(x^2-\lambda^2-1)^2+4x^2}, \tag{4}$$

où

$$x=\frac{\omega}{2\beta}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right),\quad \beta=\frac{R}{2L};\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{5}$$

λ étant le rapport du coefficient de couplage des circuits à l'affaiblissement, trouver le coefficient de corrélation du processus à la sortie des circuits couplés, à l'entrée desquels on applique un bruit blanc:

$$R(\tau)=e^{-\beta|\tau|}\left(\cos\beta\lambda\tau+\frac{1}{\lambda}\sin\beta\lambda|\tau|\right)\cos\omega_0\tau. \tag{6}$$

5.3. Montrer que le coefficient de corrélation d'un bruit blanc à la traversée d'un système linéaire à paramètres localisés, dont la fonction de transfert est une fonction polynomiale de la forme

$$k(i\omega)=\frac{G(i\omega)}{V(i\omega)}, \tag{7}$$

où $G(p)$ et $V(p)$ sont des polynômes de puissance m et n respectivement ($m<n$), peut s'écrire sous la forme

$$R(\tau)=\sum_{j=1}^{n} e^{-\beta_j|\tau|}(A_{cj}\cos\omega_j\tau+A_{sj}\sin\omega_j|\tau|) \tag{8}$$

si toutes les racines du polynôme $V(p)$ sont simples et sous la forme

$$R(\tau)=\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu_r} e^{-\beta_r|\tau|}(A_{crj}\cos\omega_r\tau+A_{srj}\sin\omega_r|\tau|)|\tau|^{\nu_r-j} \tag{9}$$

si le polynôme $V(p)$ a k racines différentes, la multiplicité de la racine ω_r étant ν_r.

5.4. A l'entrée d'un système linéaire de caractéristique fréquentielle $C(\omega)$ agit un processus aléatoire stationnaire au sens général à spectre discret de la forme (4.80). Montrer que la fonction de corrélation et le spectre énergétique du processus à la sortie du système sont

$$B(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^2}{2}C^2(\omega_k)\cos\omega_k\tau, \tag{10}$$

$$F(\omega)=\sum_{k=1}^{n}\pi\sigma_k^2C^2(\omega_k)[\delta(\omega+\omega_k)+\delta(\omega-\omega_k)]. \tag{11}$$

5.5. Montrer que la moyenne et la variance de la composante continue $\eta_T=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\xi(t)\,dt$ d'un processus aléatoire stationnaire $\xi(t)$, la moyenne étant prise sur un intervalle de temps fini T, sont

$$m_1\{\eta_T\}=m_1\{\xi(t)\};\quad M_2\{\eta_T\}=\frac{2}{T^2}\int\limits_0^T(T-u)B_\xi(u)\,du-m_1^2\{\xi(t)\}, \tag{12}$$

où $B_\xi(\tau)$ est la fonction de corrélation de $\xi(t)$.

5.6. Supposons qu'à l'entrée d'un circuit RC soit appliqué un processus aléatoire stationnaire dont la fonction de corrélation est $B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta|\tau|}$, $\beta > 0$. Montrer que le coefficient de corrélation du processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un circuit intégrateur a pour expression

$$R_\zeta(\tau) = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}), \quad \alpha = \frac{1}{RC}. \tag{13}$$

Montrer que la variance du processus à la sortie est égale à

$$\sigma_\zeta^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\sigma_\xi^2. \tag{14}$$

5.7. En utilisant l'expression de la fonction caractéristique quadridimensionnelle d'un processus aléatoire stationnaire normal de moyenne nulle, montrer que le moment mixte d'ordre 4 de ce processus est égal à (voir problème 4.5)

$$\begin{aligned} m_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= m_1\{\xi(t)\,\xi(t+\tau_1)\,\xi(t+\tau_2)\,\xi(t+\tau_3)\} = \\ &= B(\tau_1)\,B(\tau_2-\tau_3) + B(\tau_2)\,B(\tau_3-\tau_1) + B(\tau_3)\,B(\tau_2-\tau_1), \end{aligned} \tag{15}$$

où $B(\tau)$ est la fonction de corrélation du processus.

Montrer que le spectre tridimensionnel est égal à

$$\begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = F(\omega_1)\,F(\omega_2)\,\delta(\omega_2+\omega_3) + F(\omega_2)\,F(\omega_3)\,\delta(\omega_3+\omega_1) + \\ + F(\omega_3)\,F(\omega_1)\,\delta(\omega_1+\omega_2). \end{aligned} \tag{16}$$

Vérifier qu'à partir de (15) et (16) on peut obtenir la formule évidente suivante qui donne le moment d'ordre 4 du processus normal à la sortie d'un système linéaire de caractéristique fréquentielle $C(\omega)$:

$$m_4 = 3\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\omega)\,C^2(\omega)\,d\omega\right)^2. \tag{17}$$

5.8. Soit $\{\Phi_n(u)\}$ un ensemble des polynômes orthogonaux de fonction de pondération $f(u)$. Supposons qu'on dispose d'un jeu de filtres linéaires de fonctions de transition impulsionnelles égales à

$$h_n(u) = f^{1-\nu}(u)\,\Phi_n(u). \tag{18}$$

Montrer que la fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire $\xi(t)$ peut s'écrire comme suit:

$$B_\xi(\tau) = f^\nu(\tau)\sum_{j=0}^{\infty} a_j\Phi_j(\tau), \tag{19}$$

où

$$a_j = B_{\xi\zeta_j}(0) \tag{20}$$

et $B_{\xi\zeta_j}(\tau)$ est la fonction de corrélation mutuelle du processus $\xi(t)$ et du processus $\zeta_j(t)$ obtenu à la sortie d'un filtre de caractéristique $h_j(u)$ lorsque le processus $\xi(t)$ agit à son entrée.

5.9. Le processus aléatoire stationnaire $\xi(t)$ est décalé en retard de T et s'ajoute au processus initial. Montrer que la fonction de corrélation et le spectre énergétique de la somme $\xi(t) + \xi(t-T)$ sont respectivement

$$B_\Sigma(\tau) = 2B_\xi(\tau) + B_\xi(\tau-T) + B_\xi(\tau+T), \tag{21}$$

$$F_\Sigma(\omega) = 4F_\xi(\omega)\cos^2\frac{\omega T}{2}. \tag{22}$$

Chapitre 6

TRANSFORMATIONS DES PROCESSUS ALÉATOIRES DANS LES CIRCUITS NON LINÉAIRES ET NON INERTIELS

6.1. CARACTÉRISTIQUES PROBABILISTES D'UN PROCESSUS À LA SORTIE D'UN CIRCUIT NON LINÉAIRE

6.1.1. Caractéristiques énergétiques. Dans le cas des systèmes linéaires la fonction de corrélation et le spectre énergétique du processus de sortie sont déterminés d'une manière univoque par la caractéristique fréquentielle du système et la fonction de corrélation (ou le spectre) du processus d'entrée (voir § 5.2.1). Pour calculer le spectre énergétique d'un processus aléatoire et sa fonction de corrélation à la sortie d'un circuit non linéaire il ne suffit pas de connaître le spectre (ou la fonction de corrélation) du processus d'entrée, mais il faut également avoir l'expression de la densité de probabilité bidimensionnelle du processus aléatoire d'entrée.

Supposons que l'on connaisse la caractéristique d'un circuit non linéaire non inertiel

$$y = f(x) \tag{6.1}$$

et la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ du processus aléatoire $\xi(t)$ à l'entrée du circuit non linéaire. En utilisant les règles exposées au chapitre 3 de calcul des valeurs moyennes des fonctions de variables aléatoires, on trouve pour la fonction de corrélation du processus aléatoire $\zeta(t)$ à la sortie d'un circuit non linéaire l'expression suivante:

$$B_\zeta(t_1, t_2) = m_1\{f[\xi(t_1)]\, f[\xi(t_2)]\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2)\, w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{6.2}$$

Si $\xi(t)$ est un processus aléatoire stationnaire, le processus $\zeta(t) = f[\xi(t)]$ à la sortie d'un circuit non linéaire et non inertiel est également stationnaire, et sa fonction de corrélation est égale à

$$B_\zeta(\tau) = m_1\{f[\xi(t)]\, f[\xi(t+\tau)]\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2)\, w_2(x_1, x_2, \tau)\, dx_1\, dx_2. \tag{6.3}$$

A partir de (6.3), compte tenu de (4.45) et (4.45′), après une transformation non linéaire *) on trouve l'expression suivante pour

*) On peut obtenir (6.4) et (6.5) à partir de (6.3) par les substitutions suivantes: $w_2(x_1, x_2, \tau) = w_1(x_1)\, w_1(x_2)$ pour $\tau \to \infty$ et $w_2(x_1, x_2, \tau) = w_1(x_1)\, \delta(x_1 - x_2)$ pour $\tau = 0$.

la moyenne et le moment 2 du processus $\zeta(t)$

$$a_\zeta = m_1\{f[\xi(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, w_1(x)\, dx, \tag{6.4}$$

$$m_2\{f[\xi(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, w_1(x)\, dx. \tag{6.5}$$

D'une manière analogue pour le moment d'ordre k du processus $\zeta(t)$, si toutefois celui-ci existe, on obtient:

$$m_k\{f[\xi(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^k(x)\, w_1(x)\, dx. \tag{6.5'}$$

A l'aide du théorème de Wiener-Khintchine, c'est-à-dire par transformation de Fourier, on peut, à partir de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à la sortie d'un circuit non linéaire, calculer le spectre énergétique de ce processus. Cependant le calcul des intégrales (6.2) ou (6.3) est en général compliqué. C'est pourquoi il est bon de transformer préalablement l'expression de la fonction de corrélation de telle sorte que les variables se séparent. Ci-dessous nous allons étudier certaines méthodes générales de calcul des intégrales du type (6.2).

Notons que, bien que l'exposé soit limité aux fonctions de corrélation du processus à la sortie d'un circuit non linéaire, ces méthodes sont également utilisables pour le calcul de la fonction de corrélation mutuelle du processus à la sortie de deux circuits non linéaires, connaissant la densité de probabilité bidimensionnelle à l'entrée de ces circuits et leurs caractéristiques. L'expression de la fonction de corrélation mutuelle est

$$B_{\zeta_1\zeta_2}(t_1, t_2) = m_1\{f_1[\xi_1(t_1)]\, f_2[\xi_2(t_2)]\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, w_{2\xi_1\xi_2}(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{6.6}$$

La formule (6.2) est un cas particulier de (6.6) pour $f_1 \equiv f_2$. Si $f_2(x_2) \equiv x_2$, la formule (6.6) donne l'expression de la fonction de corrélation mutuelle des processus à la sortie et à l'entrée du circuit non linéaire en question.

6.1.2. Méthode directe de calcul de la fonction de corrélation. Cette méthode est basée sur le développement en série de la densité de probabilité bidimensionnelle du processus à l'entrée d'un circuit non linéaire, c'est-à-dire sur l'utilisation des résultats du § 2.4.4. Soit $w_1(x, t)$ la densité de probabilité unidimensionnelle correspondant à la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ du processus à l'entrée d'un circuit non linéaire. Adoptons $w_1(x, t)$

en qualité de fonction de pondération et calculons l'ensemble des polynômes orthogonaux normés $Q_k(x, t)$ satisfaisant à la condition d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(x, t)\, Q_n(x, t)\, Q_m(x, t)\, dx = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

On peut développer la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ en série double suivant ces polynômes orthogonaux [voir (2.139)]

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_1(x_1, t_1)\, w_1(x_2, t_2) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(t_1, t_2)\, Q_m(x_1, t_1)\, Q_n(x_2, t_2). \quad (6.7)$$

Pour trouver les coefficients a_{mn} il suffit de multiplier les deux membres de (6.7) par $Q_k(x_1, t_1)\, Q_l(x_2, t_2)$ et d'intégrer en utilisant la condition d'orthogonalité. On a alors

$$a_{mn}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \times \\ \times Q_m(x_1, t_1)\, Q_n(x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2. \quad (6.8)$$

Souvent pour $m \neq n$ on a

$$a_{mn} = 0. \quad (6.8')$$

Pour ce type de densités de probabilité les formules (6.7) et (6.8) se simplifient [cf. (2.141) et (2.142)]:

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_1(x_1, t_1)\, w_1(x_2, t_2) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t_1, t_2)\, Q_n(x_1, t_1)\, Q_n(x_2, t_2), \quad (6.9)$$

$$a_n(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \times \\ \times Q_n(x_1, t_1)\, Q_n(x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2. \quad (6.10)$$

En portant (6.9) dans (6.2) et en séparant les variables d'intégrati on on obtient

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1)\, c_n(t_2)\, a_n(t_1, t_2), \quad (6.11)$$

où

$$c_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, Q_n(x, t)\, w_1(x, t)\, dx. \quad (6.12)$$

La formule (6.12) donne l'expression de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à la sortie d'un circuit non linéaire

sous la forme d'une série de fonctions $a_n(t_1, t_2)$ déterminées uniquement par les caractéristiques corrélationnelles du processus d'entrée et ne dépendant pas du type de non-linéarité. Cette méthode de calcul de la fonction de corrélation à la sortie d'un système non linéaire peut être appelée *méthode directe* (ou méthode corrélationnelle).

Si le processus aléatoire à l'entrée d'un circuit non linéaire est stationnaire, la fonction $w_1(x, t)$ est indépendante du temps t et $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$, on peut alors écrire (6.11) sous la forme

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 a_n(\tau), \tag{6.13}$$

où

$$a_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2, \tau)\, Q_n(x_1)\, Q_n(x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{6.14}$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, Q_n(x)\, w_1(x)\, dx. \tag{6.15}$$

6.1.3. Méthode des intégrales curvilignes. La seconde méthode est basée sur le fait que certains circuits non linéaires peuvent être décrits par une intégrale curviligne de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_C g(iu)\, e^{ixu}\, du, \tag{6.16}$$

où

$$g(iu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixu}\, dx. \tag{6.17}$$

En portant (6.16) dans (6.2) et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1}\int_{C_2} g(iu_1)\, g(iu_2) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\, e^{i(x_1u_1+x_2u_2)}\, dx_1\, dx_2\, du_1\, du_2.$$

L'intégrale interne sur x_1 et x_2 représente la caractéristique bidimensionnelle de la fonction $\Theta_2(u_1, u_2, t_1, t_2)$ du processus à l'entrée d'un circuit non linéaire. On a alors

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{C_1}\int_{C_2} g(iu_1)\, g(iu_2)\, \Theta_2(u_1, u_2, t_1, t_2)\, du_1\, du_2. \tag{6.18}$$

D'une manière analogue à (6.9) on peut développer Θ_2 (u_1, u_2, t_1, t_2) en série

$$\Theta_2(u_1, u_2, t_1, t_2) = \Theta_1(u_1, t_1)\,\Theta_1(u_2, t_2) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t_1, t_2)\, M_n(u_1, t_1)\, M_n(u_2, t_2), \qquad (6.19)$$

où M_n (u, t) est un polynôme de degré n.

Les formules (6.18) et (6.19) permettent d'exprimer la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un circuit non linéaire sous la forme d'une série

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t_1)\, d_n(t_2)\, b_n(t_1, t_2), \qquad (6.20)$$

où

$$d_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_C g(iu)\, M_n(u, t)\, \Theta_1(u, t)\, dt. \qquad (6.21)$$

La formule (6.20) donne l'expression de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à la sortie d'un circuit non linéaire sous la forme d'une série suivant les fonctions b_n (t_1, t_2) qui, tout comme les fonctions a_n (t_1, t_2), ne dépendent que des caractéristiques corrélationnelles du processus d'entrée et ne dépendent pas du type de la non-linéarité.

Si le processus aléatoire d'entrée est stationnaire, la fonction Θ_1 (u, t) est indépendante du temps t et Θ_2 (u_1, u_2, t_1, t_2) ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$, l'expression (6.20) peut alors s'écrire

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^2 b_n(\tau), \qquad (6.22)$$

où

$$b_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_2(u_1, u_2, \tau)\, M_n(u_1)\, M_n(u_2)\, du_1\, du_2; \qquad (6.23)$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_C g(iu)\, M_n(u)\, \Theta_1(u)\, du. \qquad (6.24)$$

Remarquons qu'il est impossible de dire quand il vaut mieux utiliser la méthode directe de calcul des fonctions de corrélation et quand la méthode des intégrales curvilignes est préférable. Suivant les propriétés probabilistes du processus à l'entrée du circuit non linéaire ou le type de la non-linéarité, l'une ou l'autre des méthodes exposées peut s'avérer plus simple pour le calcul des coefficients du développement en série. Dans le cas des processus non stationnaires, lorsqu'on a à prendre la moyenne temporelle de la

fonction de corrélation du processus de sortie, il est parfois préférable d'utiliser la méthode des intégrales curvilignes.

6.1.4. Spectre énergétique d'un processus à bande étroite après transformation non linéaire. Dans le cas général les fonctions $a_n(\tau)$ et $b_n(\tau)$ dans les formules (6.13) et (6.22) peuvent être représentées par des fonctions non linéaires du coefficient de corrélation $R_\xi(\tau)$ du processus à l'entrée d'un système non linéaire. En vertu de ces formules un processus aléatoire stationnaire à large bande après transformation non linéaire non inertielle reste stationnaire et à large bande.

Considérons maintenant une transformation non linéaire non inertielle d'un processus aléatoire à bande étroite. Dans ce cas, en vertu de (4.71), le coefficient de corrélation du processus à l'entrée d'un circuit non linéaire peut s'écrire comme suit:

$$R_\xi(\tau) = R_c(\tau)\cos\omega_0\tau + R_s(\tau)\sin\omega_0\tau = \\ = R_0(\tau)\cos[\omega_0\tau - \mu(\tau)], \qquad (6.25)$$

où $R_0(\tau)$ et $\mu(\tau)$ sont des fonctions variant lentement par rapport à $\cos\omega_0\tau$.

Supposons que pour le calcul de la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un circuit non linéaire on utilise la méthode directe, et que les fonctions $a_n(\tau)$ de (6.13) puissent s'écrire de la manière suivante:

$$a_n(\tau) = \Phi_n[R_\xi(\tau)] = \Phi_n\{R_0(\tau)\cos[\omega_0\tau - \mu(\tau)]\}. \qquad (6.26)$$

En développant (6.26) suivant les cosinus des arcs multiples on obtient

$$a_n(\tau) = A_0(\tau) + \sum_{r=1}^{\infty} A_r(\tau)\cos[r\omega_0\tau - \mu_r(\tau)]. \qquad (6.27)$$

En portant (6.27) dans (6.13) et en groupant les termes correspondant aux mêmes harmoniques de la pulsation ω_0, on peut écrire comme suit la fonction de corrélation d'un processus à bande étroite après une transformation non linéaire

$$B_\zeta(\tau) = B_0(\tau) + \sum_{r=1}^{\infty} B_r(\tau)\cos[r\omega_0\tau - \beta_r(\tau)], \qquad (6.28)$$

le spectre énergétique correspondant sera

$$F_\zeta(\omega) = F_0(\omega) + F_1(\omega) + \sum_{r=2}^{\infty} F_r(\omega). \qquad (6.29)$$

Dans l'expression (6.28) les fonctions $B_r(\tau)$ et $\beta_r(\tau)$ sont des fonctions variant lentement par rapport à $\cos r\,\omega_0\tau$. Ceci signifie que le spectre énergétique d'un processus aléatoire stationnaire à bande étroite après transformation non linéaire et non inertielle

est une suite de raies spectrales (fig. 6.1) dans le domaine des vidéofréquences *) [spectre $F_0(\omega)$], au voisinage de la porteuse [$F_1(\omega)$], où se trouve également concentré le spectre du processus d'entrée, et dans le domaine des hautes fréquences au voisinage des harmoniques de la porteuse (spectres $F_r(\omega)$ pour $r \geqslant 2$). Ces fréquences peuvent être séparées au moyen de filtres passe-bande de bande passante suffisamment large pour englober la raie en question, mais en

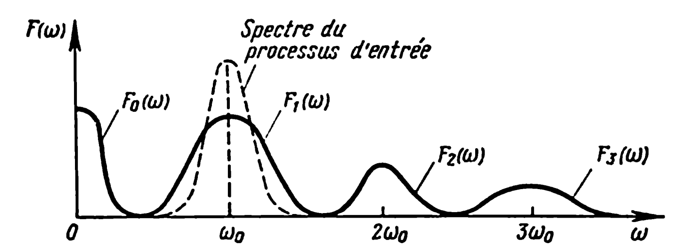


Fig. 6.1. Spectre énergétique d'un processus aléatoire à bande étroite après une transformation non linéaire

même temps assez étroite pour ne pas laisser passer les raies voisines. Le spectre des vidéofréquences présente un intérêt particulier pour la démodulation, alors que la bande spectrale de part et d'autre de la porteuse joue un rôle important dans les systèmes de modulation d'hétérodynage.

6.1.5. Densité de probabilité d'un processus après transformation non linéaire. Comme nous l'avons déjà noté, la caractéristique $f(x)$ d'un circuit non linéaire non inertiel est une fonction univoque, autrement dit la valeur du processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un élément non linéaire est à tout instant déterminée par la valeur du processus d'entrée $\xi(t)$ à ce même instant: $\zeta(t) = f[\xi(t)]$. Ainsi, pour calculer la densité de probabilité $W_n(y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_n)$ d'un processus aléatoire à la sortie d'un élément non linéaire, il suffit de connaître la densité de probabilité correspondante $w_n(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)$ du processus d'entrée et d'utiliser les formules générales données au chapitre 3 de changement de variables dans les densités de probabilité pour une transformation de la forme

$$\zeta_k = f(\xi_k), \tag{6.30}$$

où

$$\xi_k = \xi(t_k), \quad \zeta_k = \zeta(t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dans certains cas ces calculs peuvent se simplifier, si l'on commence le calcul non pas par les densités de probabilité mais par leurs fonctions caractéristiques.

*) Ce domaine contient également la raie discrète (fonction delta) pour $\omega = 0$, correspondant à la composante continue.

En vertu de (3.116) la fonction caractéristique à n dimensions du processus à la sortie d'un système non linéaire est

$$\Theta_n(v_1, \ldots, v_n, t_1, \ldots, t_n) = m_1 \{e^{i[v_1 f(\xi_1) + \ldots + v_n f(\xi_n)]}\}$$

ou

$$\Theta_n(v_1, \ldots, v_n, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[v_1 f(\xi_1) + \ldots + v_n f(\xi_n)]} \times$$
$$\times w_n(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \quad (6.31)$$

Par transformation de Fourier inverse de Θ_n on trouve la densité de probabilité $w_n(y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_n)$ à n dimensions du processus à la sortie d'un système non linéaire.

Notons que pour calculer la fonction de corrélation et le spectre énergétique d'un processus à la sortie d'un circuit non linéaire il faut d'abord au moins trouver la densité de probabilité bidimensionnelle de ce processus. Cependant si *seules* les caractéristiques énergétiques suffisent, il est souvent plus simple d'utiliser les résultats des §§ 6.1.2 ou 6.1.3, sans calcul préalable de la densité de probabilité bidimensionnelle.

Notons en conclusion qu'une transformation linéaire non inertielle d'un processus aléatoire n'introduit pas de liaisons probabilistes (temporelles) supplémentaires. Plus exactement, si avant sa transformation non inertielle un processus est entièrement caractérisé par sa densité de probabilité à n dimensions, après transformation ce processus sera également entièrement caractérisé par la densité de probabilité à n dimensions. Par exemple, un processus markovien après transformation non linéaire non inertielle monotone reste markovien. Par contre, les systèmes inertiels introduisent des liaisons probabilistes supplémentaires. Ainsi, un bruit blanc après filtrage devient corrélé, et un processus markovien appliqué à l'entrée d'un système linéaire cesse d'être markovien à la sortie.

6.2. ENVELOPPE ET PHASE D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE

6.2.1. Définition à l'aide du processus conjugué. Sous des hypothèses assez générales *) on peut pour un processus aléatoire stationnaire donné $\xi(t)$ former par transformation de Hilbert un autre

*) Pour que le processus conjugué de $\xi(t)$ existe il suffit que la composante continue de $\xi(t)$ soit nulle. Pour les processus ergodiques il suffit de poser $m_1\{\xi(t)\} = 0$.

processus aléatoire stationnaire $\eta(t)$ conjugué de $\xi(t)$ (voir annexe VI)

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\xi(\tau)}{t-\tau} d\tau. \tag{6.32}$$

L'intégrale (6.32) est considérée convergente en moyenne quadratique. Le processus aléatoire $\xi(t)$ et le processus conjugué peuvent alors s'écrire sous la forme suivante [voir (5) et (6) de l'annexe VI]:

$$\xi(t) = E(t) \cos \Phi(t), \tag{6.33}$$

$$\eta(t) = E(t) \sin \Phi(t), \tag{6.34}$$

les processus aléatoires $E(t)$ et $\Phi(t)$ s'exprimeront comme suit en fonction de $\xi(t)$ et du processus conjugué $\eta(t)$:

$$E(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}, \tag{6.35}$$

$$\Phi(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)}. \tag{6.36}$$

Les processus aléatoires $E(t)$ et $\Phi(t)$ ainsi définis sont appelés respectivement *enveloppe* et *phase* du processus aléatoire $\xi(t)$ *).

Notons qu'en vertu de (6.35) on a $E(t) \geqslant |\xi(t)|$, c'est-à-dire que la fonction aléatoire $\xi(t)$ ne coupe nulle part la fonction aléatoire $E(t)$. De plus

$$EE' = \xi\xi' + \eta\eta',$$

donc aux points où $\xi(t) = E(t)$ $(\eta(t) = 0)$ on a l'égalité $E' = \xi'$. Ainsi la fonction aléatoire $\xi(t)$ ne coupe pas $E(t)$ et aux points de contact elles ont une même tangente. Ces propriétés expliquent pourquoi la fonction aléatoire $E(t)$ est appelée enveloppe de $\xi(t)$.

Représenté sous la forme (6.33) le processus aléatoire $\xi(t)$ peut être considéré comme une oscillation harmonique modulée en amplitude et en phase par les fonctions aléatoires $E(t)$ et $\Phi(t)$.

En utilisant la propriété de la transformation de Hilbert, exprimée par la formule (3) de l'annexe VI, on voit que le spectre énergétique (donc également la fonction de corrélation) du processus aléatoire $\eta(t)$ conjugué de $\xi(t)$ coïncide avec le spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ [fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$] du processus aléatoire $\xi(t)$. La fonction de corrélation mutuelle de deux processus conjugués est égale à

$$B_{\xi\eta}(\tau) = m_1\{\xi(t)\,\eta(t+\tau)\} = m_1\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t)\,\xi(u)}{t+\tau-u} du\right\}.$$

*) Si la moyenne n'est pas nulle, les notions d'enveloppe et de phase se rapportent à l'écart de $\xi(t)$ de sa moyenne.

En supposant que l'on puisse changer l'ordre d'intégration et de prise de la moyenne, on obtient

$$B_{\xi\eta}(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{\xi}(u-t)}{\tau-(u-t)}\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_{\xi}(v)}{\tau-v}\,dv. \qquad (6.37)$$

Ainsi la fonction de corrélation mutuelle $B_{\xi\eta}$ et la fonction de corrélation B_{ξ} sont deux transformées de Hilbert conjuguées. Utilisant de nouveau (3) de l'annexe VI on peut trouver le spectre énergétique mutuel de deux processus conjugués

$$F_{\xi\eta}(\omega)=\begin{cases}-iF_{\xi}(\omega), & \omega>0,\\ \quad iF_{\xi}(\omega), & \omega<0.\end{cases} \qquad (6.38)$$

En vertu de (6.37) et de (4.95) on peut alors trouver l'expression de la fonction de corrélation mutuelle en fonction du spectre énergétique du processus $\xi(t)$

$$B_{\xi\eta}(\tau)=-B_{\eta\xi}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F_{\xi}(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega. \qquad (6.39)$$

La relation (6.39) montre que la fonction de corrélation mutuelle des processus aléatoires conjugués est impaire et pour $\tau=0$, c'est-à-dire en des instants simultanés, ces processus sont *incohérents*. Si $\xi(t)$ est un processus aléatoire normal stationnaire, $\eta(t)$ est également un processus aléatoire normal stationnaire et la distribution conjointe de $\xi(t)$ et de $\eta(t)$ est également normale (voir § 4.4.3), aux mêmes instants ces processus étant *indépendants*.

6.2.2. Représentation d'un processus à bande étroite. Le fait de pouvoir représenter un processus aléatoire sous la forme (6.33) ne limite en aucune sorte le spectre énergétique du processus. Cependant le cas des processus à bande étroite présente un intérêt particulier.

Soit ω_0 une certaine pulsation à l'intérieur de la bande dans laquelle se trouve concentré le spectre énergétique du processus aléatoire $\xi(t)$. Si $\xi(t)$ est un processus aléatoire stationnaire à la sortie d'un système linéaire à bande étroite, la pulsation ω_0 est prise égale à celle de résonance du système.

Posons

$$\Phi(t)=\omega_0 t-\varphi(t). \qquad (6.40)$$

Portant (6.40) dans (6.33) on obtient pour un processus aléatoire à bande étroite la représentation suivante:

$$\xi(t)=E(t)\cos[\omega_0 t-\varphi(t)]=$$
$$=E(t)\cos\varphi(t)\cos\omega_0 t+E(t)\sin\varphi(t)\sin\omega_0 t. \qquad (6.41)$$

En introduisant les notations

$$A(t)=E(t)\cos\varphi(t),\quad C(t)=E(t)\sin\varphi(t), \qquad (6.41')$$

on trouve

$$\xi(t) = A(t)\cos\omega_0 t + C(t)\sin\omega_0 t. \qquad (6.42)$$

D'une manière analogue pour le processus conjugué on obtient à partir de (6.34)

$$\eta(t) = A(t)\sin\omega_0 t - C(t)\cos\omega_0 t \qquad (6.43)$$

et à partir de (6.41)

$$E(t) = \sqrt{A^2(t) + C^2(t)}, \qquad (6.44)$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{C(t)}{A(t)}. \qquad (6.44')$$

Parfois il se trouve être commode d'écrire l'expression (6.41) comme la partie réelle d'une certaine grandeur complexe

$$\xi(t) = \operatorname{Re} Z(t)\, e^{i\omega_0 t}, \qquad (6.45)$$

où

$$Z(t) = E(t)\, e^{-i\varphi(t)} \qquad (6.45')$$

est l'*enveloppe complexe* du processus aléatoire à bande étroite $\xi(t)$.

A partir de (6.42) et (6.43) on obtient

$$A(t) = \xi(t)\cos\omega_0 t + \eta(t)\sin\omega_0 t, \qquad (6.46)$$

$$C(t) = \xi(t)\sin\omega_0 t - \eta(t)\cos\omega_0 t. \qquad (6.46')$$

Soient $B_A(\tau)$, $B_C(\tau)$, $B_{AC}(\tau)$, $B_{CA}(\tau)$ les fonctions de corrélation et de corrélation mutuelle des processus aléatoires $A(t)$ et $C(t)$. L'expression (6.46) donne alors

$$B_A(\tau) = B_C(\tau) = m_1\{\xi(t)\,\xi(t+\tau)\}\cos\omega_0\tau + m_1\{\xi(t)\,\eta(t+\tau)\}\sin\omega_0\tau = B_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau + B_{\xi\eta}(\tau)\sin\omega_0\tau, \qquad (6.47)$$

$$B_{AC}(\tau) = -B_{CA}(\tau) = m_1\{\xi(t)\,\xi(t+\tau)\}\sin\omega_0\tau - m_1\{\xi(t)\,\eta(t+\tau)\}\cos\omega_0\tau = B_\xi(\tau)\sin\omega_0\tau - B_{\xi\eta}(\tau)\cos\omega_0\tau. \qquad (6.48)$$

En vertu de (6.47) et (6.48) on a

$$B_\xi(\tau) = B_A(\tau)\cos\omega_0\tau + B_{AC}(\tau)\sin\omega_0\tau. \qquad (6.49)$$

Exprimant les fonctions de corrélation et de corrélation mutuelle $B_\xi(\tau)$ et $B_{\xi\eta}(\tau)$ à l'aide du spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ du processus $\xi(t)$ on obtient à partir de (6.47)

$$B_A(\tau) = B_C(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F_\xi(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau\, d\omega. \qquad (6.50)$$

Si le processus $\xi(t)$ est à bande étroite, on tire de (6.50), avec une erreur insignifiante, l'égalité suivante (voir § 4.2.4):

$$B_A(\tau)=B_C(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi^*(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \tag{6.51}$$

où $F_\xi^*(\omega)$ est le spectre énergétique du processus $\xi(t)$ déplacé dans le domaine des fréquences basses [voir (4.69)].

En vertu de (6.50) les variances *) des processus $A(t)$ et $C(t)$ sont égales entre elles et égales à la variance de $\xi(t)$:

$$B_A(0)=B_C(0)=B_\xi(0), \tag{6.52}$$

ce qui entraîne également [voir (6.44)]

$$m_1\{E^2(t)\}=2B_\xi(0). \tag{6.52'}$$

Il est facile de voir à partir de (6.51) que si le processus $\xi(t)$ est à bande étroite, les fonctions de corrélation des processus aléatoires $A(t)$ et $C(t)$ sont des fonctions *variant lentement* par rapport à $\cos\omega_0 t$. Etant donnée la relation existant entre les fonctions $E(t)$ et $\varphi(t)$ d'une part et les fonctions $A(t)$ et $C(t)$ d'autre part, les fonctions de corrélation de l'enveloppe $E(t)$ et de la phase $\varphi(t)$ sont des fonctions *variant lentement* par rapport à $\cos\omega_0\tau$ et leurs spectres énergétiques se trouvent dans le domaine des basses fréquences. Ainsi, *un processus aléatoire à bande étroite équivaut à une oscillation haute fréquence de pulsation porteuse ω_0 dont l'enveloppe et la phase sont des fonctions variant lentement* [voir (6.42) et (6.49)].

Les fonctions de corrélation mutuelle des processus $A(t)$ et $C(t)$ sont, en vertu de (6.48), égales à

$$B_{AC}(\tau)=-B_{CA}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F_\xi(\omega)\sin(\omega-\omega_0)\tau\,d\omega. \tag{6.53}$$

Pour un processus à bande étroite, avec une erreur négligeable, on obtient à partir de (6.53) [voir (6.51)]

$$B_{AC}(\tau)=-B_{CA}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\xi^*(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega. \tag{6.53'}$$

En vertu de (6.53) pour $\tau=0$, c'est-à-dire aux mêmes instants, les processus aléatoires $A(t)$ et $C(t)$ sont toujours *incohérents*. Si $\xi(t)$ est un processus aléatoire normal stationnaire, $A(t)$ et $C(t)$ sont également des processus aléatoires normaux stationnaires *indépendants* aux mêmes instants.

*) Comme les moyennes du processus $\xi(t)$ et du processus conjugué $\eta(t)$ sont nulles, il vient de (6.46) et (6.46') que les moyennes des processus $A(t)$ et $C(t)$ sont également nulles.

Notons qu'à partir de (6.50) et (6.53) on a

$$B_A^2(\tau)+B_{AC}^2(\tau)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F_\xi(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega\right]^2+$$
$$+\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F_\xi(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega\right]^2, \quad (6.54)$$

ce qui veut dire que la somme (6.54) ne dépend pas de la pulsation ω_0.

Les fonctions de corrélation des dérivées $A'(t)$ et $C'(t)$ sont

$$-B_A''(\tau)=-B_C''(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty(\omega-\omega_0)^2F_\xi(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau\,d\omega, \quad (6.55)$$

et les variances de ces dérivées

$$-B_A''(0)=-B_C''(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty(\omega-\omega_0)^2F_\xi(\omega)\,d\omega. \quad (6.56)$$

Il est également facile de trouver l'expression des fonctions de corrélation mutuelles de $A(t)$ et $C'(t)$ et de $A'(t)$ et $C(t)$, on a

$$m_1\{A(t)C'(t)\}=-m_1\{A'(t)C(t)\}=$$
$$=B_{AC}'(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty(\omega-\omega_0)F_\xi(\omega)\,d\omega=(\omega_{\text{moy}}-\omega_0)B_\xi(0), \quad (6.57)$$

où $\omega_{\text{moy}}=\dfrac{\int_0^\infty\omega F_\xi(\omega)d\omega}{\int_0^\infty F_\xi(\omega)d\omega}$ est la pulsation moyenne du spectre énergétique du processus $\xi(t)$.

Si le spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ du processus aléatoire $\xi(t)$ est symétrique et si ω_0 coïncide avec la pulsation centrale du spectre, il vient de (6.51) et (6.53) (voir § 4.2.4)

$$B_A(\tau)=B_C(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F_\xi^*(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=a_c(\tau), \quad (6.58)$$

$$B_{AC}(\tau)=-B_{CA}(\tau)=0. \quad (6.59)$$

A partir de (6.49) et (6.58) on obtient pour la fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$ d'un processus aléatoire à bande étroite $\xi(t)$ de spectre énergétique symétrique l'expression suivante:

$$B_\xi(\tau)=a_c(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

ce qui coïncide avec (4.72). Ceci fait cependant apparaître le sens physique de la fonction $a_c(\tau)$ dans (4.72) qui se trouve être la fonction de corrélation de chacun des processus lentement variables $A(t)$ et $C(t)$ liés au processus à bande étroite $\xi(t)$ par la relation (6.46).

Comme nous l'avons vu au § 5.2.2, un bruit blanc à la traversée d'un système linéaire à bande étroite de pulsation de résonance ω_0 représente un processus aléatoire à bande étroite. Si en outre le bruit blanc est normal et que la caractéristique de fréquence du système est symétrique par rapport à la fréquence de résonance, le processus à la sortie du système linéaire à bande étroite peut se présenter sous la forme d'une somme du type (6.42), où $A(t)$ et $C(t)$ sont des processus aléatoires indépendants.

6.2.3. Densités de probabilité de l'enveloppe et de la phase. Pour trouver les densités de probabilité de l'enveloppe $E(t)$ et de la phase $\varphi(t)$ d'un processus aléatoire à bande étroite, reprenons les formules (6.44), (6.44') et utilisons les propriétés des fonctions « en quadrature » $A(t)$ et $C(t)$ mentionnées au paragraphe précédent.

Soit $w_{2n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_n)$ la densité de probabilité conjointe des valeurs de $A(t)$ et $C(t)$ à n instants. Pour trouver les densités de probabilité de l'enveloppe et de la phase, passons, conformément à (6.44) et (6.44'), dans la distribution conjointe mentionnée, aux coordonnées polaires

$$x_k = r_k \cos\vartheta_k, \quad y_k = r_k \sin\vartheta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.60}$$

Après cette substitution, on obtient, au lieu de la densité de probabilité des variables $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$, la densité de probabilité conjointe à $2n$ dimensions de l'enveloppe et de la phase qui est fonction des variables $r_1, \ldots, r_n; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$

$$W_{2n}(r_1, \ldots, r_n; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = |D_n|\, w_{2n}(r_1\cos\vartheta_1, \ldots, r_n\cos\vartheta_n; r_1\sin\vartheta_1, \ldots \\ \ldots, r_n\sin\vartheta_n; t_1, \ldots, t_n), \tag{6.61}$$

où D_n est le jacobien de la transformation (6.60) égal à

$$D_n = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)}{\partial(r_1, \ldots, r_n; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)} = \prod_{i=1}^{n} r_i. \tag{6.62}$$

La densité de probabilité de l'enveloppe s'obtient par n intégrations de (6.61) sur les variables $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$

$$W_n(r_1, r_2, \ldots, r_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} W_{2n}(r_1, \ldots, r_n; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; t_1, \ldots \\ \ldots, t_n)\, d\vartheta_1, \ldots, d\vartheta_n, \quad r_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.63}$$

La densité de probabilité de la phase $\varphi(t)$ du processus aléatoire s'obtient à partir de (6.61) par intégration sur les variables $r_1, r_2, \ldots, r_n$

$$W_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n; t_1, \ldots, t_n) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty W_{2n}(r_1, \ldots, r_n; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; t_1, \ldots, t_n)\, dr_1 \ldots dr_n, \quad |\vartheta_i| \leqslant \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.64}$$

Pour certains problèmes de transformation non linéaire de l'enveloppe on peut obtenir plus rapidement la densité cherchée en utilisant la fonction caractéristique. La fonction caractéristique $\Theta_n(v_1, \ldots, v_n; t_1, \ldots, t_n)$ du processus $f[E(t)]$ conformément à (3.119) aura pour expression

$$\Theta_n(v_1, \ldots, v_n; t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} v_k f\left(\sqrt{x_k^2 + y_k^2}\right)\right] \times w_{2n}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n. \tag{6.65}$$

Remarquons que l'existence d'une relation fonctionnelle non linéaire très compliquée entre l'enveloppe $E(t)$ et la phase $\varphi(t)$ d'une part et le processus $\xi(t)$ d'autre part rend pratiquement impossible l'utilisation des résultats des §§ 6.1.2 et 6.1.3 pour le calcul des fonctions de corrélation et du spectre énergétique de l'enveloppe et de la phase. C'est pourquoi s'il faut calculer les caractéristiques énergétiques de l'enveloppe et de la phase, il y a lieu de déterminer à l'aide des formules (6.63) et (6.64) leurs densités de probabilité bidimensionnelles, et ensuite de calculer les fonctions de corrélation et les spectres énergétiques (ces derniers par le théorème de Wiener-Khintchine).

6.3. CRITÈRES DE QUALITÉ DES SYSTÈMES RADIOTECHNIQUES

6.3.1. Critères énergétiques. On utilise souvent les fonctions de corrélation et les spectres énergétiques pour estimer et comparer d'après tel ou tel critère énergétique la qualité des différents systèmes employés dans les télécommunications, le radar, la navigation, la commande automatique, etc. Un grand nombre de problèmes apparaissent lorsqu'un bruit accompagne le signal utile. Il faut alors trouver un critère de protection contre les bruits, dont le choix dépend de la méthode de sélection du signal utile. Souvent on adopte comme critère le rapport de la puissance du signal à celle du bruit (ou la racine carrée de ce rapport) que l'on appelle brièvement rapport *signal/bruit* et que l'on désigne par S/B. Pour le calcul de ce rapport on a recours à la théorie des transformations des spectres énergétiques des processus aléatoires dans les systèmes linéaires et non linéaires.

Certains dispositifs peuvent être représentés comme une suite de circuits type se composant chacun de deux éléments linéaires et d'un non linéaire. Nous allons étudier maintenant la méthode de calcul du rapport signal/bruit à la sortie d'un circuit type (fig. 6.2). Supposons, par exemple, qu'on applique à l'entrée d'un circuit type la somme d'un signal qui est une fonction déterministe ou quasi déterministe du temps, et d'un bruit qui est un processus aléatoire

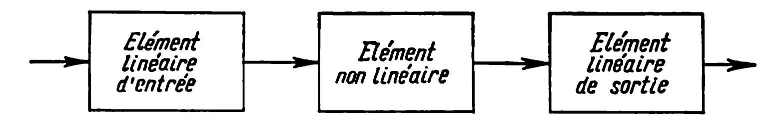


Fig. 6.2. Circuit type des dispositifs radiotechniques

stationnaire. Comme le signal et le bruit traversent l'élément linéaire indépendamment, à l'entrée de l'élément non linéaire on a de nouveau la somme d'un signal et d'un bruit, dont les spectres sont, comme mentionné ci-dessus, déformés suivant la caractéristique fréquentielle de l'élément linéaire. Le spectre énergétique du processus à la sortie de l'élément non linéaire a une structure plus compliquée. Les composantes spectrales apparaissant après transformation non linéaire sont dues aux battements des composantes respectives du processus

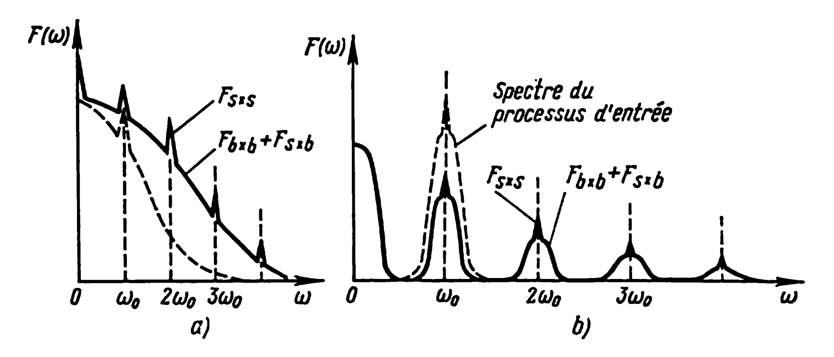


Fig. 6.3. Spectres énergétiques après une transformation non linéaire de la somme d'une oscillation harmonique et d'un bruit à large bande (*a*) et à bande étroite (*b*)

d'entrée, leur nombre et leur intensité étant évidemment déterminés par le genre de la transformation et les caractéristiques probabilistes du processus d'entrée. On distingue dans le spectre énergétique du signal à la sortie d'un élément non linéaire non inertiel trois parties essentielles suivant les composantes fréquentielles du signal d'entrée qui ont participé à leur création. La partie discrète du spectre $F_{s\times s}(\omega)$ correspond aux battements entre les composantes du signal. Une partie du spectre continu $F_{b\times b}(\omega)$ est formée par les battements des composantes du bruit, et une autre partie $F_{s\times b}(\omega)$ par les battements des composantes du signal et du bruit. Dans la partie discrète du spectre apparaît la raie spectrale correspondant à $\omega = 0$ qui représente la composante continue à la sortie et est également déterminée par les battements des composantes du signal et du bruit. Sur la figure 6.3 on a représenté les spectres

énergétiques types qui résultent de la transformation non linéaire de la somme d'une porteuse non modulée et d'un bruit.

Soit $C_2(\omega)$ la caractéristique fréquentielle du filtre monté après l'élément non linéaire. Le spectre énergétique à la sortie du circuit type sera alors

$$F(\omega) = C_2^2(\omega)\,[F_{s\times s}(\omega) + F_{b\times b}(\omega) + F_{s\times b}(\omega)]. \qquad (6.66)$$

Pour calculer le rapport signal/bruit à la sortie du circuit type il faut décider où rapporter (au signal ou au bruit) la partie $C_2^2(\omega)\,F_{s\times b}(\omega)$ du spectre de sortie. On trouve alors deux critères différents permettant d'estimer l'efficacité de la protection contre le bruit suivant que les battements entre les composantes du signal et du bruit sont rapportés au bruit ou au signal utile.

Dans le premier cas le rapport signal/bruit est donné par la formule

$$\left(\frac{S}{B}\right)_1 = \frac{\int\limits_0^\infty C_2^2(\omega)\,F_{s\times s}(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty C_2^2(\omega)\,[F_{b\times b}(\omega)+F_{s\times b}(\omega)]\,d\omega}, \qquad (6.67)$$

et dans le second cas par

$$\left(\frac{S}{B}\right)_2 = \frac{\int\limits_0^\infty C_2^2(\omega)\,[F_{s\times s}(\omega)+F_{s\times b}(\omega)]\,d\omega}{\int\limits_0^\infty C_2^2(\omega)\,F_{b\times b}(\omega)\,d\omega}. \qquad (6.68)$$

Il se trouve que l'estimation énergétique présente certains avantages par rapport à des critères basés sur des données plus complètes, en effet on a là une interprétation physique plus simple, des calculs mathématiques peu compliqués permettant d'obtenir le rapport signal/bruit et de disposer ainsi d'une certaine mesure de la qualité du dispositif ou du système. Cependant il ne faut jamais oublier que l'estimation énergétique n'est pas complète: elle ne donne qu'une caractéristique partielle, et ne tient pas compte, par exemple, du processus réel de la prise de décision que ce soit un automate ou un homme qui la prend. L'estimation énergétique de la qualité des systèmes ne coïncide pas toujours exactement avec les résultats expérimentaux, car dans le cas des éléments non linéaires il n'est pas toujours facile de déterminer ce qui se rapporte au signal et ce qui ce rapporte au bruit.

6.3.2. Critères probabilistes. Comme nous venons de le noter, les critères énergétiques d'estimation de la qualité des systèmes ne sont pas complets et dans certains cas on ne peut pas les appliquer. On est alors obligé de se référer à des *critères probabilistes*, basés sur la « structure fine » du processus à la sortie du système. Qu'il s'agisse de la probabilité des erreurs ou de la probabilité pour que l'écart du processus de sortie de sa valeur donnée soit inférieur à une certaine valeur, que l'on introduise la fonction de perte attribuant un coût à chaque solution ou une quantité d'information, il faut dans tous les cas pour le calcul du critère probabiliste de qualité connaître les densités de probabilité multidimensionnelles à la sortie du système.

Revenant de nouveau au circuit type des dispositifs radiotechniques (fig. 6.2) soulignons que la densité de probabilité est difficile à trouver tant en principe qu'à cause des calculs compliqués apparaissants. Comme un circuit type contient un élément non linéaire, après la transformation non linéaire on a toujours à l'entrée de l'élément linéaire un processus aléatoire dont la distribution n'est

pas normale (voir § 5.3.1). Dans les cas où le processus à l'entrée du circuit type n'est pas normal, cette difficulté apparaît dès le début. Ceci peut compliquer énormément non seulement le calcul de la densité de probabilité, mais même celui du spectre énergétique du processus à la sortie de l'élément non linéaire, car pour cela il faut connaître la densité de probabilité bidimensionnelle du processus aléatoire à l'entrée de cet élément non linéaire (à la sortie de l'élément linéaire précédent). Le problème de la détermination des fonctions de distribution à la sortie d'un circuit type n'a été résolu d'une manière exacte que dans peu de cas, ceci pour des hypothèses spéciales quant à la nature de la non-linéarité de l'élément et aux caractéristiques probabilistes du processus aléatoire d'entrée.

Problèmes

6.1. Généraliser la formule (6.11) et montrer que la fonction de corrélation mutuelle des processus $\eta_1(t) = f_1[\xi_1(t)]$ et $\eta_2(t) = f_2[\xi_2(t)]$ a pour expression

$$B(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n1}(t_1)\, c_{n2}(t_2)\, a_n(t_1, t_2), \tag{1}$$

où

$$c_{n1}(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x_1,)\, Q_{n1}(x_1\ t_1)\, dx_1; \tag{2}$$

$$c_{n2}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2)\, Q_{n2}(x_2, t_2)\, dx_2; \tag{3}$$

$$a_n(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_{2\xi_1\xi_2}(x_1, x_2, t_1, t_2) \times \times Q_{n1}(x_1, t_1)\, Q_{n2}(x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2; \tag{4}$$

$Q_{n1}(x_1, t_1)$, $Q_{n2}(x_2, t_2)$ sont des familles de polynômes orthogonaux pour les fonctions de pondération $w_{1\xi_1}(x_1, t_1)$ et $w_{1\xi_2}(x_2, t_2)$ respectivement (la condition (6.8′) se trouve conservée).

6.2. Supposons que la densité de probabilité bidimensionnelle du processus aléatoire satisfasse à la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - a_\xi)\, w_{2\xi}(x_1, x_2, \tau)\, dx_1 = (x_2 - a_\xi)\, R_\xi(\tau)\, w_{1\xi}(x_2). \tag{5}$$

Montrer que la fonction de corrélation mutuelle du processus aléatoire centré $\xi(t)$ et du processus $\eta = f(\xi)$ à la sortie d'un système non linéaire non inertiel, lorsqu'à l'entrée on applique $\xi(t)$, est égale à

$$B_{\xi\eta}(\tau) = CR_\xi(\tau), \tag{6}$$

où

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_\xi)\, f(x)\, w_{1\xi}(x)\, dx. \tag{7}$$

Noter que, pour une distribution symétrique (de moyenne nulle) et une caractéristique de non-linéarité également symétrique, les processus $\xi(t)$ et $\eta(t)$ à l'entrée et à la sortie du système ne sont pas corrélés. Vérifier qu'un processus aléatoire normal satisfait à la condition (5) [comparer avec (7.99)].

6.3. Désignons par $B_1(\tau)$ et $B_2(\tau)$ les fonctions de corrélation des processus aux sorties des redresseurs linéaires à une alternance et à deux alternances, lorsque le processus $\xi(t)$ satisfaisant à la condition (5) est appliqué à leurs entrées. Montrer que l'on a

$$B_2(\tau) = 4B_1(\tau) - (1 + 2C_1)\, B_\xi(\tau), \tag{8}$$

où

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,(x - a_\xi)\, w_{1\xi}(x)\, dx. \tag{9}$$

Etudier le cas où la distribution de $\xi(t)$ est symétrique et vérifier que dans ce cas particulier [comparer avec (15) dans le problème 7.5] on a

$$B_2(\tau) = 4B_1(\tau) - B_\xi(\tau). \tag{10}$$

6.4. Montrer que la densité de probabilité unidimensionnelle du processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un limiteur symétrique de caractéristique

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant x_0, \\ -1, & x < x_0 \end{cases} \tag{11}$$

est

$$w_{1\zeta}(x) = [1 - F_1(x_0)]\,\delta(x - 1) + F_1(x_0)\,\delta(x + 1), \tag{12}$$

où $F_1(x)$ est la fonction de répartition du processus d'entrée.

Vérifier que la moyenne et la variance du processus à la sortie du limiteur sont respectivement

$$m_1\{\zeta\} = 1 - 2F_1(x_0), \tag{13}$$

$$M_2\{\zeta\} = 4F_1(x_0)\,[1 - F_1(x_0)]. \tag{14}$$

Chapitre 7

TRANSFORMATIONS NON LINÉAIRES D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

7.1. SOLUTION OBTENUE PAR LA MÉTHODE DIRECTE

7.1.1. Solution générale. Les processus aléatoires normaux (gaussiens) sont essentiels pour la majorité des applications de la théorie exposée dans cet ouvrage. C'est pourquoi nous allons donner un exposé systématique des transformations que subit un processus normal à la traversée des différents éléments des dispositifs radiotechniques actuels.

Nous avons déjà mentionné que le cas d'une transformation linéaire est assez simple car, à la traversée d'un système linéaire, un processus normal reste normal, seuls changent la fonction de corrélation et le spectre énergétique correspondant. Toutes les formules indispensables aux calculs se trouvent rassemblées aux §§ 5.2 et 5.4. Plus intéressant serait d'étudier le cas des transformations non linéaires d'un processus normal.

Dans ce chapitre nous nous limiterons essentiellement à l'étude des fonctions de corrélation et des spectres énergétiques des processus à la sortie des éléments non linéaires. Pour cela nous allons utiliser les méthodes générales mentionnées au § 6.1. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre on trouvera plusieurs exemples de calcul de la densité de probabilité d'un processus normal après transformation non linéaire (non inertielle).

Supposons qu'un processus aléatoire, somme d'un processus déterministe $S(t)$ (signal, par exemple) et d'un processus aléatoire normal $\xi(t)$ de moyenne nulle, soit appliqué à l'entrée d'un circuit non linéaire. La densité de probabilité bidimensionnelle de ce processus est (voir § 4.4.1)

$$w_2(x_1, x_2, t, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(x_1-a_1)^2 - 2R(x_1-a_1)(x_2-a_2) + (x_2-a_2)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}, \qquad (7.1)$$

où $a_1 = S(t)$, $a_2 = S(t+\tau)$; $R = R(\tau)$ étant le coefficient de corrélation et σ^2 la variance de la composante stationnaire du processus aléatoire.

En portant (7.1) dans (6.2) on obtient l'expression de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à la sortie d'un élément non linéaire de caractéristique $y = f(x)$ si à l'entrée on applique la

somme d'un signal déterministe et d'un processus aléatoire stationnaire:

$$B(\tau, t)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)\, f(x_2)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x_1-a_1)^2-2R\,(x_1-a_1)\,(x_2-a_2)+(x_2-a_2)^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\} dx_1\, dx_2. \qquad (7.2)$$

En remplaçant dans (7.2) x_1 par σx_1 et x_2 par σx_2 et en introduisant les désignations

$$s_1=\frac{a_1}{\sigma}=\frac{S(t)}{\sigma},\quad s_2=\frac{a_2}{\sigma}=\frac{S(t+\tau)}{\sigma},$$

on obtient l'expression de la fonction de corrélation

$$B(\tau, t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x_1)\, f(\sigma x_2)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x_1-s_1)^2-2R\,(x_1-s_1)\,(x_2-s_2)+(x_2-s_2)^2}{2\,(1-R^2)}\right\} dx_1\, dx_2. \qquad (7.3)$$

Pour le calcul de l'intégrale double dans (7.3) on peut utiliser la méthode indiquée au § 6.1.2.

La densité de probabilité unidimensionnelle correspondant à $w_2(\sigma x_1, \sigma x_2, t, \tau)$ est ici égale à

$$w_1(x_1, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_1-s_1)^2}{2}}. \qquad (7.4)$$

Si (7.4) est la fonction de pondération, les polynômes orthogonaux correspondant à cette fonction sont les polynômes d'Hermite $H_n(x_1-s_1)$ (voir annexe IV). Dans le cas d'une densité de probabilité bidimensionnelle normale le développement est *)

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\, e^{-\frac{(x_1-s_1)^2-2R\,(x_1-s_1)\,(x_2-s_2)+(x_2-s_2)^2}{2\,(1-R^2)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}H_n(x_1-s_1)\, H_n(x_2-s_2). \qquad (7.5)$$

Lorsque l'on compare (7.5) et (6.9) il ne faut pas oublier que les polynômes d'Hermite ne sont pas normés [voir (5) de l'annexe IV].

*) On peut facilement obtenir l'expression (7.5) en utilisant la représentation intégrale de la densité de probabilité bidimensionnelle normale à l'aide de la fonction caractéristique bidimensionnelle. En développant en série dans l'expression sous l'intégrale le facteur exponentiel, contenant le produit des variables, on peut écrire ces intégrales en fonction des polynômes d'Hermite.

On peut obtenir le développement (7.5) à partir de (6.9) en posant $Q_n(x, t) = \frac{H_n(x-s)}{n!}$, en vertu de (6.10) on a $a_n = n!\,R^n$.

Portons maintenant la série obtenue dans l'intégrale de l'expression (7.3), on a

$$B(\tau, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x_1) f(\sigma x_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} \times$$
$$\times H_n(x_1 - s_1) H_n(x_2 - s_2) e^{-\frac{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}{2}} dx_1\, dx_2.$$

En intervertissant l'ordre de la sommation et de l'intégration, et en remarquant qu'alors les variables se séparent on trouve

$$B(\tau, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n(\tau)}{n!} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x_1) H_n(x_1 - s_1) \times \right.$$
$$\left. \times e^{-\frac{(x_1-s_1)^2}{2}} dx_1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x_2) H_n(x_2 - s_2) e^{-\frac{(x_2-s_2)^2}{2}} dx_2 \right). \quad (7.6)$$

Introduisons la notation

$$c_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x) H_n(x - s) e^{-\frac{(x-s)^2}{2}} dx. \quad (7.7)$$

On peut alors, à partir de (7.6), obtenir l'expression cherchée de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire normal après transformation dans un élément non linéaire

$$B(\tau, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\, c_n(t+\tau) \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (7.8)$$

Comme dans le cas général la fonction de corrélation (7.8) dépend de t et de τ, il faut avant de commencer le calcul du spectre énergétique prendre la moyenne de cette fonction de corrélation sur le temps t

$$B^*(\tau) = \langle B(\tau, t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B(\tau, t)\, dt. \quad (7.9)$$

Dans la série (7.8) seuls les coefficients $c_n(t)$ sont des fonctions du temps, on a donc :

$$B^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(\tau) \frac{R^n(\tau)}{n!}, \quad (7.10)$$

où

$$c_n^*(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c_n(t)\, c_n(t+\tau)\, dt. \tag{7.11}$$

En prenant la transformée de Fourier de (7.10) on obtient l'expression explicite du spectre énergétique d'un processus aléatoire normal à la traversée d'un élément non linéaire

$$F(\omega) = 4 \int_0^\infty B^*(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau = 4 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_0^\infty c_n^*(\tau)\, R^n(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \tag{7.12}$$

7.1.2. Cas d'un processus d'entrée stationnaire et à bande étroite. Supposons que le processus normal n'ait pas de partie déterministe. On a alors $s \equiv 0$ et à partir de (7.8) on peut obtenir l'expression de la fonction de corrélation d'un processus à la sortie d'un élément non linéaire lorsque l'on applique un processus aléatoire normal stationnaire à son entrée, soit:

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^\infty c_n^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}, \tag{7.13}$$

où

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(\sigma x)\, H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{7.14}$$

Le premier terme de la série (7.13) correspond à la composante constante (partie discrète du spectre), et la somme des autres termes à la partie continue du spectre énergétique du processus aléatoire à la sortie d'un élément non linéaire.

Supposons que le spectre énergétique d'un processus stationnaire normal soit à bande étroite, c'est-à-dire qu'il soit concentré dans une bande relativement étroite de fréquences au voisinage de la pulsation ω_0, pour laquelle la densité spectrale est maximale et par rapport à laquelle on peut considérer le spectre comme symétrique. En vertu de (4.71) on peut écrire le coefficient de corrélation de ce processus aléatoire stationnaire à bande étroite sous la forme

$$R(\tau) = R_0(\tau) \cos \omega_0\tau, \tag{7.15}$$

où

$$R_0(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^\infty F^*(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega}{\int_{-\infty}^\infty F^*(\omega)\, d\omega}, \tag{7.15'}$$

$F^*(\omega)$ est le spectre du processus à bande étroite, déplacé dans le domaine des basses fréquences.

En portant (7.15) dans (7.13) on trouve

$$B(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \frac{R_0^n(\tau)}{n!} \cos^n \omega_0\tau. \tag{7.16}$$

Remplaçons les puissances des cosinus dans (7.16) par la somme des cosinus des arcs multiples conformément aux formules suivantes:

$$\cos^{2n} x=\frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1} 2\binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x+\binom{2n}{n}\right], \tag{7.17}$$

$$\cos^{2n-1} x=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x. \tag{7.18}$$

L'expression (7.16) de la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un système non linéaire sera alors

$$B(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}^2 \frac{\binom{2n}{n}}{(2n)!\,2^{2n}} R_0^{2n}(\tau)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} c_{2n-1}^2 \frac{\binom{2n-1}{k}}{(2n-1)!\,2^{2n-1}} R_0^{2n-1}(\tau)\cos(2n-2k-1)\omega_0\tau+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^2 \frac{\binom{2n}{n}}{(2n)!\,2^{2n-1}} R_0^{2n}(\tau)\cos 2(n-k)\omega_0\tau. \tag{7.19}$$

En introduisant la notation $r=n-k$ et en intervertissant l'ordre de l'intégration dans les doubles sommes on obtient

$$B(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}^2 \frac{\binom{2n}{n}}{(2n)!\,2^{2n}} R_0^{2n}(\tau)+$$
$$+\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}^2 \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}} R_0^{2n-1}(\tau)\right]\cos\omega_0\tau+$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}\left[\sum_{n=r}^{\infty} c_{2n-1}^2 \frac{\binom{2n-1}{n-r}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}} R_0^{2n-1}(\tau)\right]\cos(2r-1)\omega_0\tau+$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\left[\sum_{n=r}^{\infty} c_{2n}^2 \frac{\binom{2n}{n-r}}{(2n)!\,2^{2n-1}} R_0^{2n}(\tau)\right]\cos 2r\omega_0\tau. \tag{7.20}$$

Avec les notations

$$B_0(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}^2 \frac{\binom{2n}{n}}{(2n)!\,2^{2n}} R_0^{2n}(\tau), \tag{7.21}$$

$$B_{2r-1}(\tau)=\sum_{n=r}^{\infty} c_{2n-1}^2 \frac{\binom{2n-1}{n-r}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}} R_0^{2n-1}(\tau), \tag{7.22}$$

$$B_{2r}(\tau)=\sum_{n=r}^{\infty} c_{2n}^2 \frac{\binom{2n}{n-r}}{(2n)!\,2^{2n-1}} R_0^{2n}(\tau),\ r=1,\ 2,\ \ldots, \tag{7.23}$$

on peut écrire (7.20) sous la forme [comparer avec (6.28)]

$$B(\tau)=B_0(\tau)+B_1(\tau)\cos\omega_0\tau+$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty} B_{2r-1}(\tau)\cos(2r-1)\,\omega_0\tau+\sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}(\tau)\cos 2r\omega_0\tau. \tag{7.24}$$

En vertu du théorème de Wiener-Khintchine le spectre énergétique est égal à la transformée de Fourier de $B(\tau)$. En désignant par $F_r(\omega)$ la transformée de Fourier de chacun des termes de (7.24), c'est-à-dire en posant

$$F_r(\omega)=4\int_0^{\infty} B_r(\tau)\cos r\omega_0\tau\cos\omega\tau\,d\tau, \tag{7.25}$$

on obtient l'expression suivante pour le spectre énergétique d'un processus aléatoire à la sortie d'un système non linéaire (comparer avec (6.29) et fig. 6.1):

$$F(\omega)=F_0(\omega)+F_1(\omega)+\sum_{r=2}^{\infty} F_r(\omega). \tag{7.26}$$

Le premier terme dans (7.26) correspond à la partie basse fréquence du spectre énergétique (spectre vidéofréquences) du processus aléatoire à la sortie d'un élément non linéaire. Le deuxième terme correspond à la partie du spectre énergétique du processus de sortie disposée au voisinage de la pulsation ω_0, où se trouve également concentré le spectre du processus d'entrée. Les autres termes de (7.26) correspondent aux parties haute fréquence du spectre énergétique du processus à la sortie d'un élément non linéaire, disposées au voisinage des harmoniques de la pulsation ω_0.

En vertu de (7.21) à (7.23), pour calculer le spectre énergétique il y a lieu de trouver les transformées de Fourier inverses des puissances du coefficient de corrélation $R_0^k(\tau)$. Plus k est grand, plus petites sont les densités spectrales correspondant à $R_0^k(\tau)$ et plus large est la bande de fréquences occupée par le spectre. Pour des

grandes valeurs de k il est difficile de calculer les composantes du spectre énergétique correspondant à $R_0^k(\tau)$. Cependant la fonction $R_0^k(\tau)$ décroît très rapidement et on peut utiliser une approximation adéquate.

Soit l'intégrale $4\int_0^\infty R_0^k(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$. En remplaçant la variable $\tau\sqrt{k}$ par x et en conservant les deux premiers termes du développement de $R_0\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$ on obtient:

$$4\int_0^\infty R_0^k(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \approx \frac{4}{\sqrt{k}}\int_0^\infty \left(1+\frac{R_0''(0)}{2k}x^2\right)^k \cos\frac{\omega x}{\sqrt{k}}\,dx \approx$$

$$\approx \frac{4}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-[-R_0''(0)]\frac{x^2}{2}}\cos\frac{\omega x}{\sqrt{k}}\,dx = \frac{2}{\omega_*}\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\,e^{-\frac{\omega^2}{2k\omega_*^2}},$$

où $\omega_*^2 = -R_0''(0)$.

Pour un processus dont le spectre énergétique est uniforme dans la bande Δ [voir (5.45′) et (5.46′)] on a $R_0(\tau) = \frac{\sin\frac{\tau\Delta}{2}}{\frac{\tau\Delta}{2}}$ et $\omega_*^2 = \frac{\Delta^2}{12}$. Par conséquent

$$4\int_0^\infty R_0^k(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \approx \frac{4}{\Delta}\sqrt{\frac{6\pi}{k}}\,e^{-\frac{6\omega^2}{k\Delta^2}}.$$

Sur la figure 7.1 sont montrés les spectres énergétiques correspondant à $\left(\frac{\sin\frac{\tau\Delta}{2}}{\frac{\tau\Delta}{2}}\right)^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, 6$ construits d'après la formule approchée mentionnée.

7.1.3. Détecteur linéaire. Pour illustrer la méthode exposée ci-dessus étudions à titre d'exemple la transformation de la fonction de corrélation et du spectre énergétique d'un processus aléatoire normal stationnaire à la traversée d'un détecteur linéaire *) dont la caractéristique est

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad (7.27)$$

*) Ici et dans la suite on suppose que la détection est une transformation non linéaire et non inertielle. L action ultérieure des filtres doit être spécifiée.

(le facteur constant devant x est pris égal à l'unité, ce qui d'ailleurs importe peu, car il joue le rôle d'échelle et on peut toujours en tenir compte dans les résultats définitifs).

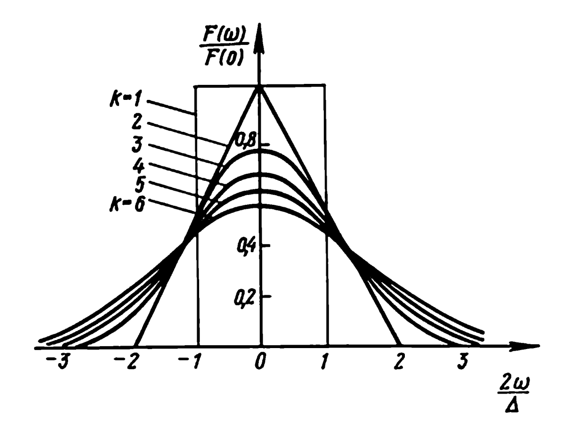


Fig. 7.1. Spectres des fonctions $\left(\frac{\sin\frac{\tau\Delta}{2}}{\frac{\tau\Delta}{2}}\right)^k$

On peut ici trouver les coefficients c_n de la série (7.13) à partir de l'intégrale

$$c_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$ on trouve immédiatement

$$c_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}, \tag{7.28}$$

$$c_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sigma}{2}. \tag{7.29}$$

Pour $n \geqslant 2$ en intégrant par parties on a

$$c_n = \frac{(-1)^n \sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n} dx = \frac{(-1)^{n+1}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{d^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-1}} dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{d^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{n-2}} \right|_0^\infty$$

ou

$$c_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} H_{n-2}(0). \qquad (7.30)$$

En portant (7.28) à (7.30) dans (7.13) on trouve

$$B(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2} R(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} H_{n-2}^2(0) \frac{R^n(\tau)}{n!}\right].$$

Mais comme (voir annexe IV)

$$H_{2k}(0) = (-1)^k (2k-1)!!, \quad H_{2k-1}(0) = 0,$$

la fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire normal ayant traversé un détecteur linéaire est

$$B(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2} R(\tau) + \frac{R^2(\tau)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{(2n)!} R^{2n}(\tau)\right]. \qquad (7.31)$$

Remarquons que la série (7.31) contient, en plus de la première puissance du coefficient de corrélation, seulement des puissances paires de $R(\tau)$. On peut prendre la somme de cette série, l'expression de la fonction de corrélation s'écrit alors

$$B(\tau) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left\{\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin R(\tau)\right] R(\tau) + \sqrt{1 - R^2(\tau)}\right\}. \qquad (7.32)$$

On trouve alors à partir de (7.32) la puissance moyenne du processus à la sortie d'un détecteur linéaire, soit:

$$B(0) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Le carré de la composante constante étant en vertu de (7.28) égal à

$$c_0^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi},$$

la variance du processus à la sortie d'un détecteur linéaire est alors

$$M_2 = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\pi - 1}{2\pi} \sigma^2 \approx 0{,}341\sigma^2. \qquad (7.32')$$

Notons qu'en se limitant, lors du calcul de la puissance moyenne, aux trois premiers termes du développement (7.31) on a

$$B(0) \approx \sigma^2 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi}\right),$$

d'où

$$M_2 \approx \sigma^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi}\right) = \frac{\pi + 1}{4\pi} \sigma^2 \approx 0{,}329\sigma^2,$$

ce qui ne diffère de l'expression exacte (7.32′) que de 3 %.

Si le spectre énergétique d'un processus normal stationnaire est concentré dans une bande relativement étroite de fréquences au voisinage de ω_0, de telle sorte que le coefficient de corrélation $R(\tau)$ de ce processus satisfait à la formule (7.15), on a en vertu de (7.24) et (7.30)

$$B(\tau)=B_0(\tau)+\frac{\sigma^2}{4}R_0(\tau)\cos\omega_0\tau+\sum_{r=1}^{\infty}B_{2r}(\tau)\cos 2r\omega_0\tau, \qquad (7.33)$$

où

$$B_0(\tau)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left[1+\frac{R_0^2(\tau)}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)!!]^2\binom{2n}{n}}{(2n)!\,2^{2n}}R_0^{2n}(\tau)\right], \qquad (7.34)$$

$$B_{2r}(\tau)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2\binom{2n}{n-r}}{(2n)!\,2^{2n-1}}R_0^{2n}(\tau). \qquad (7.35)$$

La série (7.34) qui est l'expression de la fonction $B_0(\tau)$ peut être sommée, la somme s'expimant alors en fonction des intégrales elliptiques complètes de première K (R_0) et de seconde E (R_0) espèces *)

$$B_0(\tau)=\frac{\sigma^2}{\pi^2}[2\mathrm{E}(R_0)-$$
$$-(1-R_0^2)\mathrm{K}(R_0)]. \qquad (7.36)$$

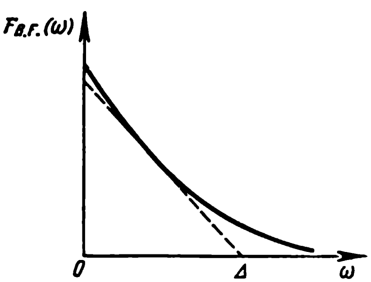


Fig. 7.2. Spectre basse fréquence d'un processus aléatoire à la traversée d'un détecteur linéaire

Après transformation de Fourier de la fonction $B_0(\tau)$ on obtient la partie basse fréquence du spectre énergétique du processus à la sortie d'un détecteur linéaire. Le premier terme du développement (7.34) donne une raie discrète pour $\omega=0$, correspondant à la composante constante, la somme des transformées de Fourier des puissances paires du coefficient de corrélation donne le spectre continu.

Sur la figure 7.2 on trouvera le spectre continu basse fréquence du processus à la sortie d'un détecteur linéaire pour le cas où le spectre énergétique du processus aléatoire normal stationnaire d'entrée est uniforme dans une bande de largeur Δ. La série suivant

*) L'expression entre crochets dans le second membre de (7.36) n'est autre chose que la fonction hypergéométrique

$$\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ R_0^2\right)$$

(voir annexe V).

les puissances de R_0 dans (7.34) converge si rapidement que pratiquement pour le calcul du spectre on peut se limiter au terme R_0^2. Dans ce cas la partie basse fréquence du spectre continu aura la forme d'un triangle rectangle de base Δ. Ce spectre approché est donné sur la figure 7.2 en pointillé (comparer avec la figure 7.1). En comparant avec le spectre réel, on voit que l'approximation est tout à fait convenable. Le rapport des aires du spectre continu exact et du spectre approché (c'est-à-dire des puissances concentrées dans le domaine des basses fréquences) est égal à 1,1 et la puissance spectrale pour $\omega = 0$ (le temps de corrélation) pour le spectre exact est de 6 % supérieure à celle du spectre approché. A la différence du spectre approché, le spectre basse fréquence exact contient des fréquences au-delà de Δ, mais leur intensité est insignifiante.

Le second terme $\frac{\sigma^2}{4} R_0(\tau) \cos \omega_0\tau$ de l'expression (7.33) est la reproduction fidèle (à un facteur constant près) à la sortie d'un détecteur linéaire du spectre d'un processus aléatoire normal stationnaire.

Les termes successifs $B_{2r}(\tau) \cos 2r\omega_0\tau$ dans l'expression (7.33) correspondent aux parties haute fréquence du spectre énergétique à la sortie d'un détecteur linéaire, se trouvant au voisinage des harmoniques pairs de la pulsation ω_0. Le temps de corrélation et, donc, les densités spectrales du spectre pour $\omega = 2r\omega_0$ décroissent rapidement au fur et à mesure de l'augmentation du numéro $2r$ de l'harmonique, car dans l'expression pour $B_{2r}(\tau)$ [voir (7.35)] la plus petite des puissances de $R_0(\tau)$ est égale à $2r$. Les aires (puissances) des spectres continus, concentrés au voisinage des harmoniques de ω_0, décroissent en raison inverse de $\Gamma^2\left(2r + \frac{3}{2}\right)$.

7.1.4. Approximation des caractéristiques non linéaires par des séries de puissances. Soit $f(x)$ une fonction donnant une représentation analytique de la caractéristique d'un élément non linéaire. Supposons que cette fonction soit continue de même que ses dérivées, et qu'elle puisse être développée en série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0). \tag{7.37}$$

Souvent (par exemple dans le cas d'un détecteur à deux alternances) la caractéristique non linéaire $f(x)$ peut être approchée par un polynôme de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m, \tag{7.38}$$

dont les coefficients doivent être égaux aux coefficients respectifs de la série (7.37).

Avec une telle approximation il est facile, dans le cas général, de trouver les coefficients c_n de la série (7.8). Ces coefficients peuvent

être obtenus à partir de l'intégrale (7.7). Dans le cas qui nous intéresse nous avons *)

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu \sigma^\nu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu H_n(x-s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{2}}\, dx. \qquad (7.39)$$

L'intégrale dans (7.39) est facile à calculer si la fonction sous l'intégrale se présente comme la dérivée par rapport au paramètre s. On a alors **)

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sigma^\nu \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu e^{-\frac{(x-s)^2}{2}}\, dx\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sigma^\nu \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+s)^\nu e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu} a_\nu \sigma^\nu \binom{\nu}{k} M_{\nu-k} \frac{d^n s^k}{ds^n},$$

où $M_{\nu-k}$ est le moment d'ordre $(\nu - k)$ de la distribution normale de variance unité et de moyenne nulle. En dérivant par rapport à s et en utilisant (3.114) on trouve

$$c_n = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+r} \sigma^{k+r} \binom{k+r}{k} \frac{k!}{(k-n)!} M_r s^{k-n} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+2r} \sigma^{k+2r} \binom{k+2r}{k} \frac{k!}{(k-n)!} (2r-1)!!\, s^{k-n}$$

ou après changement de l'indice de sommation ***)

$$c_n = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n+l+2r} \sigma^{n+l+2r} \binom{n+l+2r}{n+l} \frac{(n+l)!\,(2r-1)!!\, s^l}{l!}. \qquad (7.40)$$

*) En fait, la somme sur ν n'aura qu'un nombre restreint de termes. Ceci signifie que les coefficients a_ν à partir d'une certaine valeur $\nu = m + 1$ seront nuls. Afin de conserver la généralité, la somme est prise pour toutes les valeurs positives de ν.

**) Remarquons que $c_n = \frac{d^n c_0}{ds^n}$ ou $c_1 = \frac{dc_0}{ds}$, $c_2 = \frac{dc_1}{ds}$, ..., $c_n = \frac{dc_{n-1}}{ds}$, c'est-à-dire que chaque coefficient s'obtient par dérivation du précédent par rapport à s.

***) La formule (7.40) est à utiliser pour $n = 0$, les autres coefficients c_n pour $n \geqslant 1$ sont obtenus par dérivations successives, donc $\frac{dc_{n-1}}{ds} = c_n$.

Il ne faut pas oublier que pour $r = 0$ on a par convention $(2r-1)!! = 1$. Puis il y a lieu de prendre la moyenne du produit $c_n(t) \times c_n(t+\tau)$ sur le temps. En introduisant la notation

$$b_{l_1 l_2}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\sigma^{l_1+l_2} T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^{l_1}(t) S^{l_2}(t+\tau)\, dt, \tag{7.41}$$

on peut, à partir de (7.10) et (7.40), trouver la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un élément linéaire, il vient

$$B^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} a_{n+l_1+2r_1} a_{n+l_2+2r_2} \sigma^{2n+l_1+l_2+2(r_1+r_2)} \times$$
$$\times \binom{n+l_1+2r_1}{n+l_1} \binom{n+l_2+2r_2}{n+l_2} \frac{(n+l_1)!\,(n+l)!\,(2r_1-1)!!\,(2r_2-1)!!}{l_1!\,l_2!\,n!} \times$$
$$\times b_{l_1 l_2}(\tau) R^n(\tau). \tag{7.42}$$

Les termes avec $n = 0$ correspondent à la partie discrète du spectre énergétique (en tant que transformée de Fourier), les termes avec $n > 0$ se rapportant à la partie continue.

Si un processus normal n'a pas de terme déterministe, on voit disparaître dans (7.42) tous les termes à l'exception de ceux qui correspondent à $l_1 = l_2 = 0$. On trouve alors à partir de (7.42) l'expression suivante pour la fonction de corrélation d'un processus aléatoire normal stationnaire ayant traversé un système non linéaire dont la caractéristique est approchée par un polynôme, soit:

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n(\tau) \sum_{r_1=0}^{\infty} \sum_{r_2=0}^{\infty} a_{n+2r_1} a_{n+2r_2} \sigma^{2n+2r_1+2r_2} \times$$
$$\times \binom{n+2r_1}{n} \binom{n+2r_2}{n} (2r_1-1)!!\,(2r_2-1)!!\,n!,$$

et comme les sommes en r_1 et r_2 se séparent, on a

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, R^n(\tau) \Big[\sum_{r=0}^{\infty} a_{n+2r} \sigma^{n+2r} \binom{n+2r}{n} (2r-1)!! \Big]^2. \tag{7.43}$$

Ecrivons les premiers termes de la somme (7.43), en négligeant les coefficients a_n pour $n > 5$:

$$\begin{aligned} B(\tau) = {} & [a_0 + a_2\sigma^2 + 3a_4\sigma^4 + \ldots]^2 + \\ & + R(\tau)\,[a_1\sigma + 3a_3\sigma^3 + 15a_5\sigma^5 + \ldots]^2 + \\ & + 2R^2(\tau)\,[a_2\sigma^2 + 6a_4\sigma^4 + \ldots]^2 + \\ & + 6R^3(\tau)\,[a_3\sigma^3 + 10a_5\sigma^5 + \ldots]^2 + \\ & + 24R^4(\tau)\,[a_4\sigma^4 + \ldots]^2 + 120R^5(\tau)\,[a_5\sigma^5 + \ldots]^2. \end{aligned} \tag{7.44}$$

Dans l'expression (7.44) la première ligne donne la puissance de la composante constante, la seconde correspond à la reproduction non déformée à la sortie de l'élément non linéaire du spectre énergétique d'entrée, les termes suivants sont des superpositions des déformations non linéaires du spectre initial du premier, du second, du troisième ordre et d'ordres plus élevés.

7.1.5. Approximation parabolique. Nous allons étudier plus en détail le cas où la caractéristique non linéaire est approchée par une parabole:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{7.45}$$

On obtient alors à partir de (7.40)

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma s + a_2\sigma^2 s^2, \\ c_1 &= a_1\sigma + 2a_2\sigma^2 s, \\ c_2 &= 2a_2\sigma^2, \\ c_n &\equiv 0 \text{ pour } n \geqslant 3, \end{aligned} \tag{7.46}$$

où $s = \frac{S(t)}{\sigma}$.

Introduisons les notations

$$A_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\, dt, \tag{7.47}$$

$$W_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)\, dt, \tag{7.48}$$

$$B_s(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\, S(t+\tau)\, dt, \tag{7.49}$$

$$B_{s,s^2}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)\, S^2(t+\tau)\, dt, \tag{7.50}$$

$$B_{s^2}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)\, S^2(t+\tau)\, dt. \tag{7.51}$$

La grandeur A_s représente la composante constante de la partie déterministe du processus, et la grandeur W_s sa puissance moyenne. Les grandeurs $B_s(\tau)$, $B_{s^2}(\tau)$ et $B_{s,s^2}(\tau)$ sont respectivement les fonctions de corrélation temporelles du processus $S(t)$, de son carré $S^2(t)$ et la fonction de corrélation mutuelle des processus $S(t)$ et $S^2(t)$.

Avec les notations ci-dessus on peut présenter sous la forme suivante l'expression de la fonction de corrélation du processus aléatoire obtenu après transformation quadratique d'un processus normal [voir (7.42)] :

$$\begin{aligned} B^*(\tau) = (a_0 + a_2\sigma^2)\,(a_0 + a_2\sigma^2 + 2a_1A_s + \\ + 2a_2W_s) + a_1^2B_s(\tau) + 2a_1a_2B_{s,s^2}(\tau) + \\ + a_2^2B_{s^2}(\tau) + \sigma^2\,[a_1^2 + 4a_1a_2A_s + 4a_2^2B_s(\tau)] \times \\ \times R(\tau) + 2a_2^2\sigma^4R^2(\tau). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Chaque terme de (7.52) a une interprétation physique évidente. La première ligne donne la puissance de la composante constante, la seconde correspond à la partie discrète, et la dernière à la partie continue du spectre.

La composante constante provient tant de la partie déterministe que de la partie aléatoire du processus d'entrée; dans la composante constante la fraction $2a_0(a_1A_s + a_2W_s)$ correspond à la partie déterministe et $(a_0 + a_2\sigma^2)^2$ à la partie aléatoire. De plus, la composante constante contient la valeur moyenne de la puissance des battements entre les composantes des parties déterministe et aléatoire du processus normal. Cette dernière est égale à $2a_2\sigma^2(a_1A_s + a_2W_s)$.

Le spectre discret, après transformation quadratique reproduit le spectre discret d'entrée [terme $a_1^2B_s(\tau)$] et contient également les harmoniques combinatoires des battements entre les composantes de la partie déterministe du processus normal [termes suivants dans la seconde ligne de la formule (7.52)].

Le spectre continu après transformation quadratique reproduit le spectre continu d'entrée (terme $a_1^2\sigma^2R(\tau)$), auquel s'ajoutent les harmoniques combinatoires des battements entre les composantes de la partie aléatoire (terme $2a_2^2\sigma^4R^2(\tau)$) et entre les composantes des parties déterministe et aléatoire [termes suivants de la dernière ligne de la formule (7.52)].

7.1.6. Détection quadratique à deux alternances de la somme d'un signal modulé en amplitude et d'un bruit normal. Supposons que la partie déterministe d'un processus aléatoire normal soit un signal modulé en amplitude

$$S(t) = u(t)\cos\omega_0 t, \quad (7.53)$$

l'harmonique le plus élevé dans le spectre de l'enveloppe $u(t)$ est bien inférieur à la pulsation porteuse ω_0.

Supposons que la composante aléatoire stationnaire du processus normal soit un bruit dont le spectre énergétique est concentré dans une bande relativement étroite de fréquences au voisinage de la même pulsation ω_0. Le coefficient de corrélation $R(\tau)$ du bruit peut alors s'écrire sous la forme (7.15). Nous allons utiliser les résultats du paragraphe précédent pour étudier la détection d'un signal modulé en amplitude en présence d'un bruit. Il va de soi que pour dégager l'enveloppe basse fréquence du signal radio, le détecteur doit, en plus d'un élément non linéaire, avoir un filtre laissant passer les composantes basse fréquence et supprimant les composantes haute fréquence.

Considérons tout d'abord la transformation non linéaire d'un signal en présence d'un bruit, supposant, pour simplifier les raisonnements, que la caractéristique non linéaire du détecteur est une parabole $y = a_2x^2$. Le coefficient a_2 peut être pris égal à l'unité, car il joue le rôle d'échelle et on peut toujours en tenir compte dans les résultats définitifs.

En vertu de (7.52), pour $a_0 = a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, on a *)

$$B^*(\tau) = \sigma^4 + 2\sigma^2 W_s + B_{s2}(\tau) + \\ + 4\sigma^2 B_s(\tau) R(\tau) + 2\sigma^4 R^2(\tau). \qquad (7.54)$$

Nous allons maintenant calculer les grandeurs W_s, B_s et B_{s2} pour un signal modulé en amplitude. En portant (7.53) dans (7.48), (7.49) et (7.51) on trouve respectivement

$$W_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t) \cos^2 \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\, dt + \\ + \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t) \cos 2\omega_0 t \, dt; \qquad (7.55)$$

*) En l'absence de signal utile on a $B(\tau) = \sigma^4 + 2\sigma^4 R^2(\tau)$, donc le coefficient de corrélation du bruit après détection quadratique est égal à $\frac{B(\tau) - \sigma^4}{2\sigma^4} = R^2(\tau)$, c'est-à-dire au carré du coefficient de corrélation du bruit à l'entrée du détecteur.

$$B_s(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,u(t+\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,u(t+\tau)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,u(t+\tau)\cos 2\omega_0\left(t+\frac{\tau}{2}\right)dt; \qquad (7.56)$$

$$B_{s^2}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\cos^2\omega_0 t\cos^2\omega_0(t+\tau)\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\,[1+\cos 2\omega_0 t+\cos 2\omega_0(t+\tau)+$$

$$+\cos 2\omega_0 t\cos 2\omega_0(t+\tau)]\,dt=\frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\,[\cos 2\omega_0 t+\cos 2\omega_0(t+\tau)]\,dt+$$

$$+\frac{1}{8}\cos 2\omega_0\tau\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\,dt+$$

$$+\frac{1}{8}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\cos 4\omega_0\left(t+\frac{\ }{2}\right)dt. \qquad (7.57)$$

Dans l'hypothèse faite sur le spectre de l'enveloppe du signal, un certain nombre de termes dans les expressions ci-dessus sont nuls.

Dans (7.55), c'est le second terme qui s'annule, par conséquent

$$W_s = \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,dt = \frac{W_1}{2}, \qquad (7.58)$$

où W_1 est la puissance moyenne du signal $u(t)$ de modulation.

Dans (7.56) le second terme s'annule également, il vient

$$B_s(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_0\tau \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,u(t+\tau)\,dt = \frac{1}{2} B_u(\tau) \cos \omega_0\tau, \quad (7.59)$$

où $B_u(\tau)$ est la fonction de corrélation temporelle du signal modulateur avec de plus $B_u(0) = W_1$.

Dans (7.57) le second et le quatrième termes sont nuls, il reste donc

$$B_{s^2}(\tau) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\,\omega_0\tau\right) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)\,u^2(t+\tau)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0\tau\right) B_{u^2}(\tau), \qquad (7.60)$$

où $B_{u^2}(\tau)$ est la fonction de corrélation temporelle du carré du signal de modulation.

En portant (7.58) à (7.60) dans (7.54) on trouve

$$B^*(\tau) = \sigma^4 + \sigma^2 B_u(0) + \frac{1}{4} B_{u^2}(\tau) + \sigma^2 B_u(\tau) R_0(\tau) + \sigma^4 R_0^2(\tau) +$$

$$+ \left[\frac{1}{8} B_{u^2}(\tau) + \sigma^2 B_u(\tau) R_0(\tau) + \sigma^4 R_0^2(\tau)\right] \cos 2\omega_0\tau, \quad (7.61)$$

où $R_0(\tau)$ est lié par la relation (6.58) au spectre énergétique du bruit à l'entrée du détecteur quadratique.

En l'absence de signal, il vient en vertu de (7.61)

$$B(\tau) = \sigma^4 [1 + R_0^2(\tau) + R_0^2(\tau) \cos 2\omega_0\tau]. \qquad (7.62)$$

A la différence d'un détecteur linéaire [voir (7.33)] pour lequel la fonction de corrélation du bruit de sortie s'exprime par une série infinie suivant les puissances du coefficient de corrélation $R_0(\tau)$, la fonction de corrélation du bruit à la sortie d'un détecteur quadratique ne contient pas de puissances de $R_0(\tau)$ supérieures à la seconde.

En utilisant les expressions obtenues pour la fonction de corrélation et en effectuant la transformation de Fourier on trouve le spectre énergétique correspondant.

En vertu de (7.62) la moyenne et la variance du bruit à la sortie d'un détecteur quadratique sont

$$a_{\xi^2} = \sigma^2, \quad \sigma^2_{\xi^2} = 2\sigma^4. \tag{7.63}$$

7.2. SOLUTION OBTENUE PAR LA MÉTHODE DES INTÉGRALES CURVILIGNES

7.2.1. Solution générale. Supposons que la caractéristique $y = f(x)$ d'un système non linéaire puisse être représentée par une intégrale du type (6.16) et écrivons sous la forme (6.18) la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à la sortie d'un élément non linéaire, à l'entrée duquel on applique un processus aléatoire normal.

En portant dans (6.18) l'expression de la fonction caractéristique bidimensionnelle d'un processus aléatoire normal [voir (4.164)] on obtient

$$B(\tau, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \int_{C_2} g(iu_1) g(iu_2) e^{i(a_1u_1+a_2u_2)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(u_1^2+2Ru_1u_2+u_2^2)} du_1 du_2. \tag{7.64}$$

Dans l'intégrale (7.64) seul le terme $e^{i(a_1u_1+a_2u_2)}$ contient les grandeurs $a_1 = S(t)$ et $a_2 = S(t+\tau)$ dépendant du temps. C'est pourquoi lorsque l'on prend la moyenne sur le temps de la fonction de corrélation $B(\tau, t)$ seul ce terme intervient. En introduisant les désignations

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i[S(t)u_1+S(t+\tau)u_2]} dt, \tag{7.65}$$

on trouve, à partir de (7.64), l'expression suivante pour la fonction de corrélation moyenne d'un processus aléatoire à la sortie d'un élément non linéaire

$$B^*(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} \int_{C_2} g(iu_1) g(iu_2) \Theta_s(u_1, u_2, \tau) e^{-\frac{\sigma^2}{2}(u_1^2+2Ru_1u_2+u_2^2)} du_1 du_2. \tag{7.66}$$

Supposons que la composante déterministe $S(t)$ du processus soit une fonction périodique du temps de période T que l'on peut écrire sous la forme d'une série de Fourier, soit

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi n}{T} t.$$

Remarquant que dans notre cas la moyenne de (7.65) peut être prise pour une période, on obtient l'expression suivante pour la fonction $\Theta_s(u_1, u_2, \tau)$:

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp\left\{ i \sum_{n=0}^{\infty} \left[u_1 A_n \cos\frac{2\pi n t}{T} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u_2 A_n \cos\frac{2\pi n (t+\tau)}{T} \right]\right\} dt.$$

En introduisant une nouvelle variable $v = \frac{2\pi t}{T}$ et en mettant en facteur la composante constante A_0, on trouve

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = e^{iA_0(u_1+u_2)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[u_1 \cos nv + u_2 \cos\left(nv + \frac{2\pi n\tau}{T}\right) \right]\right\} dv. \quad (7.67)$$

En effectuant sous le signe de la somme des transformations élémentaires on obtient

$$u_1 \cos nv + u_2 \cos\left(nv + \frac{2\pi n\tau}{T}\right) =$$

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\frac{2\pi n\tau}{T}} \cos(nv + \varphi_n),$$

ici l'angle de phase φ_n ne dépend pas de v. On peut maintenant écrire (7.67) sous la forme suivante:

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = e^{i(u_1+u_2)A_0} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\frac{2\pi n\tau}{T}} \cos(nv + \varphi_n)\right\} dv. \quad (7.68)$$

Avec les notations

$$x_n = A_n \cos\varphi_n \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\frac{2\pi n\tau}{T}},$$

$$y_n = A_n \sin\varphi_n \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos\frac{2\pi n\tau}{T}}, \quad (7.69)$$

on peut écrire (7.68) comme suit:

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = e^{i(u_1+u_2)A_0} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} (x_n \cos nv - y_n \sin nv)\right\} dv. \quad (7.70)$$

Etudions plus en détail le cas d'un signal harmonique $S(t) = a\cos\frac{2\pi t}{T}$. Il vient de (7.70)

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = J_0(x_1) = J_0\left(a\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\frac{2\pi\tau}{T}}\right). \qquad (7.71)$$

Utilisant le théorème d'addition connu de la théorie des fonctions de Bessel on peut écrire (7.71) sous la forme d'une série [comparer avec (17) du problème 4.9]:

$$\Theta_s(u_1, u_2, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_n(au_1) J_n(au_2) \cos\frac{2\pi n\tau}{T}, \qquad (7.72)$$

où $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ pour $n \geqslant 1$.

Si maintenant on porte (7.72) dans (7.66) et si l'on effectue en outre le développement en série du facteur $e^{-\sigma^2 Ru_1u_2}$

$$e^{-\sigma^2 Ru_1u_2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma^{2k}R^k}{k!} u_1^k u_2^k, \qquad (7.73)$$

on peut, dans l'intégrale double (7.66), séparer les variables d'intégration et écrire la fonction de corrélation $B^*(\tau)$ sous la forme suivante

$$B^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k}\varepsilon_n \frac{\sigma^{2k}R^k(\tau)}{k!}\cos\frac{2\pi n\tau}{T} \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} g(iu_1)\, u_1^k J_n(au_1) e^{-\frac{\sigma^2 u_1^2}{2}}\, du_1 \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{C_2} g(iu_2)\, u_2^k J_n(au_2)\, e^{-\frac{\sigma^2 u_2^2}{2}}\, du_2.$$

Avec la notation

$$h_{nk} = \frac{i^{n+k}}{2\pi}\int_C g(iu)\, u^k J_n(au)\, e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}\, du, \qquad (7.74)$$

on obtient finalement

$$B^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \sigma^{2k}}{k!} R^k(\tau)\, h_{nk}^2 \cos\frac{2\pi n\tau}{T}. \qquad (7.74')$$

Dans la somme (7.74′) le groupe de termes pour lesquels $k = 0$ correspond à la partie discrète du spectre énergétique. La grandeur h_{n0}^2 est égale à l'intensité de la composante discrète de ce spectre pour la fréquence $\frac{2\pi n}{T}$. Les autres termes avec $k \neq 0$ correspondent à la partie continue du spectre.

Si dans (7.74) on pose $a = 0$, on obtient la formule de la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un élément non linéaire à l'entrée duquel agit un processus aléatoire normal stationnaire. On a alors $h_{nk} = 0$ pour $n > 0$ et

$$B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}}{k!} R^k(\tau) h_{0k}^2, \tag{7.75}$$

où

$$h_{0k} = \frac{i^k}{2\pi} \int_C g(iu) u^k e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} du. \tag{7.76}$$

Remarquons que, si l'on remplace dans (7.76) $g(iu)$ par sa transformée intégrale (6.17) et si l'on utilise la relation

$$\frac{i^k}{2\pi} \int_C u^k e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} e^{-ixu} du = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_C e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} e^{-iux} du \right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{d^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{dx^k} = \frac{1}{\sigma^{k+1} \sqrt{2\pi}} H_k\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{7.77}$$

on voit que la grandeur $\sigma^k h_{0k}$ dans le développement (7.75) est égale au coefficient c_n du développement (7.13) obtenu par la méthode directe.

La relation (7.74') montre que, pour calculer, après transformation non linéaire, le spectre énergétique de la somme d'un signal périodique et d'un processus aléatoire normal stationnaire, il suffit de calculer la transformée de Fourier des puissances du coefficient de corrélation du processus d'entrée et les intégrales (7.74) qui dépendent de la caractéristique $g(iu)$ de la non-linéarité.

7.2.2. Cas d'un processus stationnaire à bande étroite. Supposons que le spectre énergétique de la partie stationnaire d'un processus normal soit concentré dans une bande étroite de fréquences au voisinage de la pulsation porteuse $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ du signal. Le coefficient de corrélation $R(\tau)$ peut alors s'écrire comme $R_0(\tau) \cos \omega_0 \tau$ [voir (7.15)] et en vertu de (7.74') on obtient

$$B^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \sigma^{2k}}{k!} R_0^k(\tau) h_{nk}^2 \cos^k \omega_0 \tau \cos n\omega_0 \tau. \tag{7.78}$$

En remplaçant les puissances des cosinus par la somme des cosinus des arcs multiples conformément aux formules (7.17) et (7.18) et effectuant des transformations analogues à celles du § 7.1.2, on

peut facilement arriver à une expression analogue à (7.24):

$$B^*(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n h_{n0}^2\cos n\omega_0\tau+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n B_n(\tau)\cos n\omega_0\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon_n B_{2r-1,\,n}(\tau)\left[\cos(n+2r-1)\,\omega_0\tau+\cos(n-2r+1)\,\omega_0\tau\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon_n B_{2r,\,n}(\tau)\left[\cos(n+2r)\,\omega_0\tau+\cos(n-2r)\,\omega_0\tau\right], \quad (7.79)$$

où

$$B_n(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^{4k}}{(2k)!}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}h_{n,\,2k}^2R_0^{2k}(\tau); \quad (7.80)$$

$$B_{2r-n,\,n}(\tau)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\sigma^{4k-2}}{(2k-1)!}\frac{\binom{2k-1}{k-r}}{2^{2k-2}}h_{n,\,2k-1}^2R_{0(\tau)}^{2k-1}; \quad (7.81)$$

$$B_{2r,\,n}(\tau)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\sigma^{4k}}{(2k)!}\frac{\binom{2k}{k-r}}{2^{2k-1}}h_{n,\,2k}^2R_0^{2k}(\tau). \quad (7.82)$$

Le spectre énergétique à la sortie d'un système non linéaire peut être obtenu par transformation de Fourier de $B^*(\tau)$. La partie discrète de ce spectre correspond à la première somme de (7.79), les autres termes de cette expression donnant la partie continue.

7.2.3. Détecteur à une alternance de puissance ν. Soit un détecteur à une alternance dont la caractéristique est *):

$$f(x)=\begin{cases}\alpha_0(x-x_0)^\nu, & x\geqslant x_0,\ \nu>0,\\ 0, & x<x_0.\end{cases} \quad (7.83)$$

La fonction $g(iu)$ correspondant à $f(x)$ est égale à $\frac{\alpha_0\Gamma(\nu+1)}{(iu)^{\nu+1}}e^{-iux_0}$ et le contour C coïncide avec l'axe réel, ne contournant que l'origine des coordonnées suivant un demi-cercle du demi-plan inférieur (fig. 7.3). Les coefficients (7.74) s'expriment alors par des intégrales de la forme

$$h_{nk}=i^{n+k-\nu-1}\frac{\alpha_0\Gamma(\nu+1)}{2\pi}\int_C u^{k-\nu-1}J_n(au)\,e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}e^{-ix_0u}\,du. \quad (7.84)$$

*) On peut évidemment présenter cette caractéristique comme la somme de deux caractéristiques du type (7.83) : $f_1(x)+f_2(-x)$, alors la méthode des intégrales curvilignes peut être étendue au cas de la détection à deux alternances.

On peut calculer les intégrales (7.84) en développant e^{-ix_0u} et $J_n(au)$ suivant les puissances de u. Après la substitution $\xi = u^2$ le problème se réduit au calcul des intégrales curvilignes

$$\int\limits_{C^*} \xi^{z-1} e^{-\xi}\, d\xi,$$

coïncidant simplement avec la représentation intégrale de la fonction gamma (voir, par exemple, M. Lavrentiev, B. Chabat. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, 1972, éd. «Mir»).

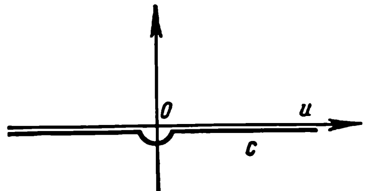


Fig. 7.3. Circuit d'intégration

Pour un processus aléatoire normal stationnaire ($a = 0$) les grandeurs $h_{nk} = 0$ pour $n > 0$, et pour $n = 0$, en vertu de (7.84) et (7.77), elles sont égales à

$$h_{0k} = i^{k-\nu-1} \frac{\alpha_0 \Gamma(\nu+1)}{2\pi} \int\limits_C u^{k-\nu-1} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} e^{-ix_0 u}\, du$$

et pour $k \geqslant \nu + 1$ à

$$h_{0k} = \frac{\alpha_0}{\sigma^{k-\nu}\sqrt{2\pi}} H_{k-\nu-1}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{7.85}$$

7.2.4. Limiteur parfait d'un bruit normal stationnaire. A titre d'exemple illustrant l'application de la méthode des intégrales curvilignes considérons la fonction de corrélation et le spectre énergétique d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle, ayant traversé un limiteur parfait, dont la caractéristique est un cas particulier de (7.83) pour $\nu = 0$, soit

$$y = f(x) = \begin{cases} \alpha_0, & x \geqslant x_0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases} \tag{7.86}$$

En vertu de (7.85) si $\nu = 0$ on trouve pour $k \geqslant 1$

$$h_{0k} = \frac{\alpha_0}{\sigma^k \sqrt{2\pi}} H_{k-1}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{7.87}$$

Le terme donnant la composante constante correspond à $k = 0$. Il est égal à (comparer avec (13) du problème 6.4)

$$h_{00} = \alpha_0 \left[1 - F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\right], \tag{7.88}$$

où

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

En portant (7.87) et (7.88) dans (7.75) on obtient l'expression de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire normal stationnaire à la sortie d'un limiteur parfait

$$B(\tau)=\alpha_0^2\left[1-F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\right]^2+\frac{\alpha_0^2}{2\pi}e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2}}\sum_{k=1}^{\infty}H_{2k-1}^2\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\frac{R^k(\tau)}{k!}. \quad (7.89)$$

Pour $x_0 = 0$ compte tenu de la formule (8) de l'annexe IV on a

$$B(\tau)=\frac{\alpha_0^2}{4}\left\{1+\frac{2}{\pi}\left[R(\tau)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{[(2r-1)!!]^2}{(2r+1)!}R^{2r+1}(\tau)\right]\right\}$$

ou, en prenant la somme de la série, on obtient *)

$$B(\tau)=\frac{\alpha_0^2}{4}\left[1+\frac{2}{\pi}\arcsin R(\tau)\right]. \quad (7.90)$$

Si à l'entrée d'un limiteur parfait on applique un processus aléatoire normal stationnaire dont le spectre énergétique se trouve concentré dans une bande étroite au voisinage de ω_0, on peut en utilisant (7.79) à (7.82), (7.87) et (7.88) calculer la fonction de corrélation du processus à la sortie de ce limiteur parfait, soit:

$$B(\tau)=\alpha_0^2\left[1-F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\right]^2+$$
$$+\frac{\alpha_0^2}{2\pi}e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}H_{2k-1}^2\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\frac{\binom{2k}{k}}{(2k)!\,2^{2k}}R_0^{2k}(\tau)+\right.$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\left[\sum_{k=r}^{\infty}H_{2k-2}^2\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\frac{\binom{2k-1}{k-r}}{(2k-1)!\,2^{2k-2}}R_0^{2k-1}(\tau)\right]\cos(2r-1)\omega_0\tau+$$
$$\left.+\sum_{r=1}^{\infty}\left[\sum_{k=r}^{\infty}H_{2k-1}^2\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\frac{\binom{2k}{k-r}}{(2k)!\,2^{2k-1}}R_0^{2k}(\tau)\right]\cos 2r\omega_0\tau\right\}. \quad (7.91)$$

A partir de cette expression on trouve par transformation de Fourier le spectre énergétique des bruits très limités, ayant une forme caractéristique pour les transformations non linéaires (composante constante mise à part), c'est-à-dire qu'il se compose d'une raie vidéofréquence et de bandes disposées au voisinage de ω_0 et

*) Remarquons que l'on peut obtenir (7.90) par simple intégration de (7.2) en passant aux coordonnées polaires. C'est là un des rares exemples où l'on peut éviter la représentation de la fonction de corrélation après transformation non linéaire sous la forme d'une série.

de ses harmoniques (voir fig. 6.1). La distribution de l'énergie entre la raie vidéofréquence et les harmoniques de la porteuse dépend du niveau de limitation.

Utilisons maintenant (7.91), ce qui nous permettra d'étudier plus en détail le cas d'une forte limitation où la moyenne quadratique de l'amplitude des bruits est nettement supérieure au niveau de limitation, c'est-à-dire $x_0 \ll \sigma$. Comme pour k pair $H_k\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)$ ne contient que des puissances paires de $\frac{x_0}{\sigma}$, et pour k impair que des puissances impaires, en ne gardant que les termes proportionnels à $\frac{x_0}{\sigma}$, on a

$$B(\tau)=\frac{\alpha_0^2}{4}\left(1-2\frac{x_0}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)+$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{2\pi}\left\{\left[R_0(\tau)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)!!]^2\binom{2n-1}{n-1}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}}R_0^{2n-1}(\tau)\right]\cos\omega_0\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=2}^{\infty}\left[\sum_{n=r}^{\infty}\frac{[(2n-3)!!]^2\binom{2n-1}{n-r}}{(2n-1)!\,2^{2n-2}}R_0^{2n-1}(\tau)\right]\cos(2r-1)\omega_0\tau\right\}+$$

$$+\frac{\alpha_0^2x_0}{2\pi\sigma}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2\binom{2n}{n}}{(2n)!\,2^{2n}}R_0^{2n}(\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{\infty}\left[\sum_{n=r}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2\binom{2n}{n-r}}{(2n)!\,2^{2n-1}}R_0^{2n}(\tau)\right]\cos 2r\omega_0\tau\right\}. \quad (7.92)$$

La relation (7.92) montre que pour $x_0 = 0$ le spectre des bruits limités se trouve concentré au voisinage de la pulsation porteuse ω_0 et de ses harmoniques impairs [voir les termes entre les premières accolades dans (7.92)]. Pour $x_0 \neq 0$ et $x_0 \ll \sigma$ on voit apparaître des composantes spectrales combinatoires dans la bande vidéofréquence et les bandes disposées au voisinage des harmoniques pairs, mais l'énergie correspondant à ces parties du spectre est bien inférieure à celle des bandes se trouvant au voisinage des harmoniques impairs de ω_0.

La figure 7.4, *a* représente le spectre énergétique pour $x_0 \ll \sigma$ lorsque le spectre des bruits à l'entrée du limiteur est uniforme dans la bande Δ. Le spectre au voisinage de la pulsation porteuse

ω_0 est donné par la transformée de Fourier de l'expression

$$B_1(\tau)=\frac{\alpha_0^2}{2\pi}\left[R_0(\tau)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)\,!!]^2\binom{2n-1}{n-1}}{(2n-1)\,!\,2^{2n-2}}R_0^{2n-1}(\tau)\right]\cos\omega_0\tau. \quad (7.93)$$

Le premier terme dans (7.93) reproduit fidèlement la forme du spectre d'entrée. La différence entre la forme des spectres d'entrée et de sortie est déterminée par les termes suivants, dont l'influence est cependant insignifiante. La figure 7.4, *a* montre la forme du spectre au voisinage de la pulsation porteuse $\omega = \omega_0$ (sur ce même dessin on a représenté en pointillé le spectre énergétique des bruits à l'entrée du limiteur). On peut montrer que pour $x_0 = 0$, l'aire de la partie du spectre de sortie au voisinage de la pulsation porteuse ω_0 est égale à 0,8 de l'aire du spectre d'entrée, donc 20% de la puissance des bruits se transforment en puissance des harmoniques impairs de la porteuse. Remarquons que ces mêmes relations énergétiques se conservent dans le cas d'une limitation parfaite d'une tension sinusoïdale, car dans ce cas la tension de sortie est une suite périodique d'impulsions avec un rapport période/durée égal à 2.

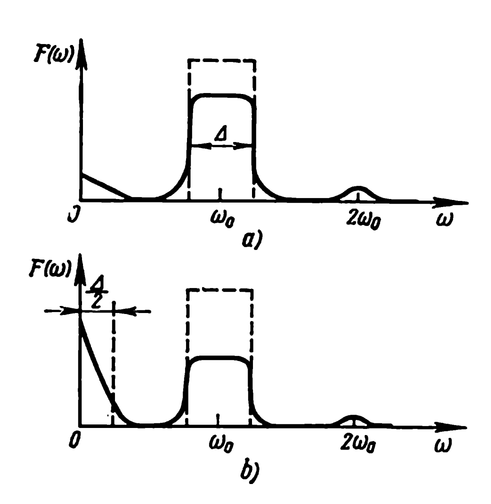


Fig. 7.4. Spectre énergétique des bruits pour un niveau d'écrêtage bas (*a*) et un niveau d'écrêtage élevé (*b*)

Lorsqu'on augmente le niveau relatif de limitation $\frac{x_0}{\sigma}$ la répartition des puissances entre différentes parties du spectre énergétique change considérablement. Ainsi, par exemple, pour $x_0 = \sigma$ la partie essentielle de la puissance moyenne du processus à la sortie du limiteur se trouve concentrée dans la bande vidéofréquence (25 %) et au voisinage de la pulsation ω_0 (50 %) comme on peut le voir sur la figure 7.4, *b*. On observe l'effet de redistribution des puissances lorsqu'on limite une tension sinusoïdale à niveau élevé. Le rapport période/durée d'impulsions à la sortie du limiteur augmente alors en même temps que diminue la puissance du premier harmonique de la pulsation de cadence.

7.2.5. Limitation parfaite de la somme d'un signal sinusoïdal et d'un bruit normal. Examinons les transformations que subissent la fonction de corrélation et le spectre énergétique en présence d'un signal sinusoïdal $S(t) = a \sin \omega_0 t$ lorsque l'abscisse du point de fonctionnement coïncide avec la tension de coupure ($x_0 = 0$). On a alors en vertu de (7.84) (voir annexe V)

$$h_{nk} = i^{n+k-1} \frac{\alpha_0}{2\pi} \int\limits_C u^{k-1} J_n(au)\, e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}\, du =$$
$$= \frac{\alpha_0}{2n!} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)^k \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{n+k}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_1F_1\left(\frac{n+k}{2},\ n+1,\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right). \quad (7.94)$$

Comme pour des valeurs entières négatives la fonction gamma est illimitée, en vertu de (7.94) on a $h_{nk} = 0$ pour $n + k = 2r$ ($r = 1, 2, \ldots$). En portant dans la première somme de la formule (7.79) l'expression de h_{n0} d'après (7.94), on obtient la partie périodique de la fonction de corrélation

$$B_d(\tau) = \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{\alpha_0^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)^{2n-1} \times\right.$$
$$\left.\times \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{2}\right)}\, {}_1F_1\left(n-\frac{1}{2},\ 2n,\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2 \cos(2n-1)\omega_0\tau, \quad (7.95)$$

à laquelle correspond la partie discrète du spectre énergétique à la sortie du limiteur

$$\frac{1}{2\pi} F_d(\omega) = \frac{\alpha_0^2}{4} \delta(\omega) + \frac{\alpha_0^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}}\right)^{2n-1} \times\right.$$
$$\left.\times \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{2n-1}{2}\right)}\, {}_1F_1\left(n-\frac{1}{2},\ 2n,\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2 \delta[\omega-(2n-1)\omega_0].$$
$$(7.96)$$

Si $\sigma \to 0$, en utilisant le développement asymptotique de la fonction hypergéométrique (voir annexe V) et compte tenu de

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{2n-1}{2}\cdot(-1)^n \pi,$$

on trouve en vertu de (7.96)

$$\frac{1}{2\pi} F_d(\omega) = \frac{\alpha_0^2}{4} \delta(\omega) + \frac{\alpha_0^2}{2} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \delta[\omega-(2n-1)\omega_0]. \quad (7.97)$$

L'expression (7.97) représente le spectre énergétique d'une suite périodique d'impulsions rectangulaires de rapport période/durée égal à 2.

En prenant dans les sommes de (7.79) les termes pour $n = 0$, on obtient (sans tenir compte de la composante constante) la fonction de corrélation correspondant au spectre continu dû aux battements entre les composantes du bruit. Cette fonction de corrélation coïncide avec (7.92), si l'on rejette le dernier terme contenant en facteur x_0. Les autres termes de (7.79) dans ces sommes ($n > 0$) correspondent au spectre continu dû aux battements du signal et des composantes du bruit. Dans ce cas tous les harmoniques pairs s'annulent.

L'expression explicite de la fonction de corrélation du processus aléatoire à la sortie du limiteur en fonction du coefficient de corrélation des bruits à l'entrée du limiteur et du rapport $\frac{a}{\sigma}$ s'obtient en portant dans (7.79) les expressions (7.80) à (7.82), compte tenu de (7.94).

7.3. SOLUTION PAR LA MÉTHODE DES DÉRIVÉES

7.3.1. Solution générale. Lorsqu'à l'entrée d'un élément non linéaire non inertiel agit un processus aléatoire normal, il est parfois facile de calculer non pas la fonction de corrélation du processus à la sortie de cet élément non linéaire, mais la dérivée de cette fonction par rapport au coefficient de corrélation du processus d'entrée, après quoi la fonction de corrélation cherchée s'obtient par une intégration plus simple qu'à partir de (7.2). Cette méthode de calcul de la fonction de corrélation à la sortie d'un élément non linéaire, qui, comme nous allons le montrer tout de suite, est une conséquence de la méthode des intégrales curvilignes appliquée au cas des processus aléatoires normaux, est appelée *méthode des dérivées*.

En dérivant directement l'intégrale double par rapport au paramètre R on obtient à partir de (7.66):

$$\frac{d^k B(\tau)}{dR^k(\tau)} = \frac{(-1)^k \sigma^{2k}}{4\pi^2} \int\limits_{C_1} \int\limits_{C_2} u_1^k u_2^k g(iu_1)\, g(iu_2) \times$$
$$\times \Theta_s(u_1, u_2, \tau)\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(u_1^2+u_2^2+2Ru_1u_2)}\, du_1\, du_2.$$

En substituant à la fonction caractéristique bidimensionnelle d'un processus aléatoire normal son expression en tant que transformée de Fourier de la densité de probabilité bidimensionnelle, et en

changeant l'ordre d'intégration on obtient

$$\frac{d^kB(\tau)}{dR^k(\tau)}=\frac{\sigma^{2k}}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{4\pi^2}\int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2}u_1^k u_2^k\times\right.$$

$$\left.\times\, g(iu_1)\,g(iu_2)\,e^{-i(u_1x_1+u_2x_2)}\,du_1\,du_2\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)}\left[(x_1-a_1)^2-2R(x_1-a_2)(x_2-a_2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(x_2-a_2)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2.$$

Les variables d'intégration par rapport à u_1 et u_2 se séparent et en vertu de (6.16) on a

$$\frac{(-i)^k}{2\pi}\int\limits_C u^k g(iu)\,e^{-iux}\,du=\frac{d^kf(x)}{dx^k}=f^{(k)}(x),$$

donc

$$\frac{d^kB(\tau)}{dR^k(\tau)}=\frac{\sigma^{2k-2}}{2\pi\sqrt{[1-R^2(\tau)]}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(x_1)\,f^{(k)}(x_2)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\left[(x_1-a_1)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2R(\tau)(x_1-a_1)(x_2-a_2)+(x_2-a_2)^2\right]\right\}dx_1\,dx_2. \quad (7.98)$$

La formule (7.98) se trouve à la base de la méthode des dérivées *).

Si $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$, on a $f^{(n)}(x)=a_nn\,!$ et en vertu de (7.98) on obtient

$$\frac{d^nB(R)}{dR^n}=(a_nn\,!)^2\sigma^{2n},$$

ce qui veut dire que la fonction de corrélation après une transformation non linéaire représente dans ce cas un polynôme de degré n par rapport au coefficient de corrélation d'entrée.

Supposons que la fonction $f(x)$ se compose de segments de polynômes formant des points anguleux aux jonctions. Pour des valeurs assez grandes de k la dérivée $f^{(k)}(x)$ sera égale à une somme de fonctions delta et le calcul de l'intégrale (7.98) devient simple, compte tenu de la propriété de filtrage de la fonction delta et de ces dérivées.

*) Dans [9] on peut trouver un résultat général dont (7.98) est un cas particulier.

Remarquons qu'on peut utiliser une formule du type (7.98) pour le calcul de la fonction de corrélation mutuelle à la sortie de deux dispositifs non linéaires, si on applique un processus aléatoire normal à leurs entrées. Il faut pour cela remplacer sous le signe de l'intégrale $f^{(k)}(x_1)f^{(k)}(x_2)$ par $f_1^{(k)}(x_1)\,f_2^{(k)}(x_2)$. En particulier, si $f_1(x_1) \equiv x_1$, pour la fonction de corrélation mutuelle des processus à l'entrée et à la sortie d'un système non linéaire lorsque le processus d'entrée est normal et stationnaire, on trouve l'expression suivante ($k = 1$) :

$$\frac{dB_{\xi\zeta}(\tau)}{dR_{\xi}(\tau)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_{\xi}^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x_2) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2(1-R_{\xi}^2)}\left[(x_1-a_{\xi})^2+(x_2-a_{\xi})^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2R_{\xi}(x_1-a_{\xi})(x_2-a_{\xi})\right]\right\} dx_1\,dx_2 =$$

$$= \frac{\sigma_{\xi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x_2)\, e^{-\frac{(x_2-a_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}}\, dx_2 = C.$$

Le second membre de cette expression ne dépend pas de τ. Compte tenu de

$$B_{\xi\zeta}(\infty) = a_{\xi}a_{\zeta}, \quad R_{\xi}(\infty) = 0,$$

on trouve

$$B_{\xi\zeta}(\tau) = CR_{\xi}(\tau) + a_{\xi}a_{\zeta}.$$

Si la moyenne du processus normal est $a_{\xi} = 0$, on a [voir (6) dans le problème 6.2]

$$B_{\xi\zeta}(\tau) = CR_{\xi}(\tau). \qquad (7.99)$$

7.3.2. Limiteur parfait et détecteur linéaire. Donnons quelques exemples d'application de la méthode des dérivées. Proposons-nous d'obtenir les expressions des fonctions de corrélation des processus à la sortie d'un limiteur parfait et d'un détecteur linéaire, lorsqu'on applique à leurs entrées un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. Ces expressions ont été obtenues ci-dessus par d'autres méthodes. Nous allons montrer combien la méthode des dérivées permet de simplifier les calculs.

Pour un limiteur parfait de caractéristique (7.86) pour $x_0 = 0$ on a

$$f'(x) = \alpha_0\delta(x),$$

et en vertu de la formule (7.98)

$$\frac{dB(\tau)}{dR(\tau)}=\frac{\alpha_0^2}{2\pi\sqrt{1-R^2(\tau)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_1)\,\delta(x_2)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}(x_1^2+x_2^2-2R(\tau)\,x_1x_2)\right\}dx_1\,dx_2=$$

$$=\frac{\alpha_0^2}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-R^2(\tau)}}.$$

Mais comme $R=0$ pour $\tau\to\infty$ et $R(\infty)=\frac{\alpha_0^2}{4}$ on a

$$B(\tau)=\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{\alpha_0^2}{2\pi}\int_0^{R(\tau)}\frac{dR}{\sqrt{1-R^2}}=\frac{\alpha_0^2}{4}\left[1+\frac{2}{\pi}\arcsin R(\tau)\right],$$

ce qui coïncide avec (7.90).

Pour un détecteur linéaire dont la caractéristique est de la forme de (7.27) on a

$$f''(x)=\delta(x).$$

Tout comme précédemment la formule (7.98) donne

$$\frac{d^2B(\tau)}{dR^2(\tau)}=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-R^2(\tau)}}.$$

Comme pour $\tau\to\infty$ on a $R=0$ et $\left(\frac{dB}{dR}\right)_{\tau=\infty}=\frac{\sigma^2}{4}$, $B(\infty)=\frac{\sigma^2}{2\pi}$ on obtient finalement

$$B(\tau)=\frac{\sigma^2}{2\pi}+\frac{\sigma^2}{4}\int_0^R\left(1+\frac{2}{\pi}\arcsin R\right)dR=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}R(\tau)+R(\tau)\arcsin R(\tau)+\sqrt{1-R^2(\tau)}\right],$$

ce qui coïncide avec (7.32).

7.3.3. Limiteur partiellement linéaire. Soit maintenant un limiteur dont la caractéristique présente un segment linéaire:

$$y=f(x)=\begin{cases}-\alpha_0, & x<-\alpha_0,\\ x, & |x|\leqslant\alpha_0,\\ \alpha_0, & x>\alpha_0.\end{cases}$$

Dans ce cas

$$f''(x)=\delta(x+\alpha_0)-\delta(x-\alpha_0),$$

et si le processus d'entrée est stationnaire de moyenne nulle, on trouve à l'aide de la formule (7.98)

$$\frac{d^2B(\tau)}{dR^2(\tau)}=\frac{\sigma^2}{\pi\sqrt{1-R^2}}\left[e^{-\frac{\alpha_0^2(1-R)}{\sigma^2(1-R^2)}}-e^{-\frac{\alpha_0^2(1+R)}{\sigma^2(1-R^2)}}\right]. \qquad (7.100)$$

C'est une équation différentielle ordinaire du second ordre, elle peut faire l'objet d'une intégration numérique pour les conditions initiales suivantes:

$$R(\infty)=0, \ B(\infty)=0, \ \left(\frac{dB}{dR}\right)_{\tau=\infty}=\sigma^2\left[2F\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\right)-1\right]^2.$$

La formule (7.100) permet de calculer facilement le développement de la fonction de corrélation à la sortie du limiteur en série suivant les puissances du coefficient de corrélation de processus d'entrée. En utilisant (7.5) pour $s_1 = s_2 = 0$ et $x_1 = x_2 = \frac{\alpha_0}{\sigma}$ on obtient

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{\alpha_0^2(1-R)}{\sigma^2(1-R^2)}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha_0^2}{\sigma^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}H_n^2\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\right),$$

et pour $x_1=-x_2=\frac{\alpha_0}{\sigma}$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{\alpha_0^2(1+R)}{\sigma^2(1-R^2)}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha_0^2}{\sigma^2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{R^n}{n!}H_0^2\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\right),$$

d'où

$$\frac{d^2B(\tau)}{dR^2(\tau)}=\frac{2\sigma^2}{\pi}e^{-\frac{\alpha_0^2}{\sigma^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{2n-1}}{(2n-1)!}H_{2n-1}^2\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\right).$$

En intégrant deux fois sur R les deux membres de l'égalité obtenue et compte tenu des conditions initiales ci-dessus, on obtient le développement cherché

$$B(\tau)=\alpha_0^2\left[2F\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\right)-1\right]^2R(\tau)+ \\ +\frac{2\sigma^2}{\pi}e^{-\frac{\alpha^2}{\sigma^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{2n+1}(\tau)}{(2n+1)!}H_{2n-1}^2\left(\frac{\alpha_0}{\sigma}\right). \quad (7.101)$$

7.3.4. Détecteur quadratique à une alternance. Soit maintenant un détecteur quadratique à une alternance, dont la caractéristique est

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

On a alors

$$f''(x) = 2\delta(x)$$

et si le processus normal à l'entrée du détecteur est stationnaire et de moyenne nulle on obtient à partir de la formule (7.98)

$$\frac{d^3B(\tau)}{dR^3(\tau)}=\frac{2}{\pi}\frac{\sigma^4}{\sqrt{1-R^2(\tau)}}. \tag{7.102}$$

Les conditions initiales sont

$$R(\infty)=0,\ B(\infty)=\frac{\sigma^4}{4},\ \left(\frac{dB}{dR}\right)_{\tau=\infty}=\frac{2\sigma^2}{\pi},\ \left(\frac{d^2B}{dR^2}\right)_{\tau=\infty}=\sigma^4.$$

L'équation (7.102) s'intègre facilement à l'aide de fonctions élémentaires, il vient

$$B(\tau)=\frac{2\sigma^4}{\pi}\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi R^2(\tau)}{4}+\frac{3}{4}R(\tau)\sqrt{1-R^2(\tau)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\arcsin R(\tau)+\frac{1}{2}R^2(\tau)\arcsin R(\tau)\right]. \tag{7.103}$$

Remarquons que la propriété de filtrage des fonctions delta, utilisée dans la méthode des dérivées, peut également être appliquée au calcul des coefficients du développement (7.7) de la méthode directe. En effet, en remplaçant les polynômes d'Hermite par une exponentielle (voir annexe IV) et en intégrant par parties k fois, on obtient

$$c_n=\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(\sigma x)\,H_{n-k}(x-s)\,e^{-\frac{(x-s)^2}{2}}\,dx.$$

Tout comme dans (7.98) les calculs se simplifient si $f^{(k)}(x)$ est une somme de fonctions delta (voir pour plus de détail [5]).

7.3.5. Limiteur de lissage. Considérons maintenant un exemple montrant qu'on peut calculer la dérivée (7.98) sans recourir aux fonctions delta. Calculons la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à la sortie d'un limiteur de lissage dont la caractéristique est donnée par la fonction

$$y=f(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x}{l\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

lorsqu'à son entrée agit un processus aléatoire normal stationnaire à moyenne nulle. On a alors

$$f'(x)=\frac{2}{l\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2l^2\sigma^2}}$$

et en vertu de (7.98)

$$\frac{dB(\tau)}{dR(\tau)}=\frac{4}{(2\pi l\sigma)^2\sqrt{1-R^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2l^2\sigma^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{x_1^2-2Rx_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}dx_1\,dx_2.$$

En utilisant la formule générale pour le calcul de l'intégrale obtenue *) [voir (9) de l'annexe II] on a

$$\frac{dB(\tau)}{dR(\tau)}=\frac{4}{2\pi l^2\sqrt{1+\frac{2}{l^2}+\frac{1-R^2(\tau)}{l^4}}}=\frac{2}{\pi\sqrt{(l^2+1)^2-R^2(\tau)}}\,.$$

Comme pour $\tau\to\infty$ on a $R(\infty)=0$ et $B(\infty)=0$ (si $f(x)$ est symétrique) on peut écrire

$$B(\tau)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{R(\tau)}\frac{dx}{\sqrt{(l^2+1)^2-x^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R(\tau)}{1+l^2}\,. \qquad (7.104)$$

Pour $l\to 0$ la formule (7.104) donne l'expression du coefficient de corrélation du processus à la sortie d'un limiteur parfait (symétrique) (voir problème 7.11 pour $\alpha_0=1$).

7.3.6. Généralisation. La formule (7.98) peut être généralisée au cas où à l'entrée d'un système non linéaire non inertiel de caractéristique $y=f(x_1, x_2)$ on applique *deux processus* stationnaires normaux *cohérents* $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t+\tau)$ de même variance σ^2 et de coefficient de corrélation mutuelle $R(\tau)$. Supposant que la caractéristique du système peut s'écrire à l'aide de l'intégrale curviligne multiple

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2} g(iu_1, iu_2)\, e^{i(u_1x_1+u_2x_2)}\,du_1\,du_2$$

et revenant aux raisonnements du § 7.3.1, on obtient l'expression suivante:

$$\frac{d^kM(R)}{dR^k}=\frac{\sigma^{2k-2}}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^k\,\partial x_2^k}[f(x_1, x_2)]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-R^2)}[(x_1-a_1)^2-2R(x_1-a_1)\times\right.$$
$$\left.\times(x_2-a_2)+(x_2-a_2)^2]\right\}dx_1\,dx_2, \qquad (7.105)$$

où

$$M[R(\tau)]=m_1\{f[\xi_1(t),\ \xi_2(t+\tau)]\}. \qquad (7.106)$$

Dans le cas particulier où $\xi_1=\xi_2$ et $f(x_1, x_2)=f(x_1)f(x_2)$ on obtient (7.98) à partir de (7.105) car $\frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^k\partial x_2^k}[f(x_1)f(x_2)]=$ $=f^{(k)}(x_1)f^{(k)}(x_2)$.

*) Avec les notations de l'annexe VI, on a dans l'intégrale considérée

$$I_2=\frac{l}{l^4}+\frac{2}{l^2(1-R^2)}+\frac{1}{(1-R^2)},\quad I_3=0.$$

Pour illustrer la formule (7.105) considérons l'exemple suivant. Soit $a_1 = a_2 = 0$ et

$$f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2| - |x_1 - x_2|, \qquad (7.107)$$

il vient alors

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 2[\delta(x_1 + x_2) + \delta(x_1 - x_2)].$$

En vertu de (7.105) on a

$$\frac{dM(R)}{dR} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-R^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x_1 + x_2) + \delta(x_1 - x_2)] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2Rx_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\} dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{1-R^2}} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\frac{x_2^2}{\sigma^2(1-R)}} + e^{-\frac{x_2^2}{\sigma^2(1+R)}}]\, dx_2 =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+R}} + \frac{1}{\sqrt{1-R}}\right). \qquad (7.108)$$

L'intégration de l'équation (7.108) pour les conditions initiales $R(\infty) = 0$, $M(\infty) = 0$ donne

$$M(R) = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}[\sqrt{1 + R(\tau)} - \sqrt{1 - R(\tau)}]. \qquad (7.109)$$

Remarquons que pour $R = 1$, l'expression (7.109) devient

$$M(0) = 2m_1\{|\xi|\} = 2\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

où ξ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle (voir problème 2.4).

7.4. QUANTIFICATION D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

7.4.1. Fonction de corrélation des bruits de quantification. La quantification des signaux en amplitude est un moyen efficace de lutte contre les bruits dans les systèmes radiotechniques. Dans la gamme continue dynamique des valeurs du signal, on distingue un certain nombre de niveaux discrets. La quantification du signal du côté de l'émission consiste à transmettre, au lieu de la valeur instantanée du signal, la valeur du niveau discret le plus proche.

La quantification des signaux en amplitude est efficace contre les bruits, si toutefois la moyenne quadratique des bruits est petite par rapport à la différence entre les niveaux discrets. La quantification conduit à des déformations du signal appelées *bruits de quantification*. La quantification des signaux en amplitude se trouve à la base de tous les systèmes de modulation d'impulsions codées.

Calculons maintenant la fonction de corrélation et le spectre énergétique des bruits de quantification. On peut considérer l'erreur de quantification, c'est-à-dire la différence entre le signal initial et le signal quantifié comme le résultat de la transformation du signal initial dans un élément non linéaire

de caractéristique en dents de scie (voir la figure 7.5) donnée par l'expression

$$f(x) = x - m\delta,$$
$$\left(m-\frac{1}{2}\right)\delta < x < \left(m+\frac{1}{2}\right)\delta,\quad m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{7.110}$$

où δ est la différence entre deux niveaux discrets consécutifs.

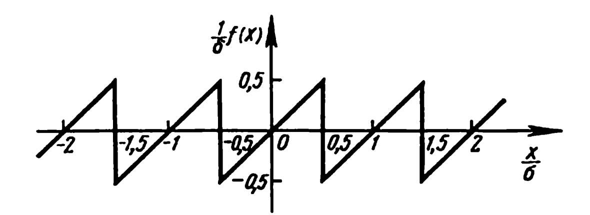


Fig. 7.5. Caractéristique en dents de scie

La fonction périodique $f(x)$ de période δ peut être décomposée en série de Fourier

$$f(x) = \frac{\delta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{2\pi nx}{\delta}. \tag{7.111}$$

La fonction de corrélation des bruits de quantification s'écrira alors

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\delta^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{nk}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{2\pi nx_1}{\delta}\times$$
$$\times\sin\frac{2\pi nx_2}{\delta}w_{2\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2, \tag{7.112}$$

où $w_{2\xi}$ est la densité de probabilité bidimensionnelle du signal initial (à quantifier).

L'intégrale dans (7.112) peut facilement s'écrire à l'aide de la fonction caractéristique bidimensionnelle du signal

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{2\pi nx_1}{\delta}\sin\frac{2\pi nx_2}{\delta}w_{2\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2 =$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\Theta_{2\xi}\left(\frac{2\pi n}{\delta}, \frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right) - \Theta_{2\xi}\left(-\frac{2\pi n}{\delta}, \frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right)+\right.$$
$$\left.+\Theta_{2\xi}\left(-\frac{2\pi n}{\delta}, -\frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right) - \Theta_{2\xi}\left(\frac{2\pi n}{\delta}, -\frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right)\right]. \tag{7.113}$$

En portant (7.113) dans (7.112) et en étendant la sommation aux indices négatifs on obtient

$$B_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\delta^2}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{n+k+1}}{nk}\Theta_{2\xi}\left(\frac{2\pi n}{\delta}, \frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right), \tag{7.114}$$

où le signe « prime » désigne que l'on exclut le terme avec $n = k = 0$.

La formule (7.114) donne l'expression générale de la fonction de corrélation des bruits de quantification pour une distribution arbitraire des probabilités du signal à quantifier.

Si le signal est un processus aléatoire stationnaire normal de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R_\xi(\tau)$, on trouve à partir de (7.114) et compte tenu de (4.164)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{\delta^2}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+k+1}}{nk} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2\pi^2\sigma^2}{\delta^2}(n^2+2nkR_\xi+k^2)\right\} =$$
$$= \frac{\delta^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{nk} e^{-\frac{2\pi^2\sigma^2}{\delta^2}(n^2+k^2)} \operatorname{sh}\frac{4\pi^2 nk\sigma^2 R_\xi}{\delta^2}.$$

En introduisant la notation $\beta = \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^2$, écrivons la fonction de corrélation des bruits de quantification d'un processus aléatoire normal sous la forme suivante:

$$B_\zeta(\tau) = \frac{\beta\sigma^2}{\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{4n^2\pi^2}{\beta}} \operatorname{sh}\frac{4n^2\pi^2 R_\xi(\tau)}{\beta} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{nk} e^{-\frac{2\pi^2(n^2+k^2)}{\beta}} \operatorname{sh}\frac{4\pi^2 nk R_\xi(\tau)}{\beta}\right]. \quad (7.115)$$

Supposons que la différence δ entre les niveaux discrets soit bien plus petite que la moyenne quadratique σ du signal. En fait, ceci est pratiquement toujours réalisé. On a alors $\beta \ll 1$. Compte tenu de cette dernière inégalité, on peut négliger dans (7.115) les sommes doubles par rapport à la première somme, et en remplaçant le sinus hyperbolique par son développement asymptotique ($\operatorname{sh} x \sim \frac{1}{2}e^x$, $x \gg 1$), on obtient l'expression approchée de la fonction de corrélation des bruits de quantification, donnant tout de même une précision suffisante pour la majorité des problèmes pratiques. On a:

$$B_\zeta(\tau) \approx \frac{\beta\sigma^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{4n^2\pi^2[1-R_\xi(\tau)]}{\beta}}. \quad (7.116)$$

La puissance totale des bruits de quantification (variance de l'erreur de quantification) est égale à

$$B_\zeta(0) = \frac{\beta\sigma^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\beta\sigma^2}{2\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\delta^2}{12}, \quad (7.117)$$

c'est-à-dire au douzième du carré de la différence entre les niveaux discrets. Il est facile de voir que, dans le cas étudié, la variance de l'erreur coïncide

avec celle d'une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle de zéro à δ. En effet, si la différence entre les niveaux discrets est petite, l'erreur de quantification est assez bien approchée par des segments de droite (sauf le cas où le signal entre les niveaux discrets a un extrémum).

7.4.2. **Spectre énergétique des bruits de quantification.** Calculons le spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ des bruits de quantification supposant que le spectre du signal initial est uniforme dans la bande 2Δ des basses fréquences. Le coefficient de corrélation de ce signal, en vertu de (5.45), est $R_\xi(\tau) = \frac{\sin \tau\Delta}{\tau\Delta}$. En utilisant le théorème de Wiener-Khintchine on obtient à partir de (7.116)

$$F_\zeta(\omega) = \frac{4\beta\sigma^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{4n^2\pi^2}{\beta}\left(1 - \frac{\sin \tau\Delta}{\tau\Delta}\right)\right] \cos \omega\tau \, d\tau \qquad (7.118)$$

En développant $\frac{\sin \tau\Delta}{\tau\Delta}$ en série et en ne conservant que les deux premiers termes (étant donné que la fonction sous l'intégrale dans (7.118) décroît rapidement avec l'augmentation de $\tau\Delta$), on a

$$F_\zeta(\omega) = \frac{2\beta\sigma^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2n^2\pi^2\tau^2\Delta^2}{3\beta}} \cos \omega\tau \, d\tau. \qquad (7.119)$$

Nous avons déjà rencontré les intégrales se trouvant sous le signe de la somme [voir (5.42)]. En portant dans (7.119) les valeurs de ces intégrales on trouve pour le spectre énergétique des bruits de quantification

$$F_\zeta(\omega) = \frac{\beta\sigma^2}{\pi^2\Delta} \sqrt{\frac{3\beta}{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3\beta\omega^2}{8n^2\pi^2\Delta^2}}. \qquad (7.120)$$

On peut calculer le temps de corrélation à partir de la relation [comparer avec (4.67′)]

$$\tau_0 = \frac{F(0)}{4B(0)} = \frac{3}{\pi^2\Delta} \sqrt{\frac{3\beta}{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

ou *)

$$\tau_0 \approx \frac{1}{12} \frac{\delta}{\sigma} \frac{\pi}{\Delta}. \qquad (7.121)$$

On voit que le temps de corrélation des bruits de quantification est à peu près égal à celui du signal initial divisé par $\frac{12}{\sqrt{\beta}}$ [voir (5 46″)].

Pour $\beta \ll 1$ les erreurs de quantification des valeurs successives du signal ne sont pratiquement pas corrélées. Par conséquent, lorsque la différence entre les niveaux discrets diminue, le spectre énergétique des bruits de quantification devient uniforme dans une gamme plus étendue de fréquences, avec diminution simultanée du maximum de la densité spectrale.

---

*) Car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1{,}202$ (voir, par exemple, E. Jahnke, F. Emdé. *Tables des fonctions*. Gostechizdat, 1949, p. 372 (en russe).

7.4.3. Fonction de corrélation mutuelle des bruits de quantification et du signal à quantifier. En utilisant (7.111) il est facile d'obtenir l'expression de la fonction de corrélation mutuelle des bruits de quantification et du signal à quantifier. En vertu de (6.6) on a:

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_2)\, w_{2\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2=$$

$$=\frac{\delta}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \sin\frac{2\pi k x_2}{\delta}\, w_{2\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2. \qquad (7.122)$$

L'intégrale dans (7.122) s'exprime en fonction de la dérivée de la fonction caractéristique bidimensionnelle du signal à quantifier

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \sin\frac{2\pi k x_2}{\delta}\, w_{2\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ix_1\left(e^{-\frac{2\pi i k x_2}{\delta}}-e^{\frac{2\pi i k x_2}{\delta}}\right) w_{2\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Theta_{2\xi}\left(u, \frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right)}{\partial u}-\frac{\partial\Theta_{2\xi}\left(u, -\frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right)}{\partial u}\right]_{u=0}. \qquad (7.123)$$

Portons (7.117) dans (7.116) et étendons la sommation aux indices négatifs. Il vient:

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2)=\frac{\delta}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\frac{\partial\Theta_{2\xi}\left(u, \frac{2\pi k}{\delta}, t_1, t_2\right)}{\partial u}\right]_{u=0}. \qquad (7.124)$$

Si le signal à quantifier est un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R_\xi(\tau)$ on a

$$\left.\frac{\partial\Theta_2\left(u, \frac{2\pi k}{\delta}, \tau\right)}{\partial u}\right|_{u=0}=-\frac{2\pi k}{\delta}\sigma^2 R_\xi e^{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}}, \qquad \beta=\frac{\delta}{\sigma}.$$

et en vertu de (7.124)

$$B_{\xi\zeta}(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(-1)^k e^{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}}\sigma^2 R_\xi(\tau)=2\sigma^2 R_\xi(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{2\pi^2 k^2}{\beta^2}}, \qquad (7.125)$$

c'est-à-dire que la fonction de corrélation mutuelle est proportionnelle au coefficient de corrélation du signal à quantifier [ceci en vertu de la formule générale (7.99)]. Notons que pour $\beta < 1$, il vient de (7.125) que la valeur absolue de la fonction de corrélation mutuelle $B_{\xi\zeta}(\tau)$ est de l'ordre de 10^{-8} des valeurs de la fonction de corrélation du signal à quantifier.

7.5. DENSITÉS DE PROBABILITÉ

7.5.1. Détecteur quadratique. Calculons la densité de probabilité bidimensionnelle du carré d'un processus aléatoire normal qui est la somme d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne

nulle et de fonction de corrélation $\sigma^2 R(\tau)$ et d'un processus déterministe $S(t)$. Utilisons pour cela les formules générales de changement de variables dans les densités de probabilité lors d'une transformation non linéaire (voir § 6.1.5):

$$\eta_1 = \xi_1^2, \ \eta_2 = \xi_2^2,$$
$$\xi_1 = \xi(t), \ \xi_2 = \xi(t+\tau).$$

Désignons respectivement par $w_2(x_1, x_2, \tau, t)$ et $W_2(y_1, y_2, \tau, t)$ les densités de probabilité bidimensionnelles d'un processus aléatoire normal et de son carré. Comme la fonction inverse de $y = x^2$ est bivoque, à chaque point de coordonnées $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ correspondront quatre points dans le plan (x_1, x_2), notamment:

$$x_{11} = \sqrt{y_1}, \ x_{12} = -\sqrt{y_1},$$
$$x_{21} = \sqrt{y_2}, \ x_{22} = -\sqrt{y_2}. \qquad (7.126)$$

On a alors en vertu de (3.23)

$$W_2(y_1, y_2, \tau, t) = w_2(x_{11}, x_{21}, \tau, t)\left|\frac{\partial(x_{11}, x_{21})}{\partial(y_1, y_2)}\right| +$$
$$+ w_2(x_{11}, x_{22}, \tau, t)\left|\frac{\partial(x_{11}, x_{22})}{\partial(y_1, y_2)}\right| + w_2(x_{12}, x_{21}, \tau, t)\left|\frac{\partial(x_{12}, x_{21})}{\partial(y_1, y_2)}\right| +$$
$$+ w_2(x_{12}, x_{22}, \tau, t)\left|\frac{\partial(x_{12}, x_{22})}{\partial(y_1, y_2)}\right|. \qquad (7.127)$$

Les quatre jacobiens dans (7.127) ont mêmes valeurs absolues égales à $\frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}}$.

Portons dans (7.127) l'expression de la densité de probabilité bidimensionnelle d'un processus aléatoire normal, compte tenu de (7.126), il vient:

$$W_2(y_1, y_2, \tau, t) = \frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{y_1 + y_2 + S_1^2 + S_2^2 - 2RS_1S_2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right] \times$$
$$\times \left\{\exp\left[\frac{(S_1 - RS_2)\sqrt{y_1} + (S_2 - RS_1)\sqrt{y_2} + R\sqrt{y_1 y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right] +\right.$$
$$+ \exp\left[\frac{(S_1 - RS_2)\sqrt{y_1} - (S_2 - RS_1)\sqrt{y_2} - R\sqrt{y_1 y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right] +$$
$$+ \exp\left[-\frac{(S_1 - RS_2)\sqrt{y_1} + (S_2 - RS_1)\sqrt{y_2} + R\sqrt{y_1 y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right] +$$
$$\left. + \exp\left[-\frac{(S_1 - RS_2)\sqrt{y_1} - (S_2 - RS_1)\sqrt{y_2} + R\sqrt{y_1 y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y_1 y_2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left[-\frac{y_1+y_2+S_1^2+S_2^2-2RS_1S_2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right] \times$$

$$\times \left\{ e^{\frac{R\sqrt{y_1y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}} \operatorname{ch}\left[\frac{(S_1-RS_2)\sqrt{y_1}+(S_2-RS_1)\sqrt{y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{R\sqrt{y_1y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}} \operatorname{ch}\left[\frac{(S_1-RS_2)\sqrt{y_1}-(S_2-RS_1)\sqrt{y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right]\right\},$$

où $R = R(\tau)$, $S_1 = S(t)$, $S_2 = S(t+\tau)$.

En développant les cosinus hyperboliques des sommes et des différences et en groupant les termes à cosinus et à sinus, on trouve l'expression cherchée de la densité de probabilité bidimensionnelle du carré d'un processus aléatoire normal, soit:

$$W_2(y_1, y_2, \tau, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{y_1y_2(1-R^2)}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{y_1+y_2+S_1^2+S_2^2-2RS_1S_2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right] \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{ch}\left[\frac{R\sqrt{y_1y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right] \operatorname{ch}\left[\frac{\sqrt{y_1}(S_1-RS_2)}{\sigma^2(1-R^2)}\right] \times \right.$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{\sqrt{y_2}(S_2-RS_1)}{\sigma^2(1-R^2)}\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{R\sqrt{y_1y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right] \times$$

$$\left. \times \operatorname{sh}\left[\frac{\sqrt{y_1}(S_1-RS_2)}{\sigma^2(1-R^2)}\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\sqrt{y_2}(S_2-RS_1)}{\sigma^2(1-R^2)}\right]\right\},$$

$$y_1 > 0, \quad y_2 > 0. \tag{7.128}$$

S'il n'y a pas de partie déterministe ($S_1 = S_2 = 0$) on obtient à partir de (7.128) la densité de probabilité bidimensionnelle d'un processus aléatoire normal stationnaire:

$$W_2(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{y_1y_2(1-R^2)}} \times$$

$$\times e^{-\frac{y_1+y_2}{2\sigma^2(1-R^2)}} \operatorname{ch}\left[\frac{R\sqrt{y_1y_2}}{\sigma^2(1-R^2)}\right], \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0. \tag{7.129}$$

A partir de (7.128) on peut facilement trouver la densité de probabilité unidimensionnelle pour $\tau \to \infty$ ($R \to 0$); on a alors [voir (3.10)]

$$W_1(y, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y+S^2}{2\sigma^2}} \operatorname{ch}\left(\frac{S\sqrt{y}}{\sigma^2}\right), \qquad y > 0. \tag{7.130}$$

Pour $S = 0$ on obtient la densité de probabilité du carré d'une variable aléatoire normalement distribuée de moyenne nulle [com-

parer avec (3.10′)]

$$W_1(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}\,e^{-\frac{y}{2\sigma^2}},\qquad y>0. \qquad (7.131)$$

Si $S\gg\sigma$ dans (7.130) on peut remplacer le cosinus hyperbolique par son expression asymptotique, soit:

$$\mathrm{ch}\left(\frac{S\sqrt{y}}{\sigma^2}\right)\sim\frac{1}{2}\,e^{-\frac{S\sqrt{y}}{\sigma^2}}.$$

La densité de probabilité (7.130) peut alors s'écrire sous la forme

$$W_1(y,t)\sim\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\,e^{-\frac{(\sqrt{y}-s)^2}{2\sigma^2}},\qquad y>0. \qquad (7.132)$$

Sur la figure 3.2 on avait représenté les courbes de densité de probabilité unidimensionnelle du carré d'une variable aléatoire normale pour plusieurs valeurs de S.

7.5.2. Détecteur linéaire. Nous allons maintenant trouver la densité de probabilité bidimensionnelle d'un processus aléatoire à la sortie d'un détecteur linéaire, c'est-à-dire après une transformation non linéaire non inertielle de la forme

$$y=\begin{cases} x-x_0, & x\geqslant x_0,\\ 0\ , & x\leqslant x.\end{cases} \qquad (7.133)$$

Avec les notations

$$\xi_1=\xi\,(t),\ \xi_2=\xi\,(t+\tau),\ \eta_1=\eta\,(t),\ \eta_2=\eta\,(t+\tau),$$

on obtient [voir (3.16)]

$$\begin{aligned}P\,\{0\leqslant\eta_1\leqslant y_1,\ 0\leqslant\eta_2\leqslant y_2\}&=\\ =P\,\{x_0\leqslant\xi_1\leqslant y_1+x_0,\ &x_0\leqslant\xi_2\leqslant y_2+x_0\}+\\ +P\,\{x_0\leqslant\xi_1\leqslant y_1+x_0,\ &\xi_2\leqslant x_0\}+\\ +P\,\{(\xi_1\leqslant x_0,\ x_0\leqslant\xi_2\leqslant y_2+x_0\}&+P\,\{\xi_1\leqslant x_0,\ \xi_2\leqslant x_0\},\end{aligned}$$

d'où l'expression cherchée de la densité de probabilité bidimensionnelle $W_2\,(y_1,\,y_2,\,t,\,\tau)$ du processus à la sortie d'un détecteur linéaire en fonction de la densité de probabilité bidimensionnelle $w_2\,(x_1,\,x_2,\,t,\,\tau)$ à l'entrée de ce détecteur:

$$\begin{aligned}W_2\,(y_1,\,y_2,\,t,\,\tau)&=w_2\,(y_1+x_0,\,y_2+x_0,\,t,\,\tau)+\\ &+\delta\,(y_1)\int_{-\infty}^{x_0}w_2\,(x_1,\,x_0+y_2,\,t,\,\tau)\,dx_1+\delta\,(y_2)\,\times\end{aligned}$$

$$\times \int_{-\infty}^{x_0} w_2(x_0 + y_1, x_2, t, \tau)\, dx_2 + \delta(y_1)\,\delta(y_2) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{x_0} w_2(x_1, x_2, t, \tau)\, dx_1\, dx_2,$$

$$y_1 > 0, \quad y_2 > 0. \qquad (7.134)$$

Remarquons que la formule (7.134) est vraie quelle que soit la loi de distribution du processus à l'entrée du détecteur. Par intégration sur l'une quelconque des variables y_1 ou y_2 on obtient la densité de probabilité unidimensionnelle du processus après détection linéaire:

$$W_1(y_1, t) = \int_0^{\infty} w_2(y_1 + x_0, y_2 + x_0, t, \tau)\, dy_2 +$$

$$+ \delta(y_1) \int_{-\infty}^{x_0} \int_0^{\infty} w_2(x_1, x_0 + y_2, t, \tau)\, dy_2\, dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_0} w_2(x_0 + y_1, x_2, t, \tau)\, dx_2 +$$

$$+ \delta(y_1) \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{x_0} w_2(x_1, x_2, t, \tau)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{x_0}^{\infty} w_2(x_0 + y_1, x_2, t, \tau)\, dx_2 + \int_{-\infty}^{x_0} w_2(x_0 + y_1, x_2, t, \tau)\, dx_2 +$$

$$+ \delta(y_1) \Big[\int_{-\infty}^{x_0} \int_{x_0}^{\infty} w_2(x_1, x_2, t, \tau)\, dx_2\, dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{x_0} w_2(x_1, x_2, t, \tau)\, dx_2\, dx_1 \Big]$$

ou

$$W_1(y_1, t) = w_1(x_0 + y_1, t) + \delta(y_1) \int_{-\infty}^{x_0} w_1(x, t)\, dx, \quad y_1 > 0. \qquad (7.135)$$

Cette formule est un cas particulier de (3.19) pour $\nu = 1$.

En substituant dans (7.134) à w_2 la densité de probabilité d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$, on obtient:

$$W_2(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - R^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma^2 (1 - R^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[(y_1 + x_0)^2 - 2R(y_1 + x_0)(y_2 + x_0) + (y_2 + x_0)^2 \right] \right\} +$$

$$+\frac{\delta(y_1)}{2\pi\sigma}e^{\frac{R^2(x_0+v_2)}{2\sigma^2(1-R^2)}}F\left[\frac{x_0(1-R)-Ry_2}{\sigma\sqrt{1-R^2}}\right]+$$

$$+\frac{\delta(y_2)}{2\pi\sigma}e^{\frac{R^2(x_0+v_1)}{2\sigma^2(1-R^2)}}F\left[\frac{x_0(1-R)-Ry_1}{\sigma\sqrt{1-R^2}}\right]+$$

$$+\delta(y_1)\,\delta(y_2)\left[K\left(\frac{x_0}{\sigma},\ \frac{x_0}{\sigma}\right)+2F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)-1\right],$$

$$y_1>0,\quad y_2>0, \qquad (7.136)$$

où $F(x)$ est la fonction de Laplace et K $(h,\ h)$ une intégrale tabulaire de la densité de probabilité bidimensionnelle [voir (2.72)].

La densité de probabilité unidimensionnelle du processus à la sortie d'un détecteur linéaire est, en vertu de (7.135), égale à

$$W_1(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+v_0)^2}{2\sigma^2}}+\delta(y)\,F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right),\qquad y>0. \quad (7.137)$$

Problèmes

7.1. En utilisant les résultats du § 7.1.6, calculer la fonction de corrélation centrée et le spectre énergétique d'un processus aléatoire à la sortie d'un détecteur quadratique à deux alternances, lorsqu'on applique à son entrée la somme d'un signal modulé en amplitude

$$S(t)=u_0\,(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \qquad (1)$$

et un bruit normal à bande étroite, dont le spectre énergétique est uniforme dans la bande $\left(\omega_0-\frac{\Delta}{2},\ \omega_0+\frac{\Delta}{2}\right)$ avec $\Delta>2\Omega$.

Montrer que dans ce cas la fonction de corrélation centrée du processus à la sortie du détecteur est

$$B_*(\tau)=\frac{1}{4}\left[2\sigma^2+u_0^2\left(1+\frac{m^2}{2}\right)\right]^2+\frac{u_0^4}{2}m^2\cos\Omega\tau+$$
$$+\frac{u_0^4m^4}{32}\cos 2\Omega\tau+\frac{u_0^4}{8}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)^2\cos 2\omega_0\tau+\frac{u_0^4m^2}{4}\cos\Omega\tau\cos 2\omega_0\tau+$$
$$+\frac{u_0^4m^4}{64}\cos 2\Omega\tau\cos 2\omega_0\tau+u_0^2\sigma^2R_0(\tau)\left(1+\frac{m^2}{2}\cos\Omega\tau\right)+\sigma^4R_0^2(\tau)+$$
$$+u_0^2\sigma^2R_0(\tau)\left(1+\frac{m^2}{2}\cos\Omega\tau\right)\cos 2\omega_0\tau+\sigma^4R_0^2(\tau)\cos 2\omega_0\tau, \qquad (2)$$

où

$$R_0(\tau)=\frac{\sin\frac{\tau\Delta}{2}}{\frac{\tau\Delta}{2}},$$

la partie discrète du spectre énergétique est

$$\frac{1}{2\pi} F_d(\omega)=\frac{1}{4}\left[2\sigma^2+u_0^2\left(1+\frac{m^2}{2}\right)\right]^2\delta(\omega)+\frac{u_0^4m^2}{2}\delta(\omega-\Omega)+$$
$$+\frac{u_0^4m^4}{32}\delta(\omega-2\Omega)+\frac{u_0^4}{8}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)^2\delta(\omega-2\omega_0)+$$
$$+\frac{u_0^4m^2}{8}[\delta(\omega-2\omega_0-\Omega)+\delta(\omega-2\omega_0+\Omega)]+$$
$$+\frac{u_0^4m^4}{128}[\delta(\omega-2\omega_0-2\Omega)+\delta(\omega-2\omega_0+2\Omega)], \quad (3)$$

et la partie continue basse fréquence du spectre énergétique

$$F_{\text{B.F.}}(\omega) = F_1(\omega)+F_2(\omega)+F_3(\omega), \quad (4)$$

où

$$F_1(\omega)=4u_0^2\sigma^2\int_0^\infty R_0(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau=\begin{cases}\dfrac{4\pi\sigma^2u_0^2}{\Delta}, & 0<\omega<\dfrac{\Delta}{2},\\ 0, & \omega>\dfrac{\Delta}{2};\end{cases} \quad (5)$$

$$F_2(\omega)=\frac{m^2}{4}[F_1(\omega+\Omega)+F_1(\omega-\Omega)]; \quad (6)$$

$$F_3(\omega)=4\sigma^4\int_0^\infty R_0^2(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau=\begin{cases}\dfrac{4\pi\sigma^4(\Delta-\omega)}{\Delta^2}, & 0<\omega<\Delta,\\ 0, & \omega>\Delta.\end{cases} \quad (7)$$

Montrer que dans la bande des vidéofréquences le rapport γ_{sor} de la puissance du signal à la puissance du bruit à la sortie d'un détecteur quadratique, pour $m \ll 1$, est égal à

$$\gamma_{\text{sor}}=\frac{0{,}5\gamma_{\text{ent}}^2}{1+2\gamma_{\text{ent}}},$$

où $\gamma_{\text{ent}} = \dfrac{u_0^2}{2\sigma^2}$ est le rapport signal/bruit à l'entrée du détecteur.

Etudier les cas $\gamma_{\text{ent}} \ll 1$ et $\gamma_{\text{ent}} \gg 1$.

Montrer que la partie continue haute fréquence $F_{\text{H.F.}}(\omega)$ du spectre énergétique s'obtient par translation de $2\omega_0$ de la partie $F_{\text{B.F.}}(\omega)$, multipliée par 1/2, dans le domaine haute fréquence.

7.2. En utilisant les résultats du § 7.2.1, montrer que la fonction de corrélation centrée de la somme du signal

$$S(t)=a_1\cos\frac{2\pi t}{T_1}+a_2\cos\frac{2\pi t}{T_2} \quad (8)$$

et d'un bruit normal stationnaire est égale à

$$B^*(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n\sigma^{2k}}{k!}R^k(\tau)\,h_{mnk}^2\cos\frac{2\pi mt}{T_1}\cos\frac{2\pi nt}{T_2}, \quad (9)$$

où

$$h_{mnk}=\frac{i^{m+n+k}}{2\pi}\int\limits_{c} g(iu)\,u^k J_m(a_1u)\,J_n(a_2u)\,e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}\,du. \qquad (10)$$

7.3. Soient $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ deux processus aléatoires stationnaires et stationnairement liés de moyennes nulles, de variances σ^2 et de coefficients de corrélation et de corrélation mutuelle $R(\tau)$ et $R_{12}(\tau)$ respectivement, appliqués à

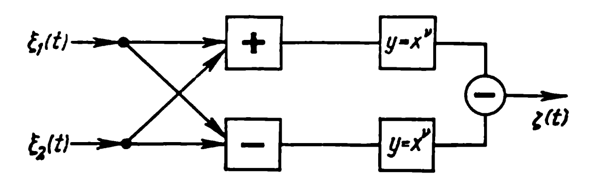


Fig. 7.6. Modulateur équilibré

l'entrée du dispositif schématisé par la figure 7.6. Montrer que la fonction de corrélation du processus à la sortie du dispositif est égale à

$$B_\zeta(\tau)=\sigma^{2\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4k-\nu}\Gamma^2(\nu+1)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma^2\left(1-k+\frac{\nu}{2}\right)}\,[R(\tau)+R_{12}(\tau)]^{2k}. \qquad (11)$$

7.4. La densité de probabilité bidimensionnelle d'un processus aléatoire stationnaire lognormal $\xi(t)\geqslant 0$ est

$$w_{2\xi}(x_1, x_2, \tau)=\frac{1}{2\pi x_1x_2\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}[(\ln x_1-a)^2-\right.$$
$$\left.-2R(\tau)(\ln x_1-a)(\ln x_2-a)+(\ln x_2-a)^2]\right\}. \qquad (12)$$

Le logarithme $\ln\xi(t)$ est un processus normal de moyenne a, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(t)$. Montrer que la fonction de corrélation du processus $\xi(t)$ est égale à

$$B_\xi(\tau)=e^{2a+\sigma^2[(1+R(\tau)]}. \qquad (13)$$

Obtenir à partir de (13) les expressions suivantes de la valeur moyenne et de la variance du processus

$$m_1\{\xi(t)\}=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}, \qquad (14)$$

$$M_2\{\xi(t)\}=e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1). \qquad (14')$$

7.5. Montrer que la fonction de corrélation à la sortie d'un détecteur linéaire à deux alternances (fig. 7.7), lorsqu'on applique à son entrée un bruit normal stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corré-

lation $R(\tau)$ est [comparer avec (7.32)] :

$$B(\tau)=\frac{2\sigma^2}{\pi}\left(R\arcsin R+\sqrt{1-R^2}\right). \qquad (15)$$

7.6. Etudier la moyenne et la variance de la puissance moyenne $\eta_T = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^2(t)\,dt$ d'un processus aléatoire normal stationnaire $\xi(t)$ prise sur un temps fini T.

Montrer que:

a) pour un processus $\xi(t)$ dont le spectre énergétique est

$$F_\xi(\omega)=\frac{4a\sigma_\xi^2}{a^2+\omega^2},$$

la moyenne et la variance de la puissance moyenne sur un temps fini T sont

$$m_1\{\eta_T\} = \sigma_\xi^2, \qquad (16)$$

$$M_2\{\eta_T\}=\frac{\sigma_\xi^4}{(2\beta)^2}(4\beta-1+e^{-4\beta}), \quad \beta=\frac{aT}{2}; \qquad (16')$$

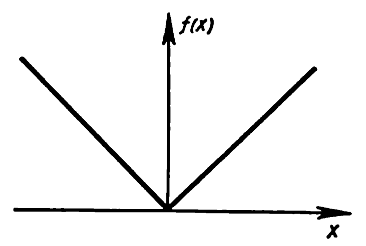


Fig. 7.7. Caractéristique d'un détecteur linéaire à deux alternances

b) si le spectre énergétique est

$$F_\xi(\omega)=\frac{\sigma_\xi^2\omega^2}{\omega^2+\left(\frac{Q}{\omega_0}\right)^2(\omega^2-\omega_0^2)^2},$$

la moyenne et la variance de la puissance moyenne sur un temps fini T sont

$$m_1\{\eta_T\} = \sigma_\xi^2, \qquad (17)$$

$$M_2\{\eta_T\}=\frac{2\sigma_\xi^4}{r^2}\left[r-1+e^{-r}+\frac{2e^{-r}}{4Q^2-1}\sin^2\frac{r}{2}\sqrt{4Q^2-1}\right], \qquad (17')$$

$$r=\frac{\omega_0 T}{Q}.$$

7.7. Supposons qu'à l'entrée d'un système non linéaire non inertiel de caractéristique

$$y = e^{\alpha_0 x}$$

on applique un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne a, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. Montrer que la fonction de corrélation du processus à la sortie du système est

$$B(\tau) = e^{2a\alpha_0+\sigma^2[1+R(\tau)]\alpha_0^2}. \qquad (18)$$

7.8. Supposons qu'à l'entrée d'un système non linéaire non inertiel de caractéristique

$$y=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \qquad |x|\leqslant a,$$

on applique un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. Montrer que la fonction de

corrélation du processus à la sortie du système est

$$B(\tau)=\frac{1}{8}\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}}{(2k)!}\frac{{}_1F_1^2\left(k+\frac{1}{2},\ 2,\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-k\right)}R^{2k}(\tau). \qquad (19)$$

7.9. Soient deux processus aléatoires normaux stationnaires $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ de moyennes nulles, de variances σ^2 et de coefficient de corrélation mutuelle $R(\tau)$. Montrer que

$$m_1\{|\xi_1(t)+\xi_2(t+\tau)|\}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1+R(\tau)}, \qquad (20)$$

$$m_1\{|\xi_1(t)-\xi_2(t+\tau)|\}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1-R(\tau)}. \qquad (21)$$

7.10. Pour un limiteur parfait de caractéristique

$$y=f(x)=\begin{cases}+1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases} \qquad (22)$$

trouver à partir de (7.101) la fonction de corrélation par passage à la limit :

$$\lim_{\alpha_0\to 0}\frac{B(\tau)}{\alpha_0^2}=\frac{2}{\pi}\arcsin R(\tau)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{R^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (23)$$

Conseil: utiliser la relation

$$\lim_{x\to 0}\frac{H_{2n-1}(x)}{x}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

7.11. Montrer que la fonction de corrélation d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$ après un limiteur parfait de caractéristique

$$y=f(x)=\begin{cases}\alpha_0, & x\geqslant x_0,\\ -\alpha_0, & x<x_0,\end{cases} \qquad (24)$$

est égale à [comparer avec (7.89)]

$$B(\tau)=\frac{2\alpha_0^2}{\pi}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\sum_{n=1}^{\infty}H_{n-1}^2\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\frac{R^n(\tau)}{n!}. \qquad (25)$$

Vérifier que pour $x=0$ on a

$$B(\tau)=\frac{2\alpha_0^2}{\pi}\arcsin R(\tau). \qquad (25')$$

Conseil: utiliser la méthode des dérivées, obtenir l'équation suivante $\frac{dB(\tau)}{dR}=$ $=\frac{2\alpha_0^2}{\pi\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2(1+R)}}$ pour la condition initiale $B(\infty)=0$.

7.12. Trouver pour la densité de probabilité bidimensionnelle de la somme de deux processus aléatoires stationnaires indépendants: l'un normal de moyenne nulle, de variance σ^2, de coefficient de corrélation $R(\tau)$ et l'autre

quasi déterministe représentant une oscillation harmonique d'amplitude constante a, de pulsation ω_0 et de phase aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $(0, 2\pi)$, l'expression suivante:

$$W_2(y_1, y_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{y_1^2+y_2^2-2R(\tau)\,y_1y_2}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]}\right\} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\frac{1-R(\tau)\cos\omega_0\tau}{1-R^2(\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left\{2k \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{y_1-y_2}{y_1+y_2}\frac{1+R(\tau)}{1-R(\tau)}\operatorname{tg}\frac{\omega_0\tau}{2}\right]\right\} I_k\left[\frac{a^2}{2\sigma^2}\frac{1-R(\tau)\cos\omega_0\tau}{1-R^2(\tau)}\right] \times$$

$$\times I_{2k}\left\{\frac{a}{\sigma}\sqrt{\left[\frac{(y_1-y_2)\sin\frac{\omega_0\tau}{2}}{1-R(\tau)}\right]^2+\left[\frac{(y_1+y_2)\cos\frac{\omega_0\tau}{2}}{1+R(\tau)}\right]^2}\right\}. \qquad (26)$$

Obtenir à partir de (26) la densité de probabilité unidimensionnelle de cette somme et vérifier qu'elle coïncide avec (5) du problème 3.5.

Chapitre 8

ENVELOPPE ET PHASE D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

8.1. DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Conformément aux résultats obtenus au § 6.2 on peut écrire un processus aléatoire stationnaire *normal* à la sortie d'un système linéaire à bande étroite de pulsation de résonance ω_0 sous la forme suivante:

$$\xi(t) = A(t)\cos\omega_0 t + C(t)\sin\omega_0 t, \tag{8.1}$$

où $A(t)$ et $C(t)$ sont deux fonctions aléatoires stationnaires et stationnairement liées, ayant une distribution conjointe *normale*.

Supposons que le signal $S(t)$ à la traversée d'un système linéaire est une oscillation haute fréquence, de pulsation ω_0, modulée en amplitude et en phase, soit:

$$S(t) = u(t)\cos\omega_0 t + v(t)\sin\omega_0 t = \\ = a(t)\cos[\omega_0 t - \vartheta_s(t)], \tag{8.2}$$

où $a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ et $\vartheta_s(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{v(t)}{u(t)}$ sont l'enveloppe et la phase du signal à bande étroite. Le processus aléatoire à la sortie du système linéaire considéré peut être décrit par la fonction aléatoire

$$\eta(t) = [A(t) + u(t)]\cos\omega_0 t + [C(t) + v(t)]\sin\omega_0 t, \tag{8.3}$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante:

$$\eta(t) = E(t)\cos[\omega_0 t - \varphi(t)], \tag{8.4}$$

où $E(t)$ et $\varphi(t)$ sont l'enveloppe et la phase *) du processus aléatoire $\eta(t)$, données par les formules

$$E(t) = \sqrt{[A(t) + u(t)]^2 + [C(t) + v(t)]^2}, \tag{8.5}$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{C(t) + v(t)}{A(t) + u(t)}. \tag{8.6}$$

---

*) Parfois on appelle phase d'un processus la somme $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$. Pour éviter tout malentendu notons qu'ici on entend par phase seule la fonction aléatoire $\varphi(t)$. Comme en fait ce n'est pas la valeur absolue de $\Phi(t)$ qu'on mesure mais seulement une différence, il est intéressant d'étudier les caractéristiques statistiques de la fonction $\varphi(t)$.

Dans de nombreux cas pratiques le problème se pose de calculer les densités de probabilité de l'enveloppe $E(t)$ et de la phase $\varphi(t)$ d'un processus aléatoire normal (8.1). La solution générale de ce problème a été donnée au § 6.2.3. Les formules (6.63) et (6.64) permettent, du moins en principe, de résoudre le problème posé. En vertu de ces formules il convient, avant tout, d'écrire l'expression explicite de la densité de probabilité normale à $2n$ dimensions des valeurs de $A(t)$ et $C(t)$ à n instants de temps, puis de procéder à l'intégration sur les variables correspondantes. Cependant ces formules sont difficiles à utiliser, le calcul des intégrales étant trop compliqué. Nous nous limiterons aux densités de probabilité du premier et du second ordres *).

Pour déterminer les densités de probabilité unidimensionnelles il faut avant tout trouver la distribution conjointe des composantes de $A(t)$ et $C(t)$ aux mêmes instants. Comme nous l'avons mentionné au § 6.2.3, si $\xi(t)$ est un processus normal, $A(t)$ et $C(t)$ sont des processus normaux, indépendants aux mêmes instants, leurs variances coïncidant avec la variance σ^2 du processus $\xi(t)$. C'est ainsi que la distribution conjointe de $A(t)$ et $C(t)$ à l'instant t est égale au produit des densités de probabilité unidimensionnelles de ces fonctions aléatoires. On a :

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \qquad (8.7)$$

Avec le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta - u(t), \\ y &= r\sin\vartheta - v(t), \end{aligned} \qquad (8.8)$$

on obtient la distribution conjointe de l'enveloppe $E(t)$ et de la phase $\varphi(t)$ à l'instant t

$$W_2(r, \vartheta, t) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(r\cos\vartheta - u)^2+(r\sin\vartheta - v)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (8.9)$$

Par intégration de (8.9) sur ϑ on peut trouver la distribution unidimensionnelle de l'enveloppe, et par intégration sur r, la distribution unidimensionnelle de la phase.

Pour calculer les distributions bidimensionnelles il y a lieu d'écrire préalablement la distribution conjointe des variables aléatoires $A(t)$ et $C(t)$ à deux instants t et $t + \tau$, qui est une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2. La matrice de

*) Dans [8] on peut trouver l'expression de la densité de probabilité à n dimensions de l'enveloppe d'un processus normal stationnaire à bande étroite sous la forme d'un produit de fonctions de Bessel et de fonctions exponentielles.

corrélation correspondant à cette distribution est (voir § 4.4.3)

$$M=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & R_c(\tau) & R_s(\tau) \\ 0 & 1 & -R_s(\tau) & R_c(\tau) \\ R_c(\tau) & -R_s(\tau) & 1 & 0 \\ R_s(\tau) & R_c(\tau) & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{8.10}$$

où $R_c(\tau)$ est le coefficient de corrélation de $A(t)$ aussi bien que de $C(t)$, et $R_s(\tau)$ le coefficient de corrélation mutuelle de $A(t)$ et de $C(t)$. Les coefficients de corrélation et le spectre énergétique du processus normal initial sont liés par les relations [voir (6.50) et (6.53)] :

$$R_c(\tau)=\frac{\int\limits_0^\infty F_\xi(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau\,d\omega}{\int\limits_0^\infty F_\xi(\omega)\,d\omega}, \tag{8.11}$$

$$R_s(\tau)=\frac{\int\limits_0^\infty F_\xi(\omega)\sin(\omega-\omega_0)\tau\,d\omega}{\int\limits_0^\infty F_\xi(\omega)\,d\omega}. \tag{8.12}$$

En introduisant la notation

$$R_0^2(\tau) = R_c^2(\tau) + R_s^2(\tau), \tag{8.13}$$

on peut à partir de (8.10) trouver le déterminant et les cofacteurs de la matrice M :

$$\begin{aligned} D &= [1-R_0^2(\tau)]^2, \\ D_{11} &= D_{22} = D_{33} = D_{44} = 1 - R_0^2(\tau), \\ D_{12} &= D_{21} = D_{34} = D_{43} = 0, \\ D_{13} &= D_{31} = -R_c(\tau)\,[1-R_0^2(\tau)], \\ D_{14} &= D_{41} = -R_s(\tau)\,[1-R_0^2(\tau)], \\ D_{23} &= D_{32} = R_s(\tau)\,[1-R_0^2(\tau)], \\ D_{24} &= D_{42} = -R_c(\tau)\,[1-R_0^2(\tau)]. \end{aligned}$$

En utilisant (4.166) écrivons la distribution quadridimensionnelle des valeurs de $A(t)$ et $C(t)$ aux instants t et $t+\tau$:

$$w_4(x_1, x_2, y_1, y_2, \tau)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2(1-R_0^2)}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2(1-R_0^2)}[x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-\right.$$
$$\left.-2R_c(x_1x_2+y_1y_2)-2R_s(x_1y_2-x_2y_1)]\right\}. \tag{8.14}$$

En introduisant les nouvelles variables

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \vartheta_1 - u_1, \quad x_2 = r_2 \cos \vartheta_2 - u_2, \\ y_1 &= r_1 \sin \vartheta_1 - v_1, \quad y_2 = r_2 \sin \vartheta_2 - v_2, \end{aligned} \tag{8.15}$$

où

$$u_1 = u(t); \; u_2 = u(t+\tau); \; v_1 = v(t); \; v_1 = v(t+\tau),$$

on obtient la distribution conjointe de l'enveloppe (8.5) et de la phase (8.6) aux instants t et $t+\tau$:

$$W_4(r_1, \vartheta_1, r_2, \vartheta_2, t, \tau) = \frac{r_1 r_2}{(2\pi\sigma^2)^2 (1-R_0^2)} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\Big[(r_1 \cos\vartheta_1 - u_1)^2 + (r_1 \sin\vartheta_1 - v_1)^2 +\right.$$
$$+ (r_2 \cos\vartheta_2 - u_2)^2 + (r_2 \sin\vartheta_2 - v_2)^2 -$$
$$- 2R_c[(r_1\cos\vartheta_1 - u_1)(r_2\cos\vartheta_2 - u_2) + (r_1 \sin\vartheta_1 - v_1)(r_2 \sin\vartheta_2 - v_2)] -$$
$$- 2R_s[(r_1 \cos\vartheta_1 - u_1)(r_2 \sin\vartheta_2 - v_2) -$$
$$\left. - (r_2\cos\vartheta_2 - u_2)(r_1 \sin\vartheta_1 - v_1)\Big]\Big]\right\},$$
$$r_1 > 0, \; r_2 > 0, \; |\vartheta_1| \leqslant \pi, \; |\vartheta_2| \leqslant \pi,$$

ou encore

$$W_4(r_1, \vartheta_1, r_2, \vartheta_2, t, \tau) = \frac{r_1 r_2}{(2\pi\sigma^2)^2(1-R_0^2)} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-R_0^2)}[r_1^2 + r_2^2 - 2R_0 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \vartheta_0)]\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-R_0^2)}[a_1^2 + a_2^2 - 2R_0 a_1 a_2 \cos(\vartheta_{s2} - \vartheta_{s1} + \vartheta_0) -\right.$$
$$- 2r_1 a_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_{s1}) - 2r_2 a_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_{s2}) +$$
$$\left. + 2R_0 r_1 a_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_{s2} + \vartheta_0) + 2R_0 r_2 a_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_{s1} + \vartheta_0)]\right\}, \tag{8.16}$$

où

$$a_1 = a(t); \quad a_2 = a(t+\tau); \quad \vartheta_{s1} = \vartheta_s(t); \quad \vartheta_{s2} = \vartheta_s(t+\tau)$$

et

$$\vartheta_0 = \vartheta_0(\tau) = \operatorname{arc\,tg} \frac{R_s(\tau)}{R_c(\tau)}.$$

Remarquons que l'expression (8.16) est écrite sous la forme du produit de deux exponentielles, les paramètres du signal déterministe ne figurant que dans la seconde exponentielle qui devient égale à l'unité pour un processus stationnaire normal.

Par intégration double sur ϑ_1, ϑ_2 on trouve à partir de (8.16) la distribution bidimensionnelle de l'enveloppe, et par intégration double sur r_1, r_2 la distribution bidimensionnelle de la phase.

8.2. CARACTÉRISTIQUES PROBABILISTES DE L'ENVELOPPE

8.2.1. Densité de probabilité unidimensionnelle et moments. En comparant (8.9) et (3.69) on remarque que le problème de calcul de la densité de probabilité de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal à bande étroite $\eta(t)$ est justement le même que celui résolu au § 3.2.2, consistant à trouver la densité de probabilité de la longueur d'un vecteur plan, dont les composantes sont indépendantes et ont une distribution normale de paramètres $u(t)$, σ et $v(t)$, σ, où σ^2 est la variance de la composante stationnaire $\xi(t)$ du processus $\eta(t)$. En utilisant (3.70) écrivons la densité de probabilité unidimensionnelle de l'enveloppe

$$W_1(r, t) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+a^2(t)}{2\sigma^2}} I_0\left[\frac{ra(t)}{\sigma^2}\right], \qquad r > 0. \tag{8.17}$$

Ainsi, la densité de probabilité unidimensionnelle de l'enveloppe d'un processus normal à bande étroite suit en général la loi généralisée de Rayleigh. Cette fonction pour différentes valeurs de $\frac{a}{\sigma}$ est donnée sur la figure 3.6. Au fur et à mesure de l'augmentation du rapport $\frac{a}{\sigma}$, la loi de distribution de l'enveloppe tend vers la loi normale [voir (3.72′)]. La fonction de répartition correspondant à (8.17) ne peut s'exprimer par des fonctions élémentaires, mais peut s'écrire sous la forme d'une série *) [voir (3.71)]

$$F_1(r, t) = P\{E(t) \leqslant r\} = e^{-\frac{r^2+a^2(t)}{2\sigma^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r}{a(t)}\right]^n I_n\left[\frac{ra(t)}{\sigma^2}\right]. \tag{8.17′}$$

En l'absence de signal ($a = 0$), (8.17) devient la loi de distribution de Rayleigh (courbe *1* sur la figure 3.6):

$$W_1(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \qquad r > 0 \tag{8.18}$$

et

$$F_1(r) = \int_0^r W_1(r)\, dr = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \qquad r > 0. \tag{8.18′}$$

Les moments de l'enveloppe sont en vertu de (3.73)

$$m_k = m_1\{E^k(t)\} = (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) {}_1F_1\left[-\frac{k}{2}, 1, -\frac{a^2(t)}{2\sigma^2}\right], \tag{8.19}$$

*) Si $\frac{a}{\sigma} \gg 1$ on peut utiliser la relation asymptotique donnée dans la note à la page 109.

et en l'absence de signal on a

$$m_k = (2\sigma^2)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right). \tag{8.20}$$

Les expressions explicites des trois premiers moments sont données par les formules (3.74) à (3.76).

Il faut noter que la distribution (8.17) de l'enveloppe de la somme d'un processus aléatoire normal stationnaire et d'un signal déterministe *ne dépend pas* de la phase du signal ϑ_s. Il s'ensuit que cette distribution se rapporte également à la somme dudit processus aléatoire et d'un signal quasi déterministe différent du cas précédent par sa phase aléatoire φ_0. En effet, on a pour cette dernière distribution [voir (2.39)]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_1(r\mid\varphi_0)\, W_1(\varphi_0)\, d\varphi_0 = W_1(r)\int_{-\pi}^{\pi} W_1(\varphi_0)\, d\varphi_0 = W_1(r),$$

puisque la densité de probabilité conditionnelle $W_1(r\mid\varphi_0)$ est, en vertu de (8.17), égale à $W_1(r)$.

8.2.2. Densité de probabilité bidimensionnelle. Passons maintenant à l'étude de la densité de probabilité bidimensionnelle de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal. Nous nous limitons au cas où le signal est absent, c'est-à-dire lorsque le processus aléatoire est stationnaire. En vertu de (8.16), pour $a_1 = a_2 = \vartheta_{s1} = \vartheta_{s2} = 0$ on a

$$W_2(r_1, r_2, \tau) =$$
$$= \frac{r_1 r_2}{(2\pi\sigma^2)^2 (1-R_0^2)} e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{R_0 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2-\vartheta_1-\vartheta_0)}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right] d\vartheta_1\, d\vartheta_2.$$

L'intégrale sur ϑ_2 est égale à (voir § 3.2.2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{R_0 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2-\vartheta_1-\vartheta_0)}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right] d\vartheta_2 =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\vartheta_1-\vartheta_0}^{2\pi-\vartheta_1-\vartheta_0} \exp\left[\frac{R_0 r_1 r_2 \cos u}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right] du = I_0\left[\frac{R_0 r_1 r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right]$$

et ne dépend pas de ϑ_1. L'intégration sur ϑ_1 donnera une constante égale à 2π.

Finalement, la densité de probabilité bidimensionnelle de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite est:

$$W_2(r_1, r_2, \tau) = \frac{r_1 r_2}{\sigma^4(1-R_0^2)} e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} I_0\left[\frac{R_0 r_1 r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right],$$
$$r_1 > 0,\ r_2 > 0. \tag{8.21}$$

Si $\tau \to \infty$ on a $R_0 \to 0$, et en vertu de (8.21)

$$W_2(r_1, r_2, \infty) = \frac{r_1}{\sigma^2} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{r_2}{\sigma^2} e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma^2}},$$

c'est-à-dire que la densité de probabilité bidimensionnelle pour $\tau \to \infty$, comme il fallait s'y attendre, est égale au produit des fonctions de Rayleigh qui sont les densités de probabilité unidimensionnelles de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire.

La fonction de répartition bidimensionnelle correspondant à (8.21) ne peut s'exprimer par des fonctions élémentaires, cependant on peut l'écrire sous la forme d'une série par décomposition suivant les puissances de la fonction de Bessel.

On a alors

$$F_2(r_1, r_2, \tau) = P\{E(t) \leqslant r_1, E(t+\tau) \leqslant r_2\} =$$

$$= \int_0^{r_1}\int_0^{r_2} W_2(r_1, r_2, \tau)\, dr_1\, dr_2 = \frac{1}{\sigma^4(1-R_0^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{R_0}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\right]^{2n} \times$$

$$\times \frac{1}{n!} \int_0^{r_1} r_1^{2n+1} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}}\, dr_1 \cdot \frac{1}{n!} \int_0^{r_2} r_2^{2n+1} e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}}\, dr_2.$$

Avec une nouvelle variable d'intégration $u = \frac{r^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}$ et comme les intégrales ainsi obtenues sont des fonctions gamma incomplètes [voir (1.41)]

$$\int_0^x u^m e^{-u}\, du = \Gamma(m+1, x),$$

on a

$$F_2(r_1, r_2, \tau) = (1-R_0^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left[n+1, \frac{r_1^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\right]}{\Gamma(n+1)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left[n+1, \frac{r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\right]}{\Gamma(n+1)} \cdot R_0^{2n}. \qquad (8.21')$$

Le cas, où un signal déterministe est présent dans le processus étudié, peut être examiné de façon analogue, bien que les calculs soient un peu plus compliqués. On ne donne ici que l'expression définitive de la densité de probabilité bidimensionnelle de l'envelop-

pe, soit:

$$W_2(r_1, r_2, \tau, t) = \frac{r_1 r_2}{\sigma^4 (1-R_0^2)} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{r_1^2+r_2^2+a_1^2+a_2^2-2a_1a_2R_0}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\right] \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left[\frac{R_0 r_1 r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right] I_m\left[\frac{a_1-R_0a_2}{\sigma^2(1-R_0^2)} r_1\right] \times$$

$$\times I_m\left[\frac{a_2-R_0a_1}{\sigma^2(1-R_0^2)} r_2\right], \quad r_1>0, \ r_2>0, \qquad (8.22)$$

où $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_m = 2$; $m > 0$.

Si le signal est une oscillation harmonique de pulsation ω_0 et d'amplitude u_0, on a $a_1 = a_2 = u_0$ et en vertu de (8.22)

$$W_2(r_1, r_2, \tau) = \frac{r_1 r_2}{\sigma^4(1-R_0^2)} e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} e^{-\frac{u_0^2}{\sigma^2(1+R_0)}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m\left[\frac{R_0 r_1 r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right] I_m\left[\frac{u_0 r_1}{\sigma^2(1+R_0)}\right] \times$$

$$\times I_m\left[\frac{u_0 r_2}{\sigma^2(1+R_0)}\right], \quad r_1>0, \ r_2>0. \qquad (8.22')$$

Pour $\tau \to \infty$ on a $R_0 \to 0$ et en vertu de (8.22) on obtient

$$W_2(r_1, r_2, t, \tau) = \frac{r_1}{\sigma^2} e^{-\frac{r_1^2+a_1^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r_1a_1}{\sigma^2}\right) \times \frac{r_2}{\sigma^2} e^{-\frac{r_2^2+a_2^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r_2a_2}{\sigma^2}\right),$$

c'est-à-dire que la densité de probabilité bidimensionnelle pour $\tau \to \infty$, comme il fallait s'y attendre, est égale au produit des densités de probabilité unidimensionnelles (8.17).

L'enveloppe d'un processus aléatoire normal à bande étroite peut être appelée processus aléatoire de Rayleigh, et les distributions (8.21) et (8.22) sont des densités de probabilité bidimensionnelles respectives des processus aléatoires de Rayleigh stationnaire et non stationnaire.

8.2.3. Enveloppe d'un processus normal en tant que processus markovien. Il existe un cas particulier où l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite est un processus aléatoire markovien (voir § 4.5), c'est-à-dire que c'est un processus sans post-action dont les densités de probabilité multidimensionnelles peuvent s'exprimer à l'aide de la densité de probabilité unidimensionnelle et la densité de probabilité de transition. Le bruit

blanc normal après la traversée d'un circuit oscillant *RLC* de haute qualité est doué de la propriété indiquée. La fonction de corrélation de ce processus est [voir (5.40)]

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

En vertu de (8.18) et (8.21) la densité de probabilité de transition de l'enveloppe d'un processus stationnaire normal, dont la fonction de corrélation a la forme indiquée ci-dessus, est

$$W_2(r_2, \tau | r_1) = \frac{W_2(r_1, r_2, \tau)}{W_1(r_1)} =$$

$$= \frac{r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)} e^{-\frac{R_0^2 r_1^2 + r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} I_0\left[\frac{R_0 r_1 r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right], \quad r_1 > 0, \; r_2 > 0, \qquad (8.23)$$

où

$$R_0(\tau) = e^{-\beta|\tau|}. \qquad (8.23')$$

On peut montrer (voir [5]) que la densité de probabilité de transition (8.23) satisfait à l'équation de Kolmogorov (4.191). Ceci montre que l'enveloppe d'un bruit blanc à la sortie d'un circuit oscillant *RLC* de haute qualité est un processus continu de Markov.

8.2.4. Fonction de corrélation. Connaissant l'expression de la densité de probabilité bidimensionnelle de l'enveloppe on peut calculer la fonction de corrélation, celle-ci étant le second moment mixte de la distribution. Pour calculer l'intégrale double correspondante il convient d'utiliser la méthode exposée au § 2.4.4 de développement de la densité de probabilité bidimensionnelle suivant les polynômes orthogonaux respectifs.

Passons maintenant au calcul détaillé de la fonction de corrélation de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire. La densité de probabilité bidimensionnelle sera alors calculée à l'aide de la formule (8.21), et la densité de probabilité unidimensionnelle correspondante, à l'aide de la formule (8.18). Si l'on adopte la fonction $\frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ sur l'intervalle $(0, \infty)$ en qualité de fonction de pondération, il lui correspond un ensemble des polynômes orthogonaux de Laguerre *)

$$Q_n(r) = L_n^{(0)}\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right).$$

*) Il faut noter que les polynômes de Laguerre définis conformément à (9) de l'annexe IV ne sont pas normés. Pour obtenir des polynômes normés il faut introduire le facteur constant

$$\left[\binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1)\right]^{-1/2}.$$

Pour $\alpha = 0$ la définition (9) donne un ensemble de polynômes de Laguerre orthonormé.

Le développement de la fonction bidimensionnelle de Rayleigh (8.21) en série suivant ces polynômes donne

$$\frac{r_1 r_2}{\sigma^4 (1-R_0^2)} e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} I_0\left[\frac{R_0 r_1 r_2}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right]=$$

$$=\frac{r_1 r_2}{\sigma^4} e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n} L_n^{(0)}\left(\frac{r_1^2}{2\sigma^2}\right) L_n^{(0)}\left(\frac{r_2^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8.24)$$

En utilisant le développement (8.24), on peut écrire la fonction de corrélation de l'enveloppe sous la forme de la série suivante:

$$B_E(\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty r_1 r_2 W_2(r_1, r_2, \tau)\, dr_1 dr_2=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_0^{2n}}{\sigma^4}\int_0^\infty\int_0^\infty r_1^2 r_2^2 L_n^{(0)}\left(\frac{r_1^2}{2\sigma^2}\right) L_n^{(0)}\left(\frac{r_2^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{r_1^2+r_2^2}{2\sigma^2}} dr_1\, dr_2,$$

et comme les variables dans l'intégrale double se séparent, on a

$$B_E(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n}\left[\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty r^2 L_n^{(0)}\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr\right]^2 \quad (8.25)$$

ou

$$B_E(\tau)=\sigma^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 R_0^{2n}(\tau), \quad (8.26)$$

où

$$c_n=\int_0^\infty x^2 L_n^{(0)}\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (8.27)$$

Faisons dans l'intégrale (8.27) un changement de variable d'intégration, soit $y=\frac{x^2}{2}$. Par définition des polynômes de Laguerre $L_n^{(0)}(y)$ on obtient

$$c_n=\sqrt{2}\int_0^\infty \sqrt{y}\, L_n^{(0)}(y)\, e^{-y} dy=\frac{(-1)^n\sqrt{2}}{n!}\int_0^\infty \sqrt{y}\,\frac{d^n}{dy^n}(y^n e^{-y})\, dy. \quad (8.28)$$

En intégrant n fois par parties on trouve pour $n \geqslant 2$

$$c_n=\frac{\sqrt{2}\,(2n-3)\,!!}{2^n\, n\,!}\int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y} dy=\frac{\sqrt{2}\,(2n-3)\,!!}{2^n\, n\,!}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right),$$

mais comme $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on a

$$c_n = \frac{(2n-3)\,!!}{2^n n\,!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{8.29}$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, (8.28) donne directement

$$c_0 = \sqrt{2}\int\limits_0^\infty \sqrt{y}\,e^{-y}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{8.30}$$

$$c_1 = -\sqrt{2}\int\limits_0^\infty \sqrt{y}\,\frac{d}{dy}(y\,e^{-y})\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\infty \sqrt{y}\,e^{-y}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{8.30'}$$

En portant (8.29) à (8.30′) dans (8.26) on obtient l'expression de la fonction de corrélation de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite:

$$B_E(\tau) = \frac{\pi}{2}\sigma^2\left(1 + \frac{R_0^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)\,!!]^2}{2^{2n}(n\,!)^2}R_0^{2n}\right) =$$

$$= \sigma^2\,[2\mathrm{E}(R_0) - (1 - R_0^2)\,\mathrm{K}(R_0)], \tag{8.31}$$

égale (au facteur $\frac{1}{\pi^2}$ près) à (7.36). On pouvait s'attendre à ce résultat, car le spectre énergétique de l'enveloppe est lié à la partie basse fréquence du spectre d'un processus aléatoire normal stationnaire après détection linéaire.

Le premier terme $\frac{\pi\sigma^2}{2}$ de la série (8.31) est égal au carré de la composante constante de l'enveloppe. Pour $\tau \to 0$, en vertu de (8.31), on trouve [comparer avec (6.52)] $B_E(0) = 2\sigma^2$. La variance de l'enveloppe est égale à $B_E(0) - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$. Il ne faut pas oublier que la grandeur σ^2 est la variance du processus aléatoire initial qui est normal, stationnaire et à bande étroite.

A partir de (8.31) on trouve l'expression du coefficient de corrélation de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire

$$R_E(\tau) = \frac{B_E(\tau) - m_1^2\{E\}}{M_2\{E\}} =$$

$$= \frac{\pi}{4(4-\pi)}\left[R_0^2(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)\,!!]^2}{2^{2n-1}(n!)^2}R_0^{2n}(\tau)\right]. \tag{8.31'}$$

La somme figurant au second membre contient seulement les puissances paires de R_0 et n'est donc pas négative, c'est-à-dire $R_E(\tau) \geqslant 0$. Cette somme ne peut s'annuler que si $R_0 = 0$. Comme $R_0 =$

$= 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que deux valeurs quelconques de l'enveloppe soient statistiquement indépendantes [voir (8.21)], il vient que *si deux valeurs quelconques de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire ne sont pas corrélées, elles sont statistiquement indépendantes.*

En présence d'un signal harmonique d'amplitude u_0, la fonction de corrélation de l'enveloppe a pour expression:

$$B_E(\tau) = 2\sigma^2 (1 - R_0^2)^2 e^{-\frac{u_0^2}{2\sigma^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!\,[(2m+1)!!]^2}{2^{2m} (m!)^2} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{2m} \frac{R_0^{2m-n}}{(2m-n)!\,(n!)^2} \left(\frac{u_0^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{1-R_0}{1+R_0}\right)^n \times$$

$$\times {}_1F_1\left(n - 2m - 2,\ n+1,\ -\frac{1-R_0}{1+R_0} \frac{u_0^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (8.32)$$

8.3. TRANSFORMATIONS NON LINÉAIRES DE L'ENVELOPPE

8.3.1. Densité de probabilité du carré de l'enveloppe. Calculons la densité de probabilité bidimensionnelle de $E^2(t)$, c'est-à-dire du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal à bande étroite après détection quadratique. Il s'agit de passer dans la formule (8.22) des variables r_1 et r_2 à des nouvelles variables

$$\rho_1 = r_1^2, \quad \rho_2 = r_2^2. \qquad (8.33)$$

Bien que la fonction inverse de $r = \pm\sqrt{\rho}$ soit bivoque et puisque $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, à chaque point du plan (ρ_1, ρ_2) ne correspondra qu'un seul point du plan (r_1, r_2). Le jacobien de la transformation (8.33) est donc égal à

$$\frac{\partial(\rho_1, \rho_2)}{\partial(r_1, r_2)} = \begin{vmatrix} 2r_1 & 0 \\ 0 & 2r_2 \end{vmatrix} = 4r_1 r_2.$$

Compte tenu de $\frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(\rho_1, \rho_2)} = \frac{1}{4r_1 r_2}$ on trouve la densité de probabilité du carré de l'enveloppe, soit:

$$W_2(\rho_1, \rho_2, \tau, t) = \frac{1}{4\sigma^4 (1 - R_0^2)} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\rho_1 + \rho_2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 R_0}{2\sigma^2 (1 - R_0^2)}\right] \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m I_m \left[\frac{R_0 \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\sigma^2 (1 - R_0^2)}\right] I_m \left[\frac{a_1 - R_0 a_2}{\sigma^2 (1 - R_0^2)} \sqrt{\rho_1}\right] \times$$

$$\times I_m \left[\frac{a_2 - R_0 a_1}{\sigma^2 (1 - R_0^2)} \sqrt{\rho_2}\right], \quad \rho_1 > 0;\ \rho_2 > 0. \qquad (8.34)$$

En l'absence de signal, on a $a_1 = a_2 = 0$ et

$$W_2(\rho_1, \rho_2, \tau) = \frac{1}{4\sigma^4(1-R_0^2)} e^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} I_0\left[\frac{R_0\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right],$$
$$\rho_1 > 0, \ \rho_2 > 0. \qquad (8.35)$$

On peut facilement trouver la densité de probabilité unidimensionnelle à partir de (8.34) en faisant tendre τ vers l'infini. On a alors

$$W_1(\rho, t) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{\rho+a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{a\sqrt{\rho}}{\sigma^2}\right), \quad \rho > 0. \qquad (8.36)$$

Pour $a \gg \sigma$, on peut remplacer la fonction de Bessel par son expression asymptotique. On a

$$I_0\left(\frac{a\sqrt{\rho}}{\sigma^2}\right) \sim \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi a\rho^{1/2}}} e^{\frac{a\sqrt{\rho}}{\sigma^2}}.$$

La loi de distribution (8.36) peut alors s'écrire

$$W_1(\rho, t) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi a\rho^{1/2}}} e^{-\frac{(\sqrt{\rho}-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \rho > 0. \qquad (8.37)$$

Sur la figure 8.1 on a représenté les courbes de la distribution (8.36) pour différentes valeurs de $\frac{a}{\sigma}$.

Pour $\frac{a}{\sigma} = 0$ (en l'absence de signal) la densité de probabilité unidimensionnelle du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire est égale à [comparer avec (3.11)]

$$W_1(\rho) = \frac{\rho}{2\sigma^2} e^{-\frac{\rho}{2\sigma^2}}, \quad \rho > 0. \qquad (8.38)$$

Fig. 8.1. Densité de probabilité du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal

8.3.2. Fonction de corrélation du carré de l'enveloppe. On peut calculer la fonction de corrélation du carré de l'enveloppe connaissant l'expression de la densité de probabilité bidimensionnelle du carré de l'enveloppe, ceci en utilisant la méthode de développement de la densité bidimensionnelle suivant des polynômes orthogonaux.

Proposons-nous de calculer la fonction de corrélation du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal, dont la densité de probabilité bidimensionnelle est donnée par la formule (8.35), et la fonction unidimensionnelle est égale à $\frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{\rho}{2\sigma^2}}$ pour $\rho > 0$. Si l'on adopte cette dernière en qualité de fonction de pondération sur l'intervalle $(0, \infty)$, il lui correspondra l'ensemble des polynômes de Laguerre $L_n^{(0)}\left(\frac{\rho}{2\sigma^2}\right)$.

Le développement de la densité de probabilité bidimensionnelle (8.35) en série suivant ces polynômes est de la forme [comparer avec (8.24)]

$$\frac{1}{4\sigma^4(1-R_0^2)} e^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} I_0\left[\frac{R_0\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\sigma^2(1-R_0^2)}\right] = \frac{1}{4\sigma^4} e^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n} L_n^{(0)}\left(\frac{\rho_1}{2\sigma^2}\right) L_n^{(0)}\left(\frac{\rho_2}{2\sigma^2}\right). \qquad (8.39)$$

En utilisant (8.39) écrivons la fonction de corrélation du carré de l'enveloppe sous la forme d'une série, soit:

$$B_{E^2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n} \frac{1}{4\sigma^2} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \rho_1\rho_2 L_n^{(0)}\left(\frac{\rho_1}{2\sigma^2}\right) L_n^{(0)}\left(\frac{\rho_2}{2\sigma^2}\right) \times e^{-\frac{\rho_1+\rho_2}{2\sigma^2}} d\rho_1\, d\rho_2 = 4\sigma^4 \sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n} c_n^2, \qquad (8.40)$$

où

$$c_n = \int_0^{\infty} x L_n^{(0)}(x)\, e^{-x}\, dx. \qquad (8.41)$$

Se souvenant de la définition des polynômes de Laguerre, on peut facilement calculer l'intégrale (8.41):

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} x\, e^{-x} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left[\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^n e^{-x})\right]_0^{\infty} = 0, \quad n \geqslant 2.$$

Par conséquent, dans la série (8.40) seuls les deux premiers coefficients c_0 et c_1 sont différents de zéro. Ces coefficients peuvent

être facilement calculés directement :

$$c_0 = \int_0^\infty x e^{-x}\, dx = 1, \quad c_1 = \int_0^\infty x(1-x)\, e^{-x}\, dx = -1.$$

Ainsi la fonction de corrélation du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal est égale à

$$B_{E^2}(\tau) = 4\sigma^4\,[1 + R_0^2(\tau)]. \tag{8.42}$$

Le coefficient de corrélation du carré de l'enveloppe est

$$R_{E^2}(\tau) = R_0^2(\tau). \tag{8.42'}$$

En comparant (8.42) et (7.62) on voit que, comme il fallait s'y attendre, le spectre énergétique du carré de l'enveloppe coïncide. à une constante près, avec la partie basse fréquence d'un processus aléatoire normal stationnaire après détection quadratique.

8.3.3. Limitation parfaite de l'enveloppe. Nous allons maintenant calculer la fonction de corrélation de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite ayant traversé un limiteur parfait. La transformation non linéaire dans un limiteur parfait est donnée par la fonction (7.86).

Pour résoudre ce problème nous allons employer la méthode directe. En utilisant le développement (8.24) de la densité de probabilité de l'enveloppe, on trouve l'expression suivante pour la fonction de corrélation de l'enveloppe ayant subi la limitation parfaite :

$$B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 R_0^{2n}(\tau), \tag{8.43}$$

où

$$c_n = \frac{\alpha_0}{\sigma^2} \int_{x_0}^{\infty} r L_n^{(0)}\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, dr = \alpha_0 \int_{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}^{\infty} L_n^{(0)}(y)\, e^{-y}\, dy, \tag{8.44}$$

x_0 étant le niveau de limitation.

Pour $n = 0$ on obtient directement à partir de (8.44)

$$c_0 = \alpha_0 \int_{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}^{\infty} e^{-y}\, dy = \alpha_0\, e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{8.45}$$

Par définition du polynôme de Laguerre $L_n^{(0)}(y)$ on peut facilement calculer les coefficients c_n pour $n \geqslant 1$. En effet, en vertu de (8.44)

on obtient

$$c_n = \frac{(-1)^n \alpha_0}{n!} \int\limits_{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}^{\infty} \frac{d^n}{dy^n} (y^n e^{-y})\, dy = (-1)^n \frac{\alpha_0}{n!} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (y^n e^{-y}) \Big|_{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}^{\infty}$$

et en introduisant le polynôme de Laguerre généralisé $L_{n-1}^{(1)}(y)$ on obtient finalement

$$c_n = \frac{\alpha_0 x_0^2}{2\sigma^2 n} L_{n-1}^{(1)} \left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{8.46}$$

Pour calculer $L_{n-1}^{(1)} \left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right)$ on peut utiliser le développement *)

$$L_{n-1}^{(1)} \left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-1-k} \left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right)^k. \tag{8.47}$$

8.3.4. Détecteur logarithmique. Examinons en conclusion la transformation logarithmique de l'enveloppe

$$E_1(t) = \ln E(t). \tag{8.48}$$

Cherchons tout d'abord la moyenne et la variance du logarithme de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle et de variance σ^2. Comme la distribution unidimensionnelle de $E(t)$ suit dans ce cas la loi de Rayleigh, on a

$$m_1\{E_1(t)\} = \int\limits_0^{\infty} \ln r \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr, \tag{8.49}$$

$$m_2\{E_1(t)\} = \int\limits_0^{\infty} \ln^2 r \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr. \tag{8.49'}$$

Le changement de variable $u = \frac{r^2}{2\sigma^2}$ dans les intégrales (8.49) et (8.49') donne

$$m_1\{E_1\} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} (\ln u + \ln 2\sigma^2)\, e^{-u}\, du,$$

$$m_2\{E_1\} = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\infty} (\ln u + \ln 2\sigma^2)^2\, e^{-u}\, du.$$

---

*) Voir (11) dans l'annexe IV.

Par définition, la fonction gamma (voir § 1.2.3) est

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty u^x e^{-u}\, du.$$

On a alors

$$\Gamma'(x+1) = \int_0^\infty \ln u\, u^x e^{-u}\, du = \psi(x+1)\,\Gamma(x+1),$$

$$\Gamma''(x+1) = \int_0^\infty (\ln u)^2 u^x e^{-u} du.$$

Par conséquent *)

$$\int_0^\infty \ln u \cdot e^{-u} du = \Gamma'(1) = \psi(1) = -C,$$

$$\int_0^\infty \ln^2 u \cdot e^{-u}\, du = \Gamma''(1) = \psi'(1) + \psi^2(1) = \frac{\pi^2}{6} + C^2,$$

où $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$ et $C = 0{,}5772$ est la constante d'Euler.

Utilisant les relations obtenues on trouve

$$m_1\{E_1(t)\} = \frac{\ln 2\sigma^2 - C}{2}, \tag{8.50}$$

$$m_2\{E_1(t)\} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi^2}{6} + (C - \ln 2\sigma^2)^2\right]. \tag{8.51}$$

En vertu de (8.50) et (8.51) la variance du logarithme de l'enveloppe est

$$\sigma_{E_1}^2 = m_2\{E_1\} - m_1^2\{E_1\} = \frac{\pi^2}{24} \approx 0{,}41. \tag{8.52}$$

Passons maintenant au calcul de la fonction de corrélation du logarithme de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire

$$B_{E_1}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \ln r_1 \ln r_2\, W_{2E}(r_1, r_2, \tau)\, dr_1 dr_2, \tag{8.53}$$

où W_{2E} est la densité de probabilité bidimensionnelle de l'enveloppe [voir (8.21)].

---

*) Voir, par exemple, I. S. Gradstein et I. M. Rygik. *Tables des intégrales, sommes, séries et produits* (en russe). Physmathguiz, Moscou, 1962, § 8.36.

Utilisant le développement (8.24) de cette fonction en série suivant les polynômes de Laguerre, on obtient à partir de (8.53)

$$B_{E_1}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 R_0^{2n}(\tau), \tag{8.54}$$

où

$$c_n=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty} r \ln r L_n^{(0)}\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, dr. \tag{8.55}$$

Pour calculer l'intégrale (8.55) passons à la nouvelle variable $u=\frac{r^2}{2\sigma^2}$ et utilisons la formule (11) de l'annexe IV. On a alors

$$c_n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{\infty}(\ln u+\ln 2\sigma^2)\, u^k e^{-u}\, du=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\Gamma'(k+1)+\Gamma(k+1)\ln 2\sigma^2\right]. \tag{8.56}$$

Pour $n=0$ on obtient à partir de (8.56) $c_0=\frac{1}{2}\left[\Gamma'(1)+\ln 2\sigma^2\right]=$ $=m_1\{E_1\}$. Ce résultat n'est pas surprenant, en effet pour $n\geqslant 1$ la somme $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$, et pour les autres coefficients c_n on a

$$c_n=\frac{1}{2}\left[-C+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\psi(k+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}=-\frac{1}{2n},\quad n\geqslant 1. \tag{8.57}$$

A partir de (8.57) et (8.54) on obtient finalement

$$B_{E_1}(\tau)=m_1^2\{E_1\}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{2n}(\tau)}{n^2}. \tag{8.58}$$

Pour $\tau=0$, (8.58) coïncide avec (8.51), car $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

8.4. CARACTÉRISTIQUES PROBABILISTES DE LA PHASE

8.4.1. Densité de probabilité unidimensionnelle et moments. En comparant (8.9) et (3.69) on voit que pour trouver la densité de probabilité de la phase d'un processus aléatoire normal à bande

étroite [voir (8.3)] il suffit de se référer au problème du § 3.2.3 concernant la densité de probabilité de la phase d'un vecteur dont les composantes sont indépendantes et normales, de moyennes différentes de zéro. Utilisant (3.81) on peut écrire la densité de probabilité unidimensionnelle de la phase du processus (8.3), soit:

$$W_1(\vartheta, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} + \frac{a\cos(\vartheta - \vartheta_s)}{\sigma\sqrt{2\pi}} F\left[\frac{a}{\sigma}\cos(\vartheta - \vartheta_s)\right] \times$$
$$\times e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\sin^2(\vartheta - \vartheta_s)}, \quad |\vartheta - \vartheta_s| \leqslant \pi, \quad (8.59)$$

où

$$a = a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} \quad \text{et} \quad \vartheta_s = \vartheta_s(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{v(t)}{u(t)}.$$

Notons que la densité de probabilité (8.59) dépend tant de l'enveloppe $a(t)$ que de la phase $\vartheta_s(t)$ du processus déterministe, alors que la densité de probabilité (8.17) de l'enveloppe contient comme paramètre l'enveloppe $a(t)$ et non la phase $\vartheta_s(t)$.

Si le signal est une oscillation harmonique de pulsation ω_0 et d'amplitude u_0, on a $a = u_0$, $\vartheta_s = 0$ et en vertu de (8.59)

$$W_1(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2}{2}} + \frac{s\cos\vartheta}{\sqrt{2\pi}} F(s\cos\vartheta) e^{-\frac{s^2\sin^2\vartheta}{2}},$$
$$|\vartheta| \leqslant \pi, \quad (8.60)$$

où $s = \frac{u_0}{\sigma}$ est le rapport de l'amplitude du signal à la moyenne quadratique du bruit.

Il est évident qu'à tout instant fixé la distribution (8.59) a la même forme que (8.60), si seulement on transporte l'origine des coordonnées au point $\vartheta - \vartheta_s$ et si l'on introduit la désignation $s = \frac{a(t)}{\sigma}$. La figure 3.7 montre la famille de courbes $W_1(\vartheta)$ pour plusieurs valeurs de s.

En comparant le produit des distributions (8.17) et (8.59) avec la distribution conjointe de l'enveloppe et de la phase aux mêmes instants, on voit que l'enveloppe et la phase sont statistiquement *indépendantes*. Ce n'est qu'en l'absence de partie déterministe du processus, que son enveloppe et sa phase sont des grandeurs indépendantes aux mêmes instants *).

---

*) Notons également qu'un processus aléatoire $\xi(t)$ normal stationnaire à bande étroite de moyenne nulle et son enveloppe $E(t)$ aux mêmes instants ne sont pas cohérents. En vertu de (3.118) la distribution conjointe de $E(t)$, $\xi(t)$ et du processus conjugué $\eta(t)$ est

$$w_3(y, x_1, x_2) = w_2(x_1, x_2)\,\delta\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - y\right],$$

En l'absence de signal ($s = 0$)

$$W_1(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}, \quad |\vartheta| \leqslant \pi,$$

ce qui correspond à la distribution uniforme de la phase d'un processus aléatoire normal stationnaire.

Pour $s \ll 1$, c'est-à-dire lorsque l'amplitude du signal est bien inférieure à la moyenne quadratique du bruit (signal faible), on a conformément à (3.86)

$$W_1(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{s\cos\vartheta}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{s^2\cos 2\vartheta}{4\pi}, \quad s \ll 1. \tag{8.61}$$

Dans ce cas aux infiniment petits d'ordre s^2 près, le point d'intersection de $W_1(\vartheta)$ avec la droite $W_1 = \frac{1}{2\pi}$ est

$$\vartheta^* = \pm \arccos \frac{2s}{\sqrt{2\pi}} \approx \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2s}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Ainsi on a $W_1(\vartheta) > \frac{1}{2\pi}$ pour $|\vartheta| < \vartheta^*$ et $W_1(\vartheta) < \frac{1}{2\pi}$ pour $|\vartheta| > \vartheta^*$. En vertu de (8.61), pour un signal très faible, la densité de probabilité de la phase est une cosinusoïde d'amplitude $\frac{s}{2\sqrt{2\pi}}$ déplacée de $\frac{1}{2\pi}$ suivant l'axe des ordonnées.

Si $s\cos\vartheta > 3$, c'est-à-dire lorsque l'amplitude du signal est bien supérieure à la moyenne quadratique du bruit (signal intense), on a en vertu de (3.87)

$$W_1(\vartheta) = \frac{s\cos\vartheta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2\sin^2\vartheta}{2}}. \tag{8.62}$$

Pour $\vartheta \geqslant \frac{\pi}{2}$ ($s > 3$) on peut dire que $W_1(\vartheta) \equiv 0$, et pour des valeurs petites de ϑ

$$W_1(\vartheta) \approx \frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2\vartheta^2}{2}}, \tag{8.63}$$

---

d'où en vertu de la symétrie de la distribution conjointe $w_2(x_1, x_2)$ des processus $\xi(t)$ et $\eta(t)$ on a

$$m_1\{E(t)\,\xi(t)\} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty y x_1 w_2(x_1, x_2)\,\delta\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - y\right] dx_1\,dx_2\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, w_2(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0.$$

c'est-à-dire qu'on a une distribution normale de variance $\frac{1}{s^2}=\frac{\sigma^2}{u_0^2}$ égale au rapport bruit/signal dans le processus aléatoire normal initial.

Les moments de la phase sont en vertu de (3.92)

$$M_{2r}=m_{2r}=\frac{\pi^{2r}}{2r+1}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta^{2r}\cos k\vartheta\,d\vartheta, \tag{8.64}$$

$$m_{2r+1}=0, \quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

où

$$a_k=\frac{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)s^k}{\pi k\,!2^{k/2}}\ {}_1F_1\left(\frac{k}{2},k+1,\ -\frac{s^2}{2}\right). \tag{8.64'}$$

La variance σ_φ^2 de la phase aléatoire coïncide avec le second moment central [voir (3.93)]

$$\sigma_\varphi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{a_k}{k^2}. \tag{8.65}$$

Dans le cas d'un signal faible on peut se limiter au premier terme de la série (8.65), on a alors

$$\sigma_\varphi^2=\frac{\pi^2}{3}-4\pi a_1=\frac{\pi^2}{3}-s\sqrt{2\pi}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\ 2,-\frac{s^2}{2}\right)$$

ou

$$\sigma_\varphi^2\approx\frac{\pi^2}{3}-s\sqrt{2\pi},\quad s\ll 1. \tag{8.66}$$

Pour un signal intense, la variance de la phase décroît au fur et à mesure de l'augmentation de l'amplitude du signal, de plus

$$\sigma_\varphi^2\sim\frac{1}{s^2}. \tag{8.67}$$

La probabilité $P(\vartheta)$ pour le module de la phase d'un processus aléatoire normal à bande étroite d'être inférieur à ϑ est égale en vertu de (3.97), (3.97') à (voir également fig. 3.8)

$$P(\vartheta)=F(s\sin\vartheta)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)+2V(s\sin\vartheta,\ s\cos\vartheta), \tag{8.68}$$

$$0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$P(\vartheta)=F(s\sin\vartheta)+\frac{1}{\pi}\left(\vartheta-\frac{\pi}{2}\right)-2V(s\sin\vartheta,\ -s\cos\vartheta), \tag{8.68'}$$

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\pi,$$

où $V(h,\ q)$ est la fonction de Nicholson. Le premier terme dans ces formules correspond à la distribution normale asymptotique, vers

laquelle tend la distribution de la phase pour un signal intense ($s \gg 1$).

8.4.2. Densité de probabilité bidimensionnelle. Considérons d'abord la distribution de la phase d'un processus aléatoire normal stationnaire. Pour $a = \vartheta_s = 0$, en vertu de (8.16), on a

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2\sigma^4(1-R_0^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty r_1 r_2 \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2(1-R_0^2)}[r_1^2 + r_2^2 - 2R_0 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \vartheta_0)]\right\} dr_1\, dr_2. \quad (8.69)$$

L'intégrale (8.69) est calculée dans l'annexe II. Le calcul donne l'expression suivante:

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) = \frac{1-R_0^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{1-y^2} + y\frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin y}{(1-y^2)^{3/2}}\right], \quad (8.70)$$

$$|\vartheta_1| \leqslant \pi, \quad |\vartheta_2| \leqslant \pi,$$

où

$$y = R_c \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + R_s \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) =$$
$$= R_0 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1 - \vartheta_0). \quad (8.71)$$

En comparant le produit de la distribution (8.21) et de (8.71) avec la distribution conjointe de l'enveloppe et de la phase d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite, on voit que

$$w_4(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \tau) \neq W_2(r_1, r_2, \tau)\, W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau), \quad (8.72)$$

c'est-à-dire que l'enveloppe et la phase sont statistiquement indépendantes.

Pour $\tau \to \infty$, $R_c(\tau) \to 0$, $R_s(\tau) \to 0$, $y \to 0$, on a en vertu de (8.70)

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2) = W_1(\vartheta_1)\, W_1(\vartheta_2) = \frac{1}{4\pi^2}.$$

La relation (8.70) montre que pour $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \text{const}$, la densité de probabilité $W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) = \text{const}$, c'est-à-dire que les sections de la surface des probabilités $W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau)$ par le plan $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ et des plans qui lui sont parallèles sont des droites parallèles au plan $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ et, par conséquent, la surface des probabilités de la phase du bruit pur représente une surface réglée *). De plus la fonction $W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau)$ est paire par rapport au plan $\vartheta_1 - \vartheta_2$ qui est donc un plan de symétrie de la surface de distribution.

Le changement de niveau des droites de probabilité constante est donné par les sections de la surface $W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau)$ par une famille de plans parallèles $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \text{const}$, orthogonaux à la famille de

*) Rappelons que la surface réglée est une surface engendrée par une droite (génératrice) en translation le long d'une courbe quelconque (directrice). Dans notre cas l'équation de la directrice est donnée par la formule (8.70).

plans $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \text{const}$. L'une de ces sections (plan $\vartheta_1 = -\vartheta_2$) est représentée sur la figure 8.2. La densité de probabilité maximale correspondant à $\vartheta_1 = \vartheta_2$ est égale à

$$W_{2\,\max}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\left[1 + \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin R_c\right)\frac{R_c}{\sqrt{1-R_c^2}}\right]. \quad (8.73)$$

En vertu de (8.73) on a $W_{2\,\max}(\tau) \geqslant \frac{1}{4\pi^2}$, c'est-à-dire que la corrélation entre les phases augmente la densité de probabilité d'avoir $\vartheta_1 = \vartheta_2$, de plus, pour $\tau \to 0$ ($R_c \to 1$) cette densité augmente indéfiniment.

La densité minimale correspondant à $\vartheta_1 = \pi + \vartheta_2$ est égale à

$$W_{2\,\min}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1 - \arccos R_c \frac{R_c}{\sqrt{1-R_c^2}}\right). \quad (8.74)$$

En vertu de (8.74) on a $W_{2\,\min}(\tau) \leqslant \frac{1}{4\pi^2}$, c'est-à-dire que la corrélation entre les phases diminue la densité de probabilité d'avoir $\vartheta_1 = \pi + \vartheta_2$, cette densité tendant vers zéro pour $\tau \to 0$ ($R_c \to 1$).

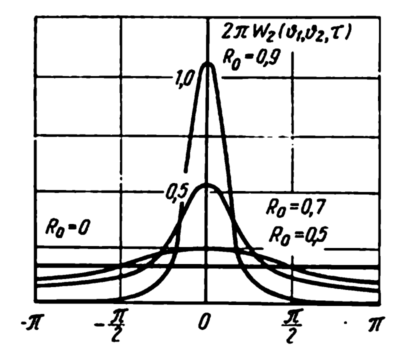


Fig. 8.2. Densité de probabilité de la différence de phases d'un processus aléatoire normal

Dans le cas général [$s(t) \neq 0$] il est commode de représenter la densité de probabilité bidimensionnelle de la phase par une série multiple de Fourier suivant les variables ϑ_1 et ϑ_2. A cette fin dans l'intégrale de la fonction (8.16) sur r_1 et r_2 il faut passer aux variables $z_1 = \frac{r_1}{\sigma}$, $z_2 = \frac{r_2}{\sigma}$ et utiliser la relation $e^{iz\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)\, e^{in\varphi}$. Pour simplifier les calculs nous nous limitons au signal de la forme $u(t)\cos\omega_0 t$ et supposons de plus que le spectre énergétique du bruit est symétrique par rapport à la pulsation ω_0, ce qui entraîne $R_s = 0$ et $R_c = R_0$. Ainsi, en posant $\vartheta_s = \vartheta_0 = 0$, $a_1 = u_1$, $a_2 = u_2$ dans (8.16), on obtient:

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau, t) = \frac{1}{4\pi^2(1-R_0^2)} \exp\left[-\frac{u_1^2 + u_2^2 - 2R_0 u_1 u_2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\right] \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty z_1 z_2 \exp\left[-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2(1-R_0^2)}\right] \sum_{r=-\infty}^{\infty} I_r\left(\frac{R_0 z_1 z_2}{1-R_0^2}\right) e^{ir(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n\left[\frac{u_1-R_0u_2}{\sigma(1-R_0^2)} z_1\right] e^{in\vartheta_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m\left[\frac{u_2-R_0u_1}{\sigma(1-R_0^2)} z_2\right] e^{im\vartheta_2}\, dz_1\, dz_2.$$

En changeant l'ordre de sommation et d'intégration et en introduisant les notations suivantes pour les coefficients du développement

$$A_{rnm}(\tau, t) = \frac{1}{4\pi^2(1-R_0^2)} \exp\left[-\frac{u_1^2+u_2^2-2R_0u_1u_2}{2\sigma^2(1-R_0^2)}\right] \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty z_1z_2 I_r\left(\frac{R_0z_1z_2}{1-R_0^2}\right) I_n\left[\frac{u_1-R_0u_2}{\sigma(1-R_0^2)} z_1\right] \times$$

$$\times I_m\left[\frac{u_2-R_0u_1}{\sigma(1-R_0^2)} z_2\right] \exp\left[-\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1-R_0^2)}\right] dz_1\, dz_2, \qquad (8.75)$$

on obtient le développement de la densité de probabilité bidimensionnelle de la phase sous la forme d'une série multiple de Fourier, soit :

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau, t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{rnm}\, e^{i[(r+n)\vartheta_1+(m-r)\vartheta_2]}, \qquad (8.76)$$

$$|\vartheta_1| \leqslant \pi, \quad |\vartheta_2| \leqslant \pi.$$

En l'absence de signal ($u_1 = u_2 = 0$) on obtient à partir de (8.76) le développement en série de Fourier de la densité de probabilité bidimensionnelle de la phase d'un processus aléatoire stationnaire

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r\, e^{ir(\vartheta_1-\vartheta_2)}, \qquad (8.77)$$

$$|\vartheta_1| \leqslant \pi, \quad |\vartheta_2| \leqslant \pi,$$

où

$$A_r(\tau) = A_{r00}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2(1-R_0^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty z_1z_2 \times$$

$$\times I_r\left(\frac{R_0z_1z_2}{1-R_0^2}\right) e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1-R_0^2)}}\, dz_1\, dz_2. \qquad (8.77')$$

Mais comme $A_r = A_{-r}$, on peut écrire (8.77) sous la forme

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) = A_0 + 2\sum_{r=0}^{\infty} A_r \cos r(\vartheta_1-\vartheta_2). \qquad (8.78)$$

L'expression (8.78) est le développement en série de Fourier de la fonction (8.70).

Les coefficients A_r peuvent être calculés en développant $I_r\left(\frac{R_0 z_1 z_2}{1-R_0^2}\right)$ en série de puissances, soit:

$$A_r = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_0^{r+2n}}{(1-R_0^2)^{r+1+2n}}\frac{1}{n!\,(n+r)!\,2^{r+2n}}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} z_1^{r+1+2n} z_2^{r+1+2n}\, e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1-R_0^2)}}\, dz_1\, dz_2 =$$

$$= \frac{1-R_0^2}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_0^{r+2n}}{n!\,(n+r)!\,2^{r+2n}}\left(\int_0^{\infty} x^{r+1+2n}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right)^2 =$$

$$= \frac{1-R_0^2}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2\left(n+1+\frac{r}{2}\right)}{n!\,(n+r)!}R_0^{r+2n}. \qquad (8.78')$$

L'expression (8.78') montre que dans (8.78) le terme constant est toujours égal à $\frac{1}{4\pi^2}$ car

$$A_0 = \frac{1-R_0^2}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+1)}{(n!)^2}R_0^{2n} =$$

$$= \frac{1-R_0^2}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} R_0^{2n} = \frac{1}{4\pi^2}.$$

En vertu de (8.77'), pour $r \geqslant 1$ on a

$$A_r(\tau) \to 0, \text{ si } \tau \to \infty,$$

$$A_r(\tau) \to \frac{1}{4\pi^2}, \text{ si } \tau \to 0.$$

Sur la figure 8.3 on a représenté les courbes des sept premières fonctions $A_r(R_0)$.

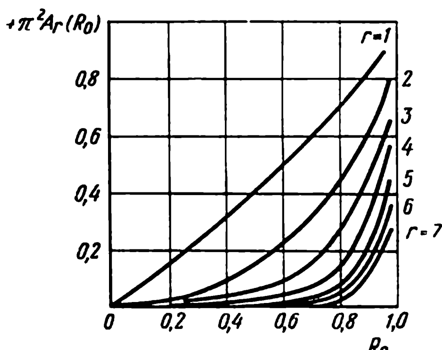


Fig. 8.3. Fonctions $A_r(R_0)$

8.4.3. Fonction de corrélation de la phase. A partir du développement en série (8.76) de la densité de probabilité bidimensionnelle de la phase, il est facile de calculer la fonction de corrélation de la phase

$$B_\varphi(t, \tau) = m_1\{\varphi(t)\,\varphi(t+\tau)\} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta_1\vartheta_2 W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau, t)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2 =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{rnm}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta_1\vartheta_2\, e^{i(r+n)\vartheta_1}\, e^{i(m-r)\vartheta_2}\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2.$$

Les variables figurant dans l'intégrale double se séparent et il est facile de calculer chacune de ces intégrales. On obtient ainsi

$$B_\varphi(t,\ \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -r}}^{\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq -r}}^{\infty} A_{rnm}(t,\ \tau) \frac{(-1)^{n+m} \cdot 4\pi^2}{(n+r)(m-r)}. \qquad (8.79)$$

En l'absence de signal on a

$$B_\varphi(\tau) = 8\pi^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} A_r(\tau). \qquad (8.80)$$

Pour $\tau \to \infty$, comme il fallait s'y attendre, on a en vertu de (8.80) $B_\varphi(\tau) \to 0$, et pour $\tau \to 0$ la somme de la série tend vers $\frac{\pi^2}{3}$, valeur de la variance de la phase, car $A_r(0) = \frac{1}{4\pi^2}$, et $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

L'expression explicite de $B_\varphi(\tau)$ écrite sous la forme d'une série de puissances de $R_0(\tau)$ peut être obtenue en portant (8.78') dans (8.80) :

$$B_\varphi(\tau) = 2(1 - R_0^2) \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n+1+\frac{r}{2}\right)}{r^2 n!\,(n+r)!} R_0^{r+2n} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n+\frac{r}{2}\right)}{n!\,(n+r)!} R_0^{r+2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2} R_0(\tau) + \frac{1}{4} R_0^2(\tau) + \frac{\pi}{12} R_0^3(\tau) + \ldots \qquad (8.81)$$

Pour le calcul approché de $B_\varphi(\tau)$ on peut utiliser les courbes de la figure 8.3.

8.4.4. Distribution unidimensionnelle de la différence de phases et ses moments. La densité de probabilité unidimensionnelle de la différence de phases $\Delta\varphi(t,\ \tau) = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ d'un processus aléatoire normal stationnaire ($u = 0$) peut être obtenue directement à partir de (8.70), car dans ce cas $W_2(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \tau)$ ne dépend que de la différence de phases. On a donc

$$W_{1\Delta\varphi}(\vartheta,\ \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} W_2(\vartheta_1,\ \vartheta+\vartheta_1,\ \tau)\, d\vartheta_1 =$$

$$= \frac{1-R_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{1-y^2} + y \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin y}{(1-y^2)^{3/2}} \right], \quad |\vartheta| \leqslant \pi, \qquad (8.82)$$

où

$$y = R_c(\tau)\cos\vartheta + R_s(\tau)\sin\vartheta = R_0(\tau)\cos[\vartheta - \vartheta_0(\tau)]. \qquad (8.83)$$

Lorsque $\tau \to \infty$, on a $R_c = R_s = y = 0$ et $W_{1\Delta\varphi}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}$, $|\vartheta| \leqslant \pi$.

En utilisant le développement (8.76) il est facile de trouver la densité de probabilité $W_{1\Delta\varphi}(\vartheta, \tau, t)$ de la différence de phases d'un processus normal pour le cas où $u \neq 0$ et $R_s = 0$

$$W_{1\Delta\varphi}(\vartheta, \tau, t) = \int_{-\pi}^{\pi} W_2(\vartheta + \vartheta_2, \vartheta_2, \tau, t)\, d\vartheta_2 =$$

$$= 2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{rnm}(\tau, t)\, e^{i(r+n)\vartheta} \frac{\sin(n+m)\pi}{n+m},$$

mais comme

$$\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = -n, \end{cases}$$

on a

$$W_{1\Delta\varphi}(\vartheta, \tau, t) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{r,\,n,\,-n}\, e^{i(r+n)\vartheta}$$

ou encore

$$W_{1\Delta\varphi}(\vartheta, \tau, t) = 2\pi \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,\,-n,\,n} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{k+n,\,n,\,-n} \cos k\vartheta \right]. \tag{8.84}$$

L'expression générale des moments de la distribution de la différence de phases est

$$m_{2q} = \frac{4\pi^{2+2q}}{2q+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,\,-n,\,n} + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\infty} \vartheta^{2q} \cos k\vartheta\, d\vartheta \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{k+n,\,n,\,-n}, \tag{8.85}$$

$$m_{2q+1} = 0, \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Pour la variance de la différence de phases on a

$$m_2 = M_2 = \frac{4\pi^4}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,\,-n,\,n} + 16\pi^2 \sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{k^2} \sum_{n=-\infty} A_{k+n,\,n,\,-n}. \tag{8.86}$$

Pour $u = 0$ on obtient une expression analogue à (8.65):

$$M_2 = \frac{\pi^2}{3} + 16\pi^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2} A_r,$$

où a_r est remplacé par $4\pi A_r$.

8.5. CARACTÉRISTIQUES PROBABILISTES DU COSINUS DE LA PHASE

8.5.1. Densité de probabilité unidimensionnelle et ses moments. Parfois on a besoin de connaître les caractéristiques statistiques non pas de la phase $\varphi(t)$, mais de $\cos\varphi(t)$. Utilisant les densités de probabilité de $\varphi(t)$ obtenues au chapitre précédent, on peut facilement calculer les densités de probabilité de $\cos\varphi(t)$. Il suffit pour cela d'utiliser les relations permettant de trouver les lois de distribution des fonctions de variables aléatoires (voir § 3.1).

Proposons-nous de trouver d'abord la densité de probabilité unidimensionnelle de $\cos\varphi(t)$. En effectuant dans (8.60) le changement de variable $z = \cos\vartheta$ on trouve l'expression suivante pour la densité de probabilité unidimensionnelle de $\cos\varphi$ (pour $|\vartheta| \leqslant \pi$ la fonction $\vartheta(z) = \arccos z$ est bivoque):

$$W_1(z) = w_1[\vartheta_1(z)]\left|\frac{d\vartheta_1}{dz}\right| + w_1[\vartheta_2(z)]\left|\frac{d\vartheta_2}{dz}\right|,$$

et comme

$$\left|\frac{d\vartheta_1}{dz}\right| = \left|\frac{d\vartheta_2}{dz}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

on a

$$W_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}\, e^{-\frac{s^2}{2}}\left[1 + sz\sqrt{2\pi}\, F(sz)\, e^{\frac{s^2z^2}{2}}\right], \qquad (8.87)$$

$$|z| \leqslant 1.$$

Sur la figure 8.4 on a représenté une famille de courbes de la distribution (8.87) pour plusieurs valeurs de s. Pour $s = 0$ (bruit pur) la courbe donne la distribution d'une oscillation harmonique d'amplitude unité et de phase aléatoire [voir (3.15)]

$$W_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}, \quad |z| \leqslant 1. \qquad (8.88)$$

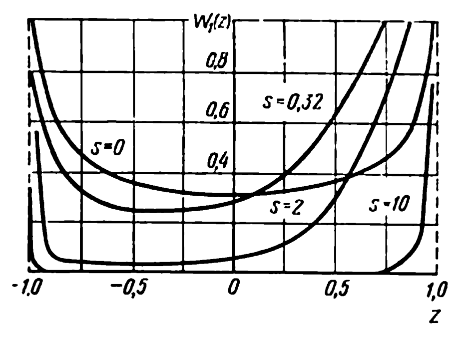


Fig. 8.4. Densité de probabilité du cosinus de la phase d'un processus aléatoire normal

Pour $s > 0$ la courbe devient asymétrique, la densité de probabilité pour s donné et $z_1 > 0$ est plus grande que pour $z_2 = -z_1$. Ceci est dû à ce que la densité de probabilité de la phase pour $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$ est plus grande que pour $|\vartheta| > \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que les valeurs positives de $\cos\vartheta$ sont plus probables que les valeurs négatives.

Quantitativement cette différence est donnée par l'égalité

$$W_1(-z)=W_1(z)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sz}{\sqrt{1-z^2}}e^{-\frac{s^2(1-z^2)}{2}}, \quad z>0. \quad (8.89)$$

En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction $W_1(\vartheta)$ [voir (3.90)] et vu que $\cos k \arccos z = T_k(z)$, où $T_k(z)$ est un polynôme de Tchébychev de première espèce d'ordre k, on peut obtenir son développement en série suivant les polynômes de Tchébychev :

$$W_1(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\frac{1}{\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}a_kT_k(z)\right], \quad |z|\leqslant 1. \quad (8.90)$$

Les coefficients a_k sont donnés par la formule (8.64').

Calculons maintenant les moments de la distribution de $\cos\varphi$, en utilisant les développements (7.17) et (7.18) des puissances du cosinus suivant les cosinus des arcs multiples. Vu l'orthogonalité des fonctions trigonométriques on obtient

$$m_{2n}=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}+\sum_{r=1}^{\infty}a_r\cos r\vartheta\right]\times$$
$$\times\frac{1}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}2\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)\vartheta+\binom{2n}{k}\right]d\vartheta=$$
$$=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}+\frac{\pi}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}a_{2(n-k)}\binom{2n}{k}, \quad (8.91)$$

$$m_{2n-1}=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}+\sum_{r=1}^{\infty}a_r\cos r\vartheta\right]\frac{1}{2^{2n-1}}\times$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\cos(2n-2k-1)\vartheta\right]d\vartheta=$$
$$=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}a_{2(n-k)-1}\binom{2n-1}{k}. \quad (8.92)$$

Les deux premiers moments de la distribution de $\cos\varphi$ sont

$$m_1=\pi a_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{s}{2}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\ 2,\ -\frac{s^2}{2}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{s}{2}\left[I_0\left(\frac{s^2}{4}\right)+I_1\left(\frac{s^2}{4}\right)\right]e^{-\frac{s^2}{4}}, \quad (8.93)$$

$$m_2=\frac{1}{2}+\frac{\pi a_2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{s^2}{8}\,{}_1F_1\left(1,\ 3,\ -\frac{s^2}{2}\right). \quad (8.94)$$

Calculons maintenant la probabilité d'avoir $\cos\varphi \leqslant z$, c'est-à-dire

$$P\{-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant z\} = F_{1c}(z).$$

Il est facile d'exprimer cette probabilité à l'aide de la densité de probabilité $P(\vartheta)$ de la phase [voir (8.68)], on a:

$$P\{-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant z\} = P\{-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\arccos z\} + \\ + P\{\arccos z \leqslant \varphi \leqslant \pi\} = 1 - P\{-\arccos z \leqslant \varphi \leqslant \\ \leqslant \arccos z\}$$

ou

$$F_{1c}(z) = 1 - P(\arccos z). \qquad (8.95)$$

La relation (8.95) montre que la probabilité $1 - F_{1c}(z)$ d'avoir $z \leqslant \cos\varphi \leqslant 1$ coïncide simplement avec $P(\arccos z)$, pour le calcul de cette probabilité on peut alors utiliser les formules du § 8.4.1.

La probabilité d'avoir $\cos\varphi$ positif est égale à

$$1 - F_{1c}(0) = P\left(\frac{\pi}{2}\right) = F(s). \qquad (8.95')$$

En l'absence de signal ($s \equiv 0$), $P(\arccos z) = \frac{\arccos z}{\pi}$ et

$$F_{1c}(z) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos z.$$

En utilisant (8.84) il est facile d'écrire l'expression de la densité de probabilité unidimensionnelle du cosinus de la différence de phases $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t+\tau)$. On a:

$$W_{1\cos\Delta\varphi}(z) = \frac{4\pi}{\sqrt{1-z^2}}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,-n,n} + \right. \\ \left. + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_k(z) A_{k+n,n,-n}\right], \quad |z| \leqslant 1. \qquad (8.96)$$

Pour un processus aléatoire stationnaire ($u_1 = u_2 = 0$) (8.96) devient

$$W_{1\cos\Delta\varphi}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\frac{1}{\pi} + 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(z)\right], \quad |z| \leqslant 1, \qquad (8.97)$$

où les coefficients A_k sont donnés par (8.77'). La formule (8.97) peut également être obtenue à partir de (8.78).

Par analogie avec (8.91) et (8.92) on peut écrire les moments de la distribution de la grandeur cos $\Delta\varphi$, soit :

$$m_{2q-1}=\frac{4\pi^2}{2^{2q-2}}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{2q-1}{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{2q-2k-n-1,\,n,\,-n},\tag{8.98}$$

$$m_{2q}=\frac{4\pi^2}{2^{2q}}\binom{2q}{q}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{n,\,-n,\,n}+$$

$$+\frac{4\pi^2}{2^{2q-1}}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\binom{2q}{k}A_{2(q-k)-n,\,n,\,-n}.\tag{8.99}$$

Pour un processus aléatoire normal stationnaire les deux premiers moments de la distribution de cos $\Delta\varphi$ sont :

$$m_1=4\pi^2A_1,\tag{8.100}$$

$$m_2=\frac{1}{2}+4\pi^2A_2.\tag{8.101}$$

8.5.2. Densité de probabilité bidimensionnelle. Passons maintenant au calcul de la densité de probabilité bidimensionnelle du cosinus de la phase. On peut utiliser l'expression (8.76) et effectuer le changement de variables $z_1 = \cos\vartheta_1$, $z_2 = \cos\vartheta_2$. Les fonctions inverses pour $|\vartheta_1| \leqslant \pi$, $|\vartheta_2| \leqslant \pi$ sont bivoques, c'est ainsi qu'à chaque point du plan (z_1, z_2) correspondent quatre points du plan $(\vartheta_1, \vartheta_2)$:

$$\vartheta_{11} = \arccos z_1,\qquad \vartheta_{12} = -\arccos z_1,$$
$$\vartheta_{21} = -\arccos z_2,\qquad \vartheta_{22} = \arccos z_2.$$

Comme il est facile de le voir, les jacobiens des transformations sont

$$\left|\frac{\partial(\vartheta_{11},\vartheta_{21})}{\partial(z_1,z_2)}\right|=\left|\frac{\partial(\vartheta_{11},\vartheta_{22})}{\partial(z_1,z_2)}\right|=\left|\frac{\partial(\vartheta_{12},\vartheta_{21})}{\partial(z_1,z_2)}\right|=$$
$$=\left|\frac{\partial(\vartheta_{12},\vartheta_{22})}{\partial(z_1,z_2)}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}}.$$

Etudions plus en détail ce qui se passe en l'absence de signal. L'expression (8.78) donne :

$$W_2(z_1,z_2,\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}}[W_2(\vartheta_{11},\vartheta_{21},\tau)+$$
$$+W_2(\vartheta_{11},\vartheta_{22},\tau)+W_2(\vartheta_{12},\vartheta_{21},\tau)+W_2(\vartheta_{12},\vartheta_{22},\tau)]=$$
$$=\frac{4}{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}}\left\{\frac{1}{4\pi^2}+\sum_{r=1}^{\infty}A_r\,[\cos(r\arccos z_1)\times\right.$$

$$\times \cos(r \arc\cos z_2) - \sin(r \arc\cos z_1) \sin(r \arc\cos z_2)] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} A_r [\cos(r \arc\cos z_1) \cos(r \arc\cos z_2) +$$

$$+ \sin(r \arc\cos z_1) \sin(r \arc\cos z_2)]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}} \left[\frac{1}{4\pi^2} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r \cos(r \arc\cos z_1) \cos(r \arc\cos z_2)\right]$$

et, en introduisant les polynômes de Tchébychev $T_r(z) = \cos(r \arc\cos z)$, on obtient

$$W_2(z_1, z_2, \tau) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}} \Big[1 +$$

$$+ 8\pi^2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r(\tau) T_r(z_1) T_r(z_2)\Big], \quad |z_1| \leqslant 1, \quad |z_2| \leqslant 1, \tag{8.102}$$

où $A_r(\tau)$ sont donnés par la formule (8.78').

Remarquons que la série (8.102) donne le développement de la densité de probabilité bidimensionnelle du cosinus de la phase d'un processus aléatoire normal stationnaire suivant les polynômes orthogonaux de Tchébychev, ce qui est en accord parfait avec la méthode générale exposée au § 2.4.4, car la densité de probabilité unidimensionnelle de $\cos\varphi$, égale à $\frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}$ sur l'intervalle $-1 \leqslant z \leqslant 1$, coïncide avec la fonction de pondération des polynômes $T_r(z)$ (au facteur $\frac{1}{\pi}$ près).

8.5.3. **Fonction de corrélation.** Le développement (8.102) permet de trouver facilement la fonction de corrélation de $\cos\varphi$:

$$B(\tau) = m_1\{\cos\varphi(t)\cos\varphi(t+\tau)\} =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} z_1 z_2 W_2(z_1, z_2, \tau)\, dz_1\, dz_2 = 2 \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 A_r(\tau),$$

où

$$c_r = 2\int_{-1}^{1} z T_r(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \begin{cases} \pi, & r = 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Ainsi [voir (8.77')],

$$B(\tau) = 2\pi^2 A_1(\tau) = \frac{1}{2(1-R_0^2)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} z_1 z_2 I_1\left(\frac{R_0 z_1 z_2}{1-R_0^2}\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1-R_0^2)}\right] dz_1\, dz_2 \tag{8.103}$$

ou, compte tenu de (8.78′), on a

$$B(\tau)=\frac{1-R_0^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2\left(n+\frac{3}{2}\right)}{n!\,(n+1)!}R_0^{2n+1}(\tau)=$$

$$=\frac{\pi R_0(\tau)}{8}\left[1+\frac{R_0^2(\tau)}{8}+\frac{3R_0^4(\tau)}{64}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{R_0^{2n}(\tau)}{n+1}+\ldots\right]. \qquad (8.104)$$

On peut écrire autrement la fonction de corrélation du cosinus de la phase. Pour cela il suffit d'exprimer l'intégrale double dans (8.103) à l'aide de fonctions hypergéométriques, qui pour le cas qui nous intéresse se réduisent à des intégrales elliptiques complètes. Laissant de côté les calculs intermédiaires, donnons le résultat

$$B(\tau)=\frac{1}{2R_0}\left[\mathrm{E}(R_0)-(1-R_0^2)\,\mathrm{K}(R_0)\right], \qquad (8.105)$$

où K et E sont des intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce respectivement.

On peut calculer la fonction de corrélation de cos φ sans calculer préalablement la densité de probabilité bidimensionnelle, ce qui est particulièrement important pour le cas de la présence du signal, car dans ce cas les calculs sont assez compliqués. Il est évident que l'on a

$$B(\tau)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}z_1z_2W_2(z_1,\ z_2,\ \tau)\,dz_1dz_2=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2W_2(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \tau)\,d\vartheta_1d\vartheta_2, \qquad (8.106)$$

où $W_2(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \tau)$ est la densité de probabilité bidimensionnelle de la phase. Utilisant (8.76) et changeant l'ordre de sommation et d'intégration, on obtient

$$B(\tau)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_{rnm}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\times$$

$$\times e^{i(r+n)\vartheta_1}e^{i(m-r)\vartheta_2}\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2.$$

En vertu de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\vartheta_1e^{i(n+r)\vartheta_1}\,d\vartheta_1=\begin{cases}\pi, & n+r=\pm1,\\ 0, & n+r\neq\pm1,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\vartheta_2e^{i(m-r)\vartheta_2}\,d\vartheta_2=\begin{cases}\pi, & m-r=\pm1,\\ 0, & m-r\neq\pm1.\end{cases}$$

On obtient ainsi l'expression pour la fonction de corrélation de cos φ sous la forme de la série

$$B(\tau)=\pi^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_{r,\,-r\pm 1,\,r\pm 1}(\tau), \tag{8.107}$$

dont les termes sont donnés par la formule (8.75). En l'absence de signal tous les termes, à l'exception de $A_{1,\,0,\,0}=A_1$, s'annulent et l'expression (8.107) devient (8.103).

8.6. CARACTÉRISTIQUES PROBABILISTES DES DÉRIVÉES

8.6.1. Distribution conjointe de l'enveloppe, de la phase et de leurs dérivées. Examinons d'abord le cas général du calcul de la distribution conjointe aux mêmes instants de l'enveloppe, de la phase et de leurs dérivées premières dans le cas d'un processus aléatoire normal à bande étroite dérivable en moyenne quadratique. Pour simplifier les calculs nous nous limitons au cas où la partie déterministe du processus est une oscillation harmonique d'amplitude constante u.

Pour résoudre ce problème on part de la distribution quadridimensionnelle conjointe des processus aléatoires normaux $A(t)$, $C(t)$ et de leurs dérivées aux mêmes instants. Conformément au § 6.2.2 la matrice de corrélation de cette distribution est [voir également (8.10)]

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & R_s'(0) \\ 0 & 1 & -R_s'(0) & 0 \\ 0 & -R_s'(0) & -R_c''(0) & 0 \\ R_s(0) & 0 & 0 & -R_c''(0) \end{Vmatrix}.$$

En vertu des formules (6.57) et (6.55) on a [voir également (4.137'), (8.11) et (8.12)]

$$-R_s'(0)=\frac{\int\limits_0^\infty (\omega-\omega_0)F(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty F(\omega)\,d\omega}=\omega_{\text{moy}}-\omega_0=\omega^*, \tag{8.108}$$

$$-R_c''(0)=\frac{\int\limits_0^\infty (\omega-\omega_0)^2F(\omega)\,d\omega}{\int\limits_0^\infty F(\omega)\,d\omega}=\omega_*^2=\omega_1^2-2\omega_{\text{moy}}\omega_0+\omega_0^2, \tag{8.109}$$

où $F(\omega)$ est le spectre énergétique de la partie stationnaire d'un processus aléatoire normal à bande étroite.

Le déterminant de la matrice de corrélation ci-dessus est

$$D = (\omega_*^2 - \omega^{*2})^2 = (\omega_1^2 - \omega_{moy}^2)^2.$$

A partir de (4.159) on a :

$$w_4(x, x', y, y') = \frac{1}{(2\pi)^2 (\omega_*^2 - \omega^{*2}) \sigma^4} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 (\omega_*^2 - \omega^{*2})} [\omega_*^2 (x^2 + y^2) + \right.$$
$$\left. + (x'^2 + y'^2) - 2\omega^* (xy' - yx')]\right\}. \quad (8.110)$$

En effectuant dans la densité de probabilité (8.110) le changement de variables

$$\begin{aligned} x + u &= r \cos \vartheta, \ y = r \sin \vartheta, \\ x' &= r' \cos \vartheta - r\vartheta' \sin \vartheta, \\ y' &= r' \sin \vartheta + r\vartheta' \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (8.111)$$

on obtient la distribution quadridimensionnelle $W_4(r, r', \vartheta, \vartheta')$ cherchée de l'enveloppe, de la phase et de leurs dérivées. Comme le jacobien de la transformation (8.111) est

$$\frac{\partial (x, x', y, y')}{\partial (r, r', \vartheta, \vartheta')} = r^2, \quad (8.111')$$

on a

$$W_4(r, r', \vartheta, \vartheta') = \frac{r^2}{4\pi^2 \sigma^4 (\omega_*^2 - \omega^{*2})} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 (\omega_*^2 - \omega^{*2})} [\omega_*^2 (r^2 - 2ru \cos \vartheta + u^2) + \right.$$
$$+ r'^2 + r^2\vartheta'^2 - 2\omega^* r^2 \vartheta' +$$
$$\left. + 2\omega^* u (r' \sin \vartheta + r\vartheta' \cos \vartheta)]\right\}. \quad (8.112)$$

8.6.2. Densité de probabilité de la dérivée de l'enveloppe. Pour trouver la distribution conjointe $W_2(r, r')$ de l'enveloppe et de sa dérivée aux mêmes instants il convient d'intégrer (8.112) sur ϑ et ϑ'. Cette intégration est facile à réaliser si le spectre énergétique $F(\omega)$ est symétrique et la porteuse ω_0 coïncide avec la pulsation moyenne ω_{moy}. On a alors $\omega^* = 0$ et

$$W_2(r, r') = \frac{r^2}{4\pi^2 \sigma^4 \omega_*^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(r^2 + u^2 + \frac{r'^2}{\omega_*^2}\right)\right] \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2\vartheta'^2}{2\sigma^2\omega_*^2} - \frac{ur \cos \vartheta}{\sigma^2}\right) d\vartheta' \, d\vartheta,$$

d'où

$$W_2(r, r') = \frac{r}{\sigma^3 \omega_* \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(r^2 + u^2 + \frac{r'^2}{\omega_*^2}\right)\right] I_0\left(\frac{ur}{\sigma^2}\right). \quad (8.113)$$

Comparant (8.113) et (8.17) on trouve

$$W_2(r, r') = W_1(r) \frac{1}{\sigma\omega_* \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r'^2}{2\sigma^2\omega_*^2}}, \tag{8.114}$$

c'est-à-dire que la distribution conjointe de l'enveloppe et de sa dérivée est égale au produit de la densité de probabilité de l'enveloppe (fonction de Rayleigh généralisée) par la densité de probabilité de la dérivée, qui est normale de moyenne nulle et de variance $\sigma^2\omega_*^2$. En vertu de (8.114) l'enveloppe d'un processus normal à bande étroite et la dérivée de cette enveloppe sont *indépendantes* aux mêmes instants [comparer avec (4.141)].

8.6.3. **Densité de probabilité de la pulsation et ses moments.** Calculons maintenant la densité de probabilité de la phase et de sa dérivée. Supposant toujours que le spectre énergétique $F(\omega)$ est symétrique, intégrons (8.112) sur r et r'. L'intégration sur r' s'effectue immédiatement, on obtient ainsi

$$W_2(\vartheta, \vartheta') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}\omega_*} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \times$$
$$\times \int_0^\infty r^2 \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)+\frac{ur}{\sigma^2}\cos\vartheta\right] dr. \tag{8.115}$$

Enfin, en intégrant sur ϑ on trouve la densité de probabilité de la dérivée de la phase d'un processus aléatoire normal

$$W_1(\vartheta') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}\omega_*} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty r^2 \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)+\frac{ur}{\sigma^2}\cos\vartheta\right] dr\, d\vartheta =$$
$$= \frac{1}{\sigma^3\omega_*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty r^2 I_0\left(\frac{ur}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)} dr.$$

L'intégrale obtenue s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique (voir annexe V). On a alors pour $W_1(\vartheta')$ l'expression suivante

$$W_1(\vartheta') = \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\omega_*\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sigma^3\sqrt{2}}{\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)^{3/2}} \times$$
$$\times {}_1F_1\left[\frac{3}{2}, 1, \frac{u^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)}\right]$$

et avec les notations $s = \frac{u}{\sigma}$, $v = 1 + \frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}$ on obtient

$$W_1(\vartheta') = \frac{1}{2\omega_* v^{3/2}} \, {}_1F_1\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{s^2}{2v}\right) e^{-\frac{s^2}{2}}. \qquad (8.116)$$

La fonction hypergéométrique dans (8.116) s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et des fonctions de Bessel [voir (4) et (6) de l'annexe V]. Comme nous l'avons déjà noté la grandeur

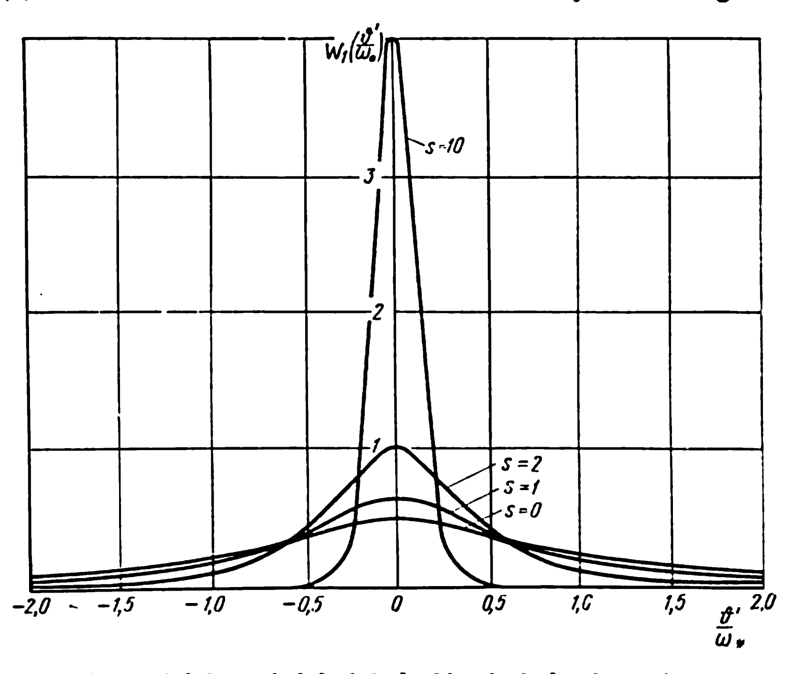


Fig. 8.5. Densité de probabilité de la dérivée de la phase d'un processus aléatoire normal

ω_* est proportionnelle à la largeur de bande du spectre énergétique du processus aléatoire.

L'expression (8.116) montre que la fonction $W_1(\vartheta')$ est paire et la courbe correspondante est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Sur la figure 8.5 on a représenté la famille de courbes $W_1(\vartheta')$ pour plusieurs valeurs de s.

Pour un processus aléatoire normal stationnaire ($u = 0$) la densité de probabilité de la dérivée de la phase est égale à

$$W_1(\vartheta') = \frac{1}{2\omega_* v^{3/2}} = \frac{1}{2\omega_*}\left(1 + \frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)^{-\frac{3}{2}}. \qquad (8.117)$$

En comparant (8.117) et (8.115) pour $u = 0$ on voit que la distribution conjointe de la phase et de sa dérivée en cas d'un processus aléatoire normal stationnaire est égale au produit des densités de probabilité unidimensionnelles de la phase et de sa dérivée, par suite, ces grandeurs sont indépendantes aux mêmes instants [ce qui est en accord avec le résultat général (4.141)].

La fonction de répartition de la dérivée de la phase est égale à

$$F_1(\vartheta') = \frac{1}{2\omega_*} \int_{-\infty}^{\vartheta'} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{\omega_*^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_*^2}{\vartheta'^2}}}\right), \quad (8.118)$$

$$\vartheta' > 0, \; F_1(-\vartheta') = 1 - F_1(\vartheta').$$

Il est également facile de trouver la probabilité pour la dérivée de la phase d'un processus normal stationnaire d'être inférieure en valeur absolue à une pulsation donnée Ω:

$$P\{|\vartheta'| \leqslant \Omega\} = 2\int_0^{\Omega} W_1(\vartheta')\, d\vartheta' = 2\,[F_1(\Omega) - F_1(0)] = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_*^2}{\Omega^2}}}. \quad (8.119)$$

Si $\Omega \gg \omega_*$, on a

$$P\{|\vartheta'| \leqslant \Omega\} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_*}{\Omega}\right)^2. \quad (8.119')$$

Considérons les formules approchées de la distribution de la dérivée de la phase pour les cas où l'amplitude u du signal est petite et où elle est grande par rapport à σ.

Si $u \ll \sigma$, en développant dans (8.116) la fonction hypergéométrique en série de Taylor et en ne conservant que les deux premiers termes on obtient

$$W_1(\vartheta') \approx \frac{\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)^{-\frac{3}{2}}}{2\omega_*}\left\{1 - \frac{s^2}{2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)^{-1}\right]\right\}. \quad (8.120)$$

Pour $u \gg \sigma$ en utilisant le développement asymptotique de la fonction hypergéométrique, on trouve

$$W_1(\vartheta') \sim \frac{s}{\omega_*\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)^2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{s^2\vartheta'^2}{2\omega_*^2\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)}\right\}. \quad (8.121)$$

Pour $\vartheta'^2 \ll \omega_*^2$ et $u \gg \sigma$ la dérivée de la phase est à distribution normale de variance $\left(\frac{\omega_*}{s}\right)^2$. Cette distribution tend vers la fonction delta lorsque s augmente indéfiniment.

La valeur moyenne de la dérivée de la phase est égale à zéro en vertu de la symétrie de $W_1(\vartheta')$ *). Lorsque l'on essaie de calculer la variance de la dérivée de la phase, on se heurte à ce que l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \vartheta'^2 W_1(\vartheta')\, d\vartheta'$ est divergente. En effet, en vertu de (8.116) $W_1(\vartheta')$ décroît pour $\vartheta' \to \infty$ comme $(\vartheta')^{-3}$ et, par conséquent, la fonction se trouvant sous l'intégrale décroît comme $(\vartheta')^{-1}$, c'est-à-dire trop lentement pour assurer la convergence de l'intégrale impropre. Ainsi la variance de la dérivée de la phase est illimitée **). La distribution (8.116) est encore un exemple de distribution d'une variable aléatoire sans variance.

On peut prendre pour caractéristique numérique de la distribution de la dérivée de la phase la moyenne des valeurs absolues, c'est-à-dire

$$m_1\{|\varphi'|\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\vartheta'|\, W_1(\vartheta')\, d\vartheta' = 2\int\limits_0^{\infty} \vartheta' W_1(\vartheta')\, d\vartheta'. \tag{8.122}$$

En portant dans (8.122) l'expression de $W_1(\vartheta')$ obtenue à partir de (8.116) et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$m_1\{|\varphi'|\} = \frac{2e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\omega_* \sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} r^2 I_0\left(\frac{ur}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \vartheta' \exp\left(-\frac{u^2\vartheta'^2}{2\sigma^2\omega_*^2}\right) d\vartheta'\, dr =$$

$$= \frac{2\omega_* e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} I_0\left(\frac{ur}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, dr = \omega_*\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2},\, 1,\, -\frac{u^2}{2\sigma^2}\right),$$

ou, en exprimant la fonction hypergéométrique à l'aide d'une fonction de Bessel (voir annexe V), on trouve

$$m_1\{|\varphi'|\} = \omega_* e^{-\frac{u^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{u^2}{4\sigma^2}\right). \tag{8.123}$$

*) Il s'agit de la valeur moyenne du carré de l'écart de la dérivée de la phase par rapport à ω_0.

**) Ce résultat n'est pas contradictoire du point de vue physique, car la phase n'est pas une caractéristique énergétique du processus. Les termes « spectre énergétique de la phase » et « spectre énergétique de la dérivée de la phase » indiquent seulement que les fonctions correspondantes de la fréquence sont des transformées de Fourier de la fonction de corrélation de la phase et de sa dérivée.

En l'absence de partie déterministe ($u = 0$) on a

$$m_1 \{ | \varphi' | \} = \omega_* . \tag{8.124}$$

8.6.4. Fonction de corrélation de la pulsation instantanée. Pour terminer ce chapitre nous allons calculer la fonction de corrélation et le spectre énergétique de la pulsation (dérivée de la phase) d'un processus aléatoire normal stationnaire.

Soit un processus aléatoire normal stationnaire dérivable en moyenne quadratique, à bande étroite, dont le spectre énergétique est symétrique par rapport à la pulsation ω_0. La dérivée $\Omega(t)$ de la phase de ce processus aléatoire est, en vertu de (8.6), égale à

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{C(t)}{A(t)} = \frac{A(t)\,C'(t) - C(t)\,A'(t)}{A^2(t) + C^2(t)} . \tag{8.125}$$

La fonction de corrélation du processus aléatoire $\Omega(t)$ est

$$B_\Omega(\tau) = m_1 \{\Omega(t)\,\Omega(t+\tau)\} = m_1 \left\{ \frac{C(t)\,A'(t) - A(t)\,C'(t)}{A^2(t) + C^2(t)} \times \right. \\ \left. \times \frac{C(t+\tau)\,A'(t+\tau) - A(t+\tau)\,C'(t+\tau)}{A^2(t+\tau) + C^2(t+\tau)} \right\} . \tag{8.126}$$

En examinant (8.126) on voit que pour trouver $B_\Omega(\tau)$ il faut connaître la densité de probabilité du huitième ordre des variables aléatoires $A(t)$, $A'(t)$, $A(t+\tau)$, $A'(t+\tau)$, $C(t)$, $C'(t)$, $C(t+\tau)$, $C'(t+\tau)$. Supposant toujours symétrique le spectre énergétique du processus aléatoire initial, on voit que les fonctions aléatoires $A(t)$ et $C(t)$ sont indépendantes et ont même fonction de corrélation égale à (voir § 6.2.2) :

$$\sigma^2 R_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(\omega) \cos(\omega_0 - \omega)\,\tau\, d\omega .$$

C'est pourquoi la densité de probabilité cherchée est égale au produit de deux densités de probabilité normales du quatrième ordre.

Pour les calculs ultérieurs il est commode d'utiliser la représentation intégrale de ces densités de probabilité à l'aide des fonctions caractéristiques quadridimensionnelles correspondantes:

$$w_4(x_1, x_1', x_2, x_2') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2} \sum_{l=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} r_{lk} v_l v_k - \right. \\ \left. - i\,(x_1 v_1 + \ldots + x_2' v_4) \right] dv_1 \ldots dv_4 , \tag{8.127}$$

$$w_4(y_1, y_1', y_2, y_2') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2} \sum_{l=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} r_{lk} u_l u_k - \right. \\ \left. - i\,(y_1 u_1 + \ldots + y_2' u_4) \right] du_1 \ldots du_4 , \tag{8.128}$$

où r_{lk} sont les éléments de la matrice de corrélation.

Compte tenu de (8.127) et (8.128) on trouve à partir de (8.126)

$$B_\Omega(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y_1x_1'-x_1y_1'}{x_1^2+y_1^2}\,\frac{y_2x_2'-x_2y_2'}{x_2^2+y_2^2}\times$$

$$\times\, w_4(x_1,\ x_1',\ x_2,\ x_2')\, w_4(y_1,\ y_1',\ y_2,\ y_2')\,dx_1\ldots dy_2'=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y_1x_1'-x_1y_1'}{x_1^2+y_1^2}\,\frac{y_2x_2'-x_2y_2'}{x_2^2+y_2^2}\times$$

$$\times\exp\Big[-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}r_{lk}(v_lv_k+u_lu_k)-$$

$$-i(x_1v_1+\ldots+y_2'u_4)\Big]\,dx_1\ldots dy_2'\,dv_1\ldots du_4. \qquad (8.129)$$

Dans (8.129), l'intégration sur x_1, x_1', y_1, y_1' et sur x_2, x_2', y_2, y_2' se fait séparément et se réduit au calcul de quatre intégrales quadruples identiques.

Considérons l'intégrale

$$K_1=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y_1x_1'}{x_1^2+y_1^2}\,e^{-i(x_1v_1+x_1'v_2+y_1u_1+y_1'u_2)}\times$$

$$\times\, dx_1\,dx_1'\,dy_1\,dy_1'. \qquad (8.130)$$

Utilisant la fonction delta (voir annexe III) on peut écrire l'intégrale (8.130) sous la forme suivante:

$$K_1=\frac{i}{4\pi^2}\,\delta'(v_2)\,\delta(u_2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\,e^{-i(x_1v_1+y_1u_1)}\,dx_1\,dy_1.$$

Passons maintenant des variables x_1 et y_1 aux coordonnées polaires ρ et φ:

$$x_1=\rho\cos\varphi,\quad y_1=\rho\sin\varphi.$$

On obtient alors

$$K_1=\frac{i}{4\pi^2}\,\delta'(v_2)\,\delta(u_2)\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\varphi\, e^{i\rho(v_1\cos\varphi+u_1\sin\varphi)}\,d\varphi\,d\rho.$$

Mais

$$\frac{i}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin\varphi\, e^{i\rho(v_1\cos\varphi+u_1\sin\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})\,e^{i\rho\sqrt{v_1^2+u_1^2}\sin(\varphi+\psi)}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-i\psi}\frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi+\psi} e^{i\vartheta+i\rho\sqrt{v_1^2+u_1^2}\sin\vartheta}\,d\vartheta-\right.$$

$$\left.-e^{i\psi}\frac{1}{2\pi}\int_{\psi}^{2\pi+\psi} e^{-i\vartheta+i\rho\sqrt{v_1^2+u_1^2}\sin\vartheta}\,d\vartheta\right]=J_1\left(\rho\sqrt{v_1^2+u_1^2}\right)\cos\Psi.$$

où

$$\cos\psi=\frac{u_1}{\sqrt{v_1^2+u_1^2}}.$$

Ainsi

$$K_1=\frac{1}{2\pi}\frac{u_1\delta'(v_2)\,\delta(u_2)}{\sqrt{v_1^2+u_1^2}}\int_0^\infty J_1\left(\rho\sqrt{v_1^2+u_1^2}\right)d\rho.$$

Mais comme

$$\int_0^\infty J_1\left(\rho\sqrt{v_1^2+u_1^2}\right)d\rho=\frac{1}{\sqrt{v_1^2+u_1^2}},$$

on obtient

$$K_1=\frac{1}{2\pi}\frac{u_1}{v_1^2+u_1^2}\,\delta'(v_2)\,\delta(u_2). \tag{8.131}$$

De même

$$K_2=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_1y_1'}{x_1^2+y_1^2}\,e^{-i(x_1v_1+x_1'v_2+y_1u_1+y_1'u_2)}\,dx_1\,dx_1'\,dy_1\,dy_1'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{v_1}{v_1^2+u_1^2}\,\delta(v_2)\,\delta'(u_2), \tag{8.132}$$

$$K_3=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_2x_2'}{x_2^2+y_2^2}\,e^{-i(x_2v_3+x_2'v_4+y_2u_3+y_2'u_4)}\,dx_2\,dx_2'\,dy_2\,dy_2'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{u_3}{v_3^2+u_3^2}\,\delta'(v_4)\,\delta(u_4), \tag{8.133}$$

$$K_4=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2y_2'}{x_2^2+y_2^2}\,e^{-i(x_2v_3+x_2'v_4+y_2u_3+y_2'u_4)}\,dx_2\,dx_2'\,dy_2\,dy_2'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{v_3}{v_3^2+u_3^2}\,\delta(v_4)\,\delta'(u_4). \tag{8.134}$$

En portant (8.131) à (8.134) dans (8.129) et compte tenu des propriétés de filtrage de la fonction delta et de sa dérivée, on a:

$$B_\Omega(\tau)=(K_1-K_2)(K_3-K_4)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{v_1^2+u_1^2}\,\frac{1}{v_3^2+u_3^2}\times$$

$$\times [u_1\delta'(v_2)\,\delta(u_2)-v_1\delta(v_2)\,\delta'(u_2)]\,[u_3\delta'(v_4)\,\delta(u_4)-v_3\delta(v_4)\,\delta'(u_4)]\times$$

$$\times\exp\Big[-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{l=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} r_{lk}(v_lv_k+u_lu_k)\Big]\,dv_1\ldots du_4=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^4R_0'^2(u_1v_3-v_1u_3)^2+\sigma^2R_0''(v_1v_3+u_1u_3)}{(v_1^2+u_1^2)(v_3^2+u_3^2)}\times$$

$$\times\exp\Big[-\frac{\sigma^2}{2}(v_1^2+u_1^2+v_3^2+u_3^2+2R_0v_1v_3+2R_0u_1u_3)\Big]\,dv_1\,dv_3\,du_1\,du_3. \quad (8.135)$$

Le calcul de l'intégrale multiple (8.135) se trouve simplifié si l'on introduit le changement de variables

$$v_1=\frac{r}{\sigma}\cos(\alpha+\beta),\qquad v_3=\frac{\rho}{\sigma}\cos\beta,$$

$$u_1=\frac{r}{\sigma}\sin(\alpha+\beta),\qquad u_3=\frac{\rho}{\sigma}\sin\beta.$$

On a alors

$$B_\Omega(\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty(R_0'^2r\rho\sin^2\alpha+R_0''\cos\alpha)\times$$

$$\times\exp\Big[-\frac{1}{2}(r^2+\rho^2+2R_0r\rho\cos\alpha)\Big]\,d\beta\,d\alpha\,dr\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{r^2+\rho}{2}}\Big(r\rho R_0'^2\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha e^{-R_0r\rho\cos\alpha}\,d\alpha+$$

$$+R_0''\int_0^{2\pi}\cos\alpha e^{-R_0r\rho\cos\alpha}\,d\alpha\Big)\,dr\,d\rho. \quad (8.136)$$

Comme $\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-a\cos\alpha}\cos n\alpha\,d\alpha=(-1)^nI_n(a)$, utilisant les formules (3) et (7) de l'annexe V, il est facile d'achever l'intégration dans (8.136) et d'obtenir l'expression cherchée de la fonction de corrélation de la pulsation

$$B_\Omega(\tau)=\frac{1}{2}(R_0'^2-R_0''R_0)\Big(1+\frac{R_0^2}{2}+\frac{R_0^4}{3}+\ldots\Big)$$

ou

$$B_\Omega(\tau)=-\frac{R_0'^2(\tau)-R_0''(\tau)R(\tau)}{2R_0^2(\tau)}\ln[1-R_0^2(\tau)]. \quad (8.137)$$

En vertu de (8.137), pour $\tau\to 0$ les valeurs de $B_\Omega(\tau)$ tendent vers l'infini, ce qui s'accorde bien avec le fait mentionné plus haut que la variance de la dérivée de la phase d'un processus aléatoire normal stationnaire est illimitée. Il faut donc faire attention lors de l'étude des caractéristiques probabilistes de la dérivée de la phase. Ainsi, par exemple si l'on utilise l'égalité $B_\Omega(\tau)=-B_\varphi''(\tau)$ qui n'est vraie que si la dérivée $B_\varphi''(0)$ est finie, on arrive à un résultat erroné.

8.6.5. Spectre énergétique de la pulsation d'un bruit blanc après filtrage. Supposons que le processus aléatoire normal soit un bruit blanc ayant traversé un amplificateur à fréquence intermédiaire (A.F.I.) dont la caractéristique de fréquence est une courbe gaussienne.

En vertu de (5.42') on peut alors écrire

$$R_0(\tau) = e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}, \tag{8.138}$$

d'où

$$R_0'(\tau) = -\frac{\beta^2\tau}{2} e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}, \tag{8.139}$$

$$R_0''(\tau) = -\frac{\beta^2}{2}\left(1 - \frac{\beta^2\tau^2}{2}\right) e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}. \tag{8.139'}$$

Le paramètre β dans (8.138) est lié à la largeur de la bande passante de l'A.F.I. par la relation $\Delta = \beta\sqrt{\pi}$. En portant (8.138), (8.139) et (8.139')

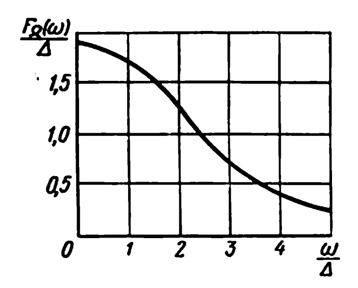


Fig. 8.6. Spectre énergétique de la dérivée de la phase d'un bruit blanc après filtrage

dans (8.137) on trouve

$$B_\Omega(\tau) = -\frac{\beta^2}{4} \ln\left(1 - e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{2}}\right). \tag{8.140}$$

Le spectre énergétique de la pulsation est donné par le théorème de Wiener-Khintchine

$$F_\Omega(\omega) = -\beta^2 \int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{2}}\right) \cos\omega\tau\, d\tau. \tag{8.141}$$

En développant en série le logarithme et en intégrant terme à terme on obtient

$$F_\Omega(\omega) = \beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{n\beta^2\tau^2}{2}} \cos\omega\tau\, d\tau = \beta\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{2n\beta^2}}. \tag{8.142}$$

L'intensité du spectre énergétique pour $\omega = 0$ est égale à

$$F_\Omega(0) = \beta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} = \beta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\zeta\left(\frac{3}{2}\right), \tag{8.143}$$

où $\zeta(x)$ est la fonction dzéta de Riemann.

Comme $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}612$ on trouve

$$F_\Omega(0) = 1{,}86\,\beta\sqrt{\pi} = 1{,}86\Delta. \tag{8.143'}$$

Pour $\omega \gg \beta$ on a

$$F_\Omega(\omega) \sim \frac{\pi\beta^2}{\omega} = \frac{\Delta^2}{\omega}. \tag{8.144}$$

La figure 8.6 donne le graphique du spectre énergétique de la pulsation d'un bruit blanc normal après filtrage.

Problèmes

8.1. Montrer que la fonction caractéristique bidimensionnelle du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire est égale à

$$\Theta_2(v_1, v_2, \tau) = \frac{1}{1 - 2i\sigma^2(v_1 + v_2) - 4\sigma^4 v_1 v_2(1 - R_0^2)}. \tag{1}$$

Par une transformation de Fourier inverse obtenir la formule (1) à partir de (8.35). Vérifier que

$$\left.\frac{\partial^2\Theta_2(v_1, v_2, \tau)}{\partial v_1\,\partial v_2}\right|_{v_1=v_2=0} = B_{E^2}(\tau), \tag{2}$$

[voir (8.42)].

8.2. Montrer que la densité de probabilité unidimensionnelle de la composante haute fréquence $E^2(t)\cos 2[\omega_0 t - \varphi(t)]$ d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite de moyenne nulle et de variance σ^2 à la sortie d'un détecteur quadratique est

$$W_1(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}K\left(\frac{|y|}{2\sigma^2}\right), \tag{3}$$

où $K_0(z)$ est une fonction de Bessel de l'argument imaginaire de seconde espèce et d'ordre zéro.

8.3. Montrer que pour la distribution (8.82) le paramètre ϑ_0 coïncide avec la moyenne de la différence de phases $\Delta\varphi = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$ d'un processus aléatoire normal stationnaire

$$m_1\{\Delta\varphi\} = \int_{-\pi}^{\pi}\vartheta W_{1\Delta\varphi}(\vartheta)\,d\vartheta = \vartheta_0(\tau). \tag{4}$$

Montrer également que la moyenne du module de l'écart entre $\Delta\varphi$ et ϑ_0 est égale à

$$m_1\{|\Delta\varphi - \vartheta_0|\} = \arccos R_0(\tau). \tag{5}$$

8.4. Soit $\zeta(t, \tau) = E^2(t) + E^2(t+\tau)$ la somme des carrés de deux valeurs de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande

étroite. En utilisant (8.21) et en effectuant le changement de variables

$$r_1 = \sqrt{u} \sin \vartheta, \; r_2 = \sqrt{u} \cos \vartheta,$$

montrer que la densité de probabilité unidimensionnelle de $\zeta(t, \tau)$ est égale à

$$W_{1\zeta}(u, \tau) = \frac{1}{2\sigma^2 R_0} e^{-\frac{u}{2\sigma^2(1-R_0^2)}} \operatorname{sh}\left[\frac{uR_0}{2\sigma^2(1-R_0)}\right], \quad u \geqslant 0. \qquad (6)$$

Pour $\tau \to \infty$ $(R_0 = 0)$ la distribution (6) devient

$$W_{1\zeta}(u) = \frac{u}{4\sigma^4} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}, \quad u \geqslant 0, \qquad (6')$$

c'est-à-dire la distribution du χ^2 à quatre degrés de libertés, comme il se devait pour la somme de deux variables aléatoires exponentielles indépendantes [voir (20) dans le problème 3.15)].

8.5. Montrer que l'enveloppe de la somme de processus stationnaires normaux de moyennes nulles et de variances σ_i^2, $i = 1, \ldots, N$ est distribuée suivant la loi de Rayleigh

$$W_1(y) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geqslant 0, \qquad (7)$$

où

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2. \qquad (7')$$

Pour le cas $N = 2$ trouver la formule (7) par une autre méthode en utilisant la formule (2.39) où $w(y \mid x)$ est la distribution de l'enveloppe de la somme d'un signal déterministe et d'un bruit normal (loi de Rayleigh généralisée), et $w_1(x)$ la distribution de Rayleigh de l'enveloppe du signal fluctuant.

Chapitre 9

PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL À LA TRAVERSÉE D'UN CIRCUIT RADIOTECHNIQUE TYPE

9.1. GÉNÉRALITÉS

Comme nous l'avons noté au § 5.1.3, dans de nombreux dispositifs radiotechniques on a affaire à la transformation de signaux, qui sont dans le cas général des processus aléatoires, dans un circuit type se composant de trois éléments en série: un élément linéaire d'entrée, un élément non linéaire (non inertiel) et un élément linéaire de sortie.

Si à l'entrée du circuit type agit un processus aléatoire normal, il n'est pas difficile de trouver le spectre énergétique du processus de sortie. Après l'élément linéaire d'entrée le processus reste normal, quant au spectre, il se déforme conformément à la caractéristique de fréquence de cet élément linéaire. Après la transformation non linéaire les densités de probabilité du processus cessent d'être normales, mais on peut tout de même trouver le spectre du processus transformé en utilisant l'une des méthodes exposées en détail dans le chapitre 6. Puis il ne reste plus qu'à tenir compte de l'action sélective de l'élément linéaire de sortie en utilisant la formule (5.14).

Cependant souvent il ne suffit pas de connaître le spectre énergétique du processus à la sortie du circuit type, on a besoin de caractéristiques plus détaillées telles que les densités de probabilité. Le calcul de la densité de probabilité est lié à de grandes difficultés mathématiques, tant de principe que de calcul, car le problème à résoudre est celui de la transformation de la densité de probabilité d'un processus aléatoire dans un système linéaire lorsque le processus d'entrée n'est pas un processus normal (voir § 5.3).

Lorsque le processus d'entrée du circuit type n'est pas normal cette difficulté apparaît déjà tout au début du calcul. Il devient difficile de calculer non seulement la densité de probabilité mais aussi le spectre énergétique du processus après l'élément non linéaire, car pour cela il faut connaître la densité de probabilité bidimensionnelle du processus aléatoire à l'entrée de cet élément non linéaire, processus qui est celui de sortie de l'élément linéaire précédent.

Ce n'est que dans un nombre très restreint de cas qu'on peut trouver la densité de probabilité d'un processus à la sortie du circuit type, ceci dans les hypothèses spéciales quant au genre de la non-linéarité et aux propriétés statistiques du processus aléatoire d'entrée.

La méthode approchée de calcul de la densité de probabilité unidimensionnelle consiste à calculer un certain nombre de moments de la distribution (voir § 5.3.1). Mais cette méthode conduit en fait à des calculs fort compliqués.

Dans ce chapitre nous examinons quatre types de problèmes de calcul de la densité de probabilité unidimensionnelle du processus à la sortie du circuit type. Les calculs seront faits par les méthodes exacte et approchée.

1. Le processus aléatoire à l'entrée du circuit est la somme d'un signal déterministe et d'un processus aléatoire normal stationnaire à spectre uniforme (« bruit blanc »), la caractéristique de l'élément non linéaire est quadratique. Ce cas représente le problème radiotechnique suivant. A l'entrée d'un amplificateur F. I. agit un signal déterministe et un bruit de fluctuation. Le signal et le bruit traversent ensemble un détecteur quadratique et puis un filtre. Il s'agit de trouver la densité de probabilité du signal et du bruit à la sortie du filtre. Pour plus de clarté, nous exprimons le problème général en termes de ce problème particulier. On considère deux cas : 1) l'amplificateur F. I. est à large bande et 2) l'amplificateur F. I. est à bande étroite (la largeur de bande de la caractéristique fréquentielle est bien inférieure à la fréquence centrale). Dans le premier cas le processus après transformation non linéaire est supposé égal au carré du processus aléatoire à la sortie de l'amplificateur F. I. et dans le second, au carré de l'enveloppe du processus aléatoire à la sortie de l'amplificateur F. I. (on rejette la composante haute fréquence du processus).

2. A l'entrée d'un filtre on applique le produit de deux processus aléatoires normaux stationnaires corrélés. Il s'agit de calculer la densité de probabilité du processus à la sortie du filtre. Un problème particulier, consistant à étudier la distribution du processus à la sortie d'un corrélateur pour un temps fini d'intégration, c'est-à-dire la grandeur

$$\zeta_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_1(t)\, \xi_2(t-\tau)\, dt,$$

si $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ sont des processus aléatoires normaux stationnaires, se ramène à ce problème général.

3. La puissance moyenne d'un processus aléatoire normal ergodique $\xi(t)$ sur un temps T fini est égale à :

$$\eta_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^2(t)\, dt.$$

On demande de trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire η_T.

4. Le processus aléatoire d'entrée est un processus normal stationnaire *de Markov*, la caractéristique de l'élément non linéaire (non inertiel) est arbitraire.

9.2. AMPLIFICATEUR — DÉTECTEUR QUADRATIQUE — FILTRE

9.2.1. Cas d'un amplificateur à large bande. Supposons que les éléments linéaires du circuit type considéré soient caractérisés par leurs fonctions de transition impulsionnelles: $h_1(\tau)$ pour l'amplificateur F. I. et $h_2(\tau)$ pour le filtre. Soient $S(t)$ le signal déterministe et $\xi(t)$ le bruit blanc normal agissant à l'entrée de l'amplificateur F. I. Comme à la traversée d'un système linéaire le signal et le bruit ne sont pas en interaction, le processus de sortie de l'amplificateur F. I. sera la somme du signal déterministe $S_1(t)$ et du processus aléatoire normal stationnaire $\xi_1(t)$, ces deux termes pouvant s'écrire sous la forme d'une intégrale [voir (5.13)]. On a:

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)\, S(t-\tau)\, d\tau, \tag{9.1}$$

$$\xi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)\, \xi(t-\tau)\, d\tau. \tag{9.2}$$

On suppose que l'intégrale (9.2) converge en moyenne quadratique (voir § 4.3.4).

Utilisant (9.1) et (9.2) on peut écrire comme suit le carré du processus aléatoire à la sortie de l'amplificateur F. I.:

$$[S_1(t) + \xi_1(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u)\,[S(t-u) + \xi(t-u)] \times h_1(v)\,[S(t-v) + \xi(t-v)]\, du\, dv. \tag{9.3}$$

Si $\zeta(t)$ est le processus après filtrage (c'est-à-dire à la sortie du circuit type) on a

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)\,[S_1(t-\tau) + \xi_1(t-\tau)]^2\, d\tau, \tag{9.4}$$

ou, en portant (9.3) dans (9.4) et en remplaçant les variables d'intégration u et v par $u - \tau$ et $v - \tau$ respectivement, on obtient

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u, v)\,[S(t-u) + \xi(t-u)] \times [S(t-v) + \xi(t-v)]\, du\, dv, \tag{9.5}$$

où

$$K(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u-\tau)\, h_2(\tau)\, h_1(v-\tau)\, d\tau. \qquad (9.6)$$

L'expression (9.5) est la transformation intégrale cherchée reliant le processus de sortie du circuit type et le processus d'entrée. Nous appelerons noyau de cette transformation la fonction $K(u, v)$ ne dépendant que des caractéristiques de l'amplificateur F. I. et du filtre *).

Ainsi la résolution du problème posé s'est réduite au calcul des caractéristiques probabilistes de l'intégrale (9.5). A cet effet nous allons utiliser une des propriétés des transformations intégrales de ce genre. Comme le noyau de la transformation est symétrique, c'est-à-dire $K(u, v) \equiv K(v, u)$ on peut le développer en série suivant des fonctions othogonales. Il vient

$$K(u, v) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(v)\, \varphi_i(u), \qquad (9.7)$$

où $\varphi_i(x)$ et λ_i sont respectivement les fonctions propres (solutions) et les nombres propres (caractéristiques) de l'équation intégrale suivante:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy, \qquad (9.8)$$

dont le noyau peut s'exprimer à l'aide des fonctions de transition impulsionnelles de l'amplificateur F.I. et du filtre [voir (9.6)].

Après la substitution de (9.7) dans (9.5) les variables se séparent et le processus à la sortie du filtre peut s'écrire sous la forme d'une somme (convergente en moyenne quadratique)

$$\zeta(t) = \sum_i \frac{[s_i(t) + \eta_i(t)]^2}{\lambda_i}, \qquad (9.9)$$

où

$$s_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t-x)\, \varphi_i(x)\, dx, \qquad (9.10)$$

$$\eta_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-x)\, \varphi_i(x)\, dx. \qquad (9.11)$$

Notons que l'équation intégrale (9.8) peut se réduire à une autre équation dont le noyau est égal au produit du coefficient de corrélation des bruits à la sortie de l'amplificateur F.I. par la fonction de transition impulsionnelle du filtre vidéofréquence. A cet effet portons (9.6) dans (9.8). En changeant l'ordre de l'intégration on

*) Pour que l'amplificateur F.I. et le filtre soient réalisables il faut poser $h_1(t) = 0$, $h_2(t) = 0$ pour $t < 0$.

obtient:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau)\,h_1(x-\tau)\int_{-\infty}^{\infty}h_1(y-\tau)\,\varphi(y)\,dy\,d\tau.$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par $h_1(x-z)$ et en intégrant sur x on a

$$f(z)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h_2(\tau)\,f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}h_1(x-\tau)\,h_1(x-z)\,dx\,d\tau,$$

où $f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,h_1(x-z)\,dx$. En vertu de (5.29) la fonction de corrélation des bruits blancs à la sortie de l'amplificateur F. I. est égale à

$$B_{\xi_1}(\tau)=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)\,h_1(u+\tau)\,du,$$

où σ^2 est la puissance du bruit par unité de bande de fréquences.

Par conséquent, $f(z)$ satisfait à l'équation intégrale suivante:

$$f(z)=\frac{\lambda}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}B_{\xi_1}(\tau-z)\,h_2(\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \qquad (9.12)$$

Comme le montre le développement (9.9), le problème de l'étude des caractéristiques probabilistes du processus aléatoire $\zeta(t)$ à la sortie du circuit type se réduit au calcul de la densité de probabilité de la somme des carrés des processus aléatoires $s_i(t)+\eta_i(t)$, où $s_i(t)$ sont déterministes. Nous avons supposé que le processus aléatoire $\xi(t)$ est normal, donc les processus aléatoires $\eta_i(t)$, qui sont des intégrales de $\xi(t)$, sont également normaux. Comme on se limite ici au calcul de la densité de probabilité unidimensionnelle, on peut fixer pour les raisonnements ultérieurs un certain instant t. Montrons que les variables aléatoires $\eta_k(t)$ et $\eta_j(t)$ pour $k\neq j$ ne sont pas corrélées, et, étant normales, elles sont indépendantes.

Considérons la moyenne du produit:

$$m_1\{\eta_k(t)\,\eta_j(t)\}=$$

$$=m_1\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-x)\,\varphi_k(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t-y)\,\varphi_j(y)\,dy\right\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(x)\,\varphi_j(y)\,m_1\{\xi(t-x)\,\xi(t-y)\}\,dx\,dy.$$

Comme la fonction de corrélation du bruit blanc est [voir (4.75)]

$$m_1\{\xi(t)\,\xi(t+\tau)\}=\sigma^2\delta(\tau)$$

et compte tenu de la propriété de filtrage de la fonction delta on trouve (voir annexe III)

$$m_1 \{\eta_k(t)\,\eta_j(t)\} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\,\varphi_j(y)\,\delta(x-y)\,dx\,dy =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\,\varphi_j(x)\,dx.$$

Mais les fonctions $\varphi_i(x)$ sont orthonormées, donc

$$m_1\{\eta_k(t)\,\eta_j(t)\} = \begin{cases} \sigma^2, & k=j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \tag{9.13}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La distribution conjointe des variables aléatoires normales indépendantes η_i est égale au produit

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}}. \tag{9.14}$$

Notons que la distribution de la somme (9.9) de variables aléatoires n'est pas normale, car le théorème limite central ne se trouve pas être vérifié (la variance de la somme reste finie lorsque le nombre de composantes augmente indéfiniment).

Calculons d'abord la fonction caractéristique $\Theta_1(v, t)$ de la somme (9.9). En utilisant les formules (3.119) et (3.125) on a

$$\Theta_1(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iv \sum_j \frac{[s_j(t)+y_j]^2}{\lambda_j}\right\} \times$$

$$\times W(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \ldots =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_j \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{iv}{\lambda_j}(s_j^2 + 2s_j y_j + y_j^2) - \frac{y_j^2}{2\sigma^2}\right\} dy_j. \tag{9.15}$$

En écrivant l'exposant de l'exponentielle sous l'intégrale sous la forme d'un carré et en intégrant on obtient après quelques transformations algébriques simples

$$\Theta_1(v, t) = \prod_j \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j}}} \exp\left[\frac{s_j^2}{2\sigma^2} \cdot \frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j - 2iv\sigma^2}\right]. \tag{9.16}$$

La densité de probabilité unidimensionnelle cherchée du processus aléatoire $\zeta(t)$ à la sortie du filtre s'obtient à partir de (9.16) par transformation de Fourier inverse.

En l'absence de signal on a $s_j \equiv 0$ et en vertu de (9.16) on a

$$\Theta_1(v) = \prod_j \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j}}}. \tag{9.16'}$$

En général, l'ensemble des nombres caractéristiques λ_j est infini, c'est pourquoi le calcul de la transformée de Fourier inverse des produits infinis (9.16) ou (9.16') représente un problème mathématique très ardu. En limitant le nombre de termes dans ces produits, c'est-à-dire en supposant que le processus de sortie du circuit type soit constitué par un nombre fini de termes de la série (9.9), on peut facilement arriver au résultat désiré. Dans ce cas (si tous les nombres caractéristiques sont différents) l'intégration qu'on doit effectuer pour passer de la fonction caractéristique à la densité de probabilité s'accomplit assez facilement par la méthode des résidus. Néanmoins pour obtenir la précision requise on est obligé à prendre plusieurs dizaines de termes de la série (9.9).

Notons également que la formule (9.16) contient explicitement les nombres caractéristiques λ_j et implicitement (dans les grandeurs s_j) les fonctions propres $\varphi_j(x)$, dont le calcul exige la résolution de l'équation intégrale (9.8). Dans un seul cas particulier cette équation peut être résolue d'une manière simple. Il s'agit du filtre de sortie dont la caractéristique de fréquence est uniforme pour toutes les fréquences. Dans ce cas $h_2(\tau) = \delta(\tau)$ et à partir de (9.6) compte tenu de la propriété de filtrage de la fonction delta on trouve

$$K(u, v) = h_1(u)\, h_1(v). \tag{9.17}$$

Comparant (9.17) et (9.7), on voit que le noyau est dégénéré: il ne lui correspond qu'un seul nombre caractéristique λ et une fonction propre $\varphi(u) = \sqrt{\lambda} h_1(u)$, λ étant donné à partir de la condition de normalisation de la fonction $\varphi(u)$, c'est-à-dire

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(u)\, du = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_1^2(\omega)\, d\omega = 1.$$

Le rapport $\frac{\sigma^2}{\lambda} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_1^2(\omega)\, d\omega = \sigma_1^2$ est alors la variance des bruits à la sortie de l'amplificateur F.I. La relation (9.16) permet de trouver la fonction caractéristique

$$\Theta_1(v, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2iv\sigma_1^2}} \exp\left\{\frac{S_1^2(t)}{2\sigma_1^2} \frac{2iv\sigma_1^2}{1-2iv\sigma_1^2}\right\}, \tag{9.18}$$

où $S_1(t)$ est le signal ayant traversé l'amplificateur F.I.

Comme la bande passante du filtre est illimitée, la formule (9.18) correspond à la fonction caractéristique du carré d'un processus aléatoire normal stationnaire de variance σ_1^2. La transformée de Fourier inverse de cette fonction coïncide avec (7.130) (à condition toutefois de remplacer σ par σ_1, et a par S_1).

9.2.2. Cas d'un amplificateur à bande étroite. Comme nous l'avons remarqué, ce cas diffère du précédent en ce qu'après le détecteur, la partie haute fréquence du processus est filtrée et le filtre vidéofréquence se trouve attaqué par le signal représentant le carré de l'enveloppe de la somme des processus $\xi_1(t) + S_1(t)$ [voir (9.1) et (9.2)]. On peut écrire le processus aléatoire normal à bande étroite à la sortie d'un amplificateur F.I. sous la forme d'une somme [voir (8.3)]

$$\xi_1(t) + S_1(t) = [A_1(t) + u_1(t)] \cos \omega_0 t + [C_1(t) + v_1(t)] \sin \omega_0 t, \quad (9.19)$$

où $u_1(t)$ et $v_1(t)$ sont les composantes en quadrature du signal $S_1(t)$, et $A_1(t)$ et $C_1(t)$ les composantes en quadrature, à distribution normale, indépendantes (aux mêmes instants) du bruit. Le processus à la sortie du filtre vidéofréquence peut s'écrire comme la somme de deux composantes indépendantes (aux mêmes instants) [comparer avec (9.4)]

$$\zeta(t) = \zeta_c(t) + \zeta_s(t), \quad (9.20)$$

où

$$\zeta_c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_1(t-\tau) + A_1(t-\tau)]^2 h_2(\tau)\, d\tau; \quad (9.21)$$

$$\zeta_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [v_1(t-\tau) + C_1(t-\tau)]^2 h_2(\tau)\, d\tau. \quad (9.22)$$

Comme les composantes $A_1(t)$ et $C_1(t)$ sont normalement distribuées, leurs fonctions de corrélation sont normales et égales à l'enveloppe de la fonction de corrélation du processus $\xi_1(t)$, le noyau correspondant au cas considéré de la transformation intégrale (9.5) et, par conséquent, de l'équation intégrale (9.8) s'écrira alors sous la forme

$$K(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{10}(u-\tau)\, h_2(\tau)\, h_{10}(v-\tau)\, d\tau,$$

où $h_{10}(t)$ est l'enveloppe de la fonction de transition impulsionnelle de l'amplificateur F.I. à bande étroite [voir (5.11]). Dans notre cas, il correspond à l'équation intégrale (9.12) l'expression

$$f(z) = \frac{\lambda}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_{A_1}(z-\tau)\, h_2(\tau)\, f(\tau)\, d\tau. \quad (9.23)$$

En écrivant chacun des termes de (9.20) sous la forme d'une somme du type (9.9) et introduisant les désignations suivantes:

$$u_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-x)\, \varphi_i(x)\, dx, \quad (9.24)$$

$$v_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t-x)\, \varphi_i(x)\, dx, \quad (9.24')$$

[où $u(t)$ et $v(t)$ sont les composantes en quadrature du signal $S(t)$], on obtient par analogie avec (9.15) l'expression suivante pour la fonction caractéristique du carré de l'enveloppe après la traversée du filtre vidéofréquence:

$$\Theta_1(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iv \sum_j \frac{1}{\lambda_j} [(u_j + x_j)^2 + (v_j + y_j)^2]\right\} \times$$
$$\times \prod_j \left[\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_j^2 + y_j^2}{2\sigma^2}\right) dx_j\, dy_j\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iv \sum_j \frac{1}{\lambda_j} (u_j + x_j)^2\right] \prod_j \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_j^2}{2\sigma^2}} dx_j\right) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iv \sum_j \frac{1}{\lambda_j} (v_j + y_j)^2\right] \prod_j \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_j^2}{2\sigma^2}} dy_j\right). \qquad (9.25)$$

Si dans (9.15) on remplace s_j par u_j ou v_j, chacune des intégrales multiples de (9.25) coïncide avec (9.15). Ainsi, compte tenu de (9.16) on trouve

$$\Theta_1(v, t) = \prod_j \frac{1}{1 - \frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j}} \exp\left\{\frac{u_j^2 + v_j^2}{2\sigma^2} \frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j - 2iv\sigma^2}\right\}. \qquad (9.26)$$

Par transformation inverse de Fourier on peut à partir de (9.26) trouver la densité de probabilité unidimensionnelle du processus à la sortie du circuit type. En l'absence de signal $u_j = v_j \equiv 0$ et (9.26) devient

$$\Theta_1(v) = \prod_j \frac{1}{1 - \frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j}}. \qquad (9.26')$$

Tout comme dans le cas précédent, pour obtenir la distribution sous forme explicite, il faut résoudre l'équation intégrale (9.8) pour trouver les grandeurs λ_j et $\varphi_j(x)$ figurant dans (9.26), ces dernières y sont présentes implicitement, recelées dans u_j et v_j. Ce n'est que si la caractéristique fréquentielle du filtre est uniforme sur toutes les fréquences que le produit du second membre de (9.26) se réduit à un seul facteur

$$\Theta_1(v, t) = \frac{1}{1 - 2iv\sigma_1^2} \exp\left[\frac{a^2(t)}{2\sigma_1^2} \frac{2iv\sigma_1^2}{1 - 2iv\sigma_1^2}\right], \qquad (9.27)$$

où $a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ est l'enveloppe du signal. La formule (9.27) donne la fonction caractéristique du carré de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal. La transformée inverse de Fourier coïncide avec (8.36).

En ce qui concerne les calculs des transformées de Fourier des produits infinis (9.26) et (9.26'), la remarque faite à ce sujet à propos de (9.16) et (9.16') reste vraie.

Notons que la méthode exposée ci-dessus peut être généralisée et utilisée pour le calcul des fonctions caractéristiques multidimensionnelles d'un processus aléatoire à la sortie du circuit type considéré (voir [4]).

9.2.3. Méthode approchée de calcul des densités de probabilité. Il est assez difficile de résoudre au cas général l'équation intégrale

(9.8). Comme de plus, dans la majorité des cas que l'on rencontre dans la pratique, les équations intégrales se résolvent par des méthodes approchées, il serait intéressant d'examiner les *méthodes approchées* de calcul direct des densités de probabilité du processus à la sortie du filtre, sans avoir à résoudre l'équation intégrale (9.8).

Considérons en tant que caractéristiques numériques d'un processus aléatoire à la sortie du filtre non pas les moments, mais les cumulants (voir § 3.3.2) de la distribution unidimensionnelle.

Par définition on appelle cumulant d'ordre n la grandeur

$$k_n = i^n \left[\frac{d^n}{dv^n} \ln \Theta_1(v) \right]_{v=0} .$$

A partir de (9.16) on a

$$\ln \Theta_1(v, t) = -\frac{1}{2} \sum_j \ln \left(1 - \frac{2iv\sigma^2}{\lambda_j}\right) + \sum_j \frac{ivs_j^2(t)}{\lambda_j - 2iv\sigma^2}, \quad (9.28)$$

d'où par dérivations successives on trouve le cumulant d'ordre n du processus aléatoire à la sortie du filtre

$$k_n(t) = \frac{1}{2}(2\sigma^2)^n (n-1)! \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n} + (2\sigma^2)^{n-1} n! \sum_j \frac{s_j^2(t)}{\lambda_j^n}. \quad (9.29)$$

D'une manière analogue on peut trouver à partir de (9.26) le cumulant du carré de l'enveloppe après le filtre. On a :

$$k_{n0}(t) = (2\sigma^2)^n (n-1)! \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n} + (2\sigma^2)^{n-1} n! \sum_j \frac{u_j^2(t) + v_j^2(t)}{\lambda_j^n}. \quad (9.30)$$

En l'absence de signal on a $s_j = u_j = v_j = 0$ et

$$k_n = \frac{k_{n0}}{2} = (2\sigma^2)^n (n-1)! \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n} . \quad (9.30')$$

Les séries figurant dans (9.29) et (9.30) peuvent s'exprimer au moyen des noyaux itérés $K^{(n)}(u, v)$, ce qui exclut par là même les nombres caractéristiques λ_j. Le noyau itéré $K^{(n)}(u, v)$ peut être calculé à partir du noyau principal $K(u, v)$ par intégration d'ordre $(n-1)$. Il vient :

$$K^{(n)}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K(u, x_1) K(x_1, x_2) \ldots$$

$$\ldots K(x_{n-1}, v)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}, \; n \geqslant 2, \quad (9.31)$$

$$K^{(1)}(u, v) \equiv K(u, v).$$

En remplaçant sous le signe de l'intégrale (9.31) $K(x_k, x_{k+1})$ par son développement (9.7) et comme l'ensemble des fonctions

$\varphi_j(x_k)$ est orthogonal et normé, on obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^{(n)}(u, u)\, du = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n}. \tag{9.32}$$

D'une manière analogue on a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(t-v)\, S(t-u)\, K^{(n)}(u, v)\, du\, dv = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^n} s_j^2(t). \tag{9.33}$$

En portant (9.32) et (9.33) dans (9.29) on trouve

$$k_n(t) = \frac{1}{2}(2\sigma^2)^n n! \left[\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} K^{(n)}(u, u)\, du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u)\, K^{(n)}(u, v)\, S(t-v)\, du\, dv\right]. \tag{9.34}$$

Ainsi, en utilisant (9.34) on peut calculer les cumulants d'ordre quelconque de la densité de probabilité unidimensionnelle du processus aléatoire à la sortie du filtre sans avoir à résoudre l'équation intégrale.

Il est facile d'écrire l'expression analogue à (9.34) pour le cumulant du carré de l'enveloppe après filtrage. On a:

$$k_{n0}(t) = (2\sigma^2)^n n! \left[\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} K^{(n)}(u, u)\, du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(t-x)\, K^{(n)}(x, y)\, a(t-y)\, dx\, dy\right]. \tag{9.34'}$$

En l'absence de signal les intégrales doubles dans (9.34) et (9.34′) disparaissent. Il est dans ce cas assez facile de calculer sous forme générale les cumulants du premier et du second ordre (moyenne et variance). Par exemple, on trouve à partir de (9.34)

$$k_1 = m_1\{\zeta(t)\} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(u, u)\, du =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(u-\tau)\, du\, d\tau = \sigma_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)\, d\tau, \tag{9.35}$$

$$k_2 = M_2 \{\zeta(t)\} = 2\sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} K^{(2)}(u, u)\, du =$$

$$= 2\sigma_4 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u, x)\, K(x, u)\, dx\, du =$$

$$= 2\sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)\, h_2(t) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(u-\tau)\, h_1(x-\tau) \times$$

$$\times h_1(u-t)\, h_1(x-t)\, dx\, du\, d\tau\, dt =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi_1}^2(t-\tau)\, h_2(\tau)\, h_2(t)\, d\tau\, dt. \qquad (9.35')$$

Il est évident qu'on peut trouver ces formules directement, en utilisant l'expression de la fonction de corrélation du carré d'un processus aléatoire normal obtenue dans le chapitre 7 et appliquant les règles de transformation des fonctions de corrélation dans un système linéaire (voir chapitre 5).

Une fois trouvé un certain nombre de cumulants du processus aléatoire, il s'agit de les utiliser pour le calcul approché de la densité de probabilité unidimensionnelle. Généralement, on écrit la densité de probabilité cherchée comme un développement suivant des fonctions orthogonales données, dont les coefficients s'expriment en fonction des cumulants de la distribution. En qualité de fonctions orthogonales on prend habituellement les fonctions $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et leurs dérivées [voir (2.127)].

Soient $w_1(x)$ la densité de probabilité cherchée du processus aléatoire à la sortie du filtre, et k_1, k_2, k_3, k_4 les quatre premiers cumulants de ce développement. Les quatre premiers termes du développement de $w_1(x)$ en série sont

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\left[\varphi\left(\frac{x-k_1}{\sqrt{k_2}}\right) - \frac{1}{3!}\frac{k_3}{k_2^{3/2}}\varphi^{(3)}\left(\frac{x-k_1}{\sqrt{k_2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!}\frac{k_4}{k_2^2}\varphi^{(4)}\left(\frac{x-k_1}{\sqrt{k_2}}\right) + \frac{10}{6!}\frac{k_3^2}{k_2^3}\varphi^{(6)}\left(\frac{x-k_1}{\sqrt{k_2}}\right) + \ldots\right], \qquad (9.36)$$

où $\frac{k_3}{k_2^{3/2}}$ et $\frac{k_4}{k_2^2}$ coïncident avec les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de la distribution $w_1(x)$ (voir § 3.3.2).

Cependant dans certains cas, pour que l'approximation par la série (9.36) soit satisfaisante, il faut calculer au moins dix ou vingt termes. Il est alors souvent préférable d'utiliser un autre système de fonctions, par exemple, les fonctions de Laguerre.

9.2.4. Exemple de calcul des caractéristiques fréquentielles gaussiennes. A titre d'exemple nous allons étudier la densité de probabilité d'un processus aléatoire à la sortie d'un circuit type formé par un amplificateur F.I., un détecteur quadratique et un filtre vidéofréquence.

Supposons que les caractéristiques de l'amplificateur F.I. et du filtre sont des courbes gaussiennes *):

$$C_1(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta_1^2}}, \tag{9.37}$$

$$C_2(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2\beta_2^2}}. \tag{9.38}$$

Les fonctions de transition impulsionnelles correspondantes sont

$$h_1(\tau) = \frac{\beta_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta_1^2\tau^2}{2}} \cos\omega_0\tau, \tag{9.39}$$

$$h_2(\tau) = \frac{\beta_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta_2^2\tau^2}{2}}. \tag{9.40}$$

Les paramètres β_1 et β_2 peuvent s'exprimer simplement en fonction de bandes Δ_1 de l'amplificateur et Δ_2 du filtre (voir § 5.2.3):

$$\beta_1 = \frac{\Delta_1}{\sqrt{\pi}}; \quad \beta_2 = \frac{2\Delta_2}{\sqrt{\pi}}. \tag{9.41}$$

Désignant de la manière suivante le rapport de ces paramètres:

$$\nu = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2\Delta_2}{\Delta_1}, \tag{9.42}$$

et portant (9.39) et (9.40) dans (9.6), on obtient après intégration, supposant que $\omega_0 \gg \Delta_1$, $\omega_0 \gg \Delta_2$:

$$K(u, v) = \frac{\beta_1\beta_2 \cos\omega_0(u-v)}{4\pi\sqrt{\nu^2+2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\beta_1^2}{4}\left[(u-v)^2 + \frac{\nu^2}{\nu^2+2}(u+v)^2\right]\right\}. \tag{9.43}$$

En vertu de (9.31) le noyau itéré du second ordre est égal à

$$K^{(2)}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u, x)\, K(x, v)\, dx = \frac{\beta_1\beta_2^2 \cos\omega_0(u-v)}{32\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\nu^2+2)(\nu^2+1)}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\beta_1^2}{4}\left[\frac{\nu^2+1}{\nu^2+2}(u-v)^2 + \frac{\nu^2}{\nu^2+1}(u+v)^2\right]\right\}. \tag{9.44}$$

*) Voir, par exemple, la note concernant la formule (5.41).

De même le noyau itéré du troisième ordre est

$$K^{(3)}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{(2)}(u, y) K(y, v)\, dy =$$

$$= \frac{\beta_1 \beta_2^2 \cos \omega_0 (u-v)}{2(32\pi)^2 \sqrt{(\nu^2+2)(2\nu^2+1)(2\nu^2+3)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\beta_1^2}{4}\left[\frac{2\nu^2+1}{2\nu^2+3}(u-v)^2 + \frac{(2\nu^2+3)\nu^2}{(2\nu^2+1)(\nu^2+2)}(u+v)^2\right]\right\}. \quad (9.45)$$

On obtient l'expression exacte du noyau $K(u, v)$ et de ses itérations si l'on tient compte des seconds termes qui sont des infiniment petits pour $\omega_0 \gg \Delta_1$, $\omega_0 \gg \Delta_2$. En vertu de (9.43) à (9.45) on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(u, u)\, du = \beta_1 \sqrt{\pi} = \Delta_1, \quad (9.46)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^{(2)}(u, u)\, du = \frac{\nu \Delta_1^2}{2\sqrt{\nu^2+2}}, \quad (9.47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^{(3)}(u, u)\, du = \frac{\nu^2 \Delta_1^3}{2(2\nu^2+3)}. \quad (9.48)$$

Supposons que la partie déterministe du processus appliqué à l'entrée du circuit type soit un signal harmonique d'amplitude constante $S(t) = A_0 \cos \omega_0 t$ (ici la pulsation ω_0 est égale à celle de résonance de l'amplificateur F.I.). Compte tenu de (9.43) à (9.45) les intégrales doubles (dans 9.34) sont:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u) K(u, v) S(t-v)\, du\, dv = \frac{A_0^2}{2}, \quad (9.49)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u) K^{(2)}(u, v) S(t-v)\, du\, dv = \frac{\nu \Delta_1}{\sqrt{\nu^2+1}} \frac{A_0^2}{4}, \quad (9.50)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(t-u) K^{(3)}(u, v) S(t-v)\, du\, dv = \frac{\nu^2 \Delta_1^2}{\sqrt{(2\nu^2+1)(2\nu^2+3)}} \frac{A_0^2}{4}. \quad (9.51)$$

En portant (9.46) à (9.51) dans (9.34) et en introduisant la désignation $c^2 = \frac{A_0^2}{2\sigma^2 \Delta_1}$ on peut trouver les cumulants d'ordres premier, second et troisième du processus aléatoire à la sortie du filtre vidéofréquence.

Le cumulant du premier ordre (ou la valeur moyenne) est égal à

$$k_1 = \sigma^2\Delta_1 (1 + c^2). \tag{9.52}$$

Le cumulant du second ordre (ou la variance) est égal à

$$k_2 = \frac{\nu\sigma^4\Delta_1^2}{\sqrt{\nu^2+2}}\left(1 + 2c^2\sqrt{\frac{\nu^2+2}{\nu^2+1}}\right). \tag{9.53}$$

Le cumulant du troisième ordre (ou le moment central du troisième ordre) est

$$k_3 = \frac{4\nu^2\sigma^6\Delta_1^3}{2\nu^2+3}\left(1 + 3c^2\sqrt{\frac{2\nu^2+3}{2\nu^2+1}}\right). \tag{9.54}$$

Le coefficient d'asymétrie de la densité de probabilité unidimensionnelle d'un processus aléatoire à la sortie d'un filtre est:

$$k = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = 4\sqrt{\nu}\,\frac{1 + 3c^2\sqrt{\dfrac{2\nu^2+2}{2\nu^2+1}}}{2\nu^2+3}\left(\frac{\sqrt{\nu^2+2}}{1 + 2c^2\sqrt{\dfrac{\nu^2+2}{\nu^2+1}}}\right)^{3/2}, \tag{9.55}$$

où c^2 est le rapport de la puissance du signal à la puissance des bruits à la sortie de l'amplificateur F.I.

D'une manière analogue on aurait pu calculer les cumulants d'ordres plus élevés. Nous ne donnerons ici que le résultat définitif (voir [6]):

$$k_n = \frac{(2\nu\sigma^2\Delta_1)^n (n-1)!}{(\sqrt{\nu^2+2}+\nu)^n - (\sqrt{\nu^2+2}-\nu)^n} \times$$
$$\times\left[1 + nc^2\sqrt{\frac{(\sqrt{\nu^2+2}+\nu)^n - (\sqrt{\nu^2+2}-\nu)^n}{(\sqrt{\nu^2+2}+\nu)^n + (\sqrt{\nu^2+2}-\nu)^n}}\sqrt{\frac{\nu^2+2}{\nu^2}}\right]. \tag{9.56}$$

Connaissant les valeurs des cumulants et en utilisant le développement en série suivant les fonctions orthogonales, on peut, avec la précision voulue, trouver la densité de probabilité du processus aléatoire à la sortie du filtre vidéofréquence.

On a représenté sur la figure 9.1 les courbes de la densité de probabilité unidimensionnelle obtenues par la méthode mentionnée ci-dessus pour le processus à la sortie du circuit type considéré, lorsqu'on applique à l'entrée seulement un bruit blanc. Les courbes sont construites pour un rapport ν constant de la largeur de bande Δ_2 du filtre à la moitié de la largeur de bande $\frac{\Delta_1}{2}$ de l'amplificateur F.I.

Sur la figure 9.2 on peut trouver ces mêmes courbes construites pour le cas où on applique à l'entrée un signal sinusoïdal accompagné

de bruits, pour un rapport signal/bruit $c^2 = 2$. Pour $\nu \to \infty$, c'est-à-dire au fur et à mesure de l'élargissement de la bande passante du

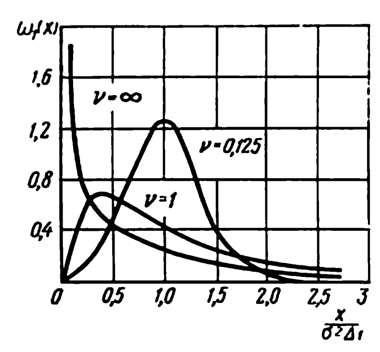


Fig. 9.1. Densité de probabilité d'un processus à la sortie d'un circuit type ($c^2 = 0$)

Fig. 9.2. Densité de probabilité d'un processus à la sortie d'un circuit type ($c^2 = 2$)

filtre, les courbes de distribution tendent vers les courbes correspondantes représentées sur la figure 3.2.

Les courbes montrent également qu'au fur et à mesure du rétrécissement de la bande passante du filtre ($\nu \to 0$) les densités de probabilité tendent vers la loi normale. Cette normalisation du processus aléatoire à la sortie d'un système linéaire à bande étroite, comme nous l'avons noté au § 5.3.1, est une conséquence du théorème central limite. Cette tendance vers la loi normale s'accentue avec l'augmentation du rapport signal/bruit c^2 à la sortie de l'amplificateur F.I.

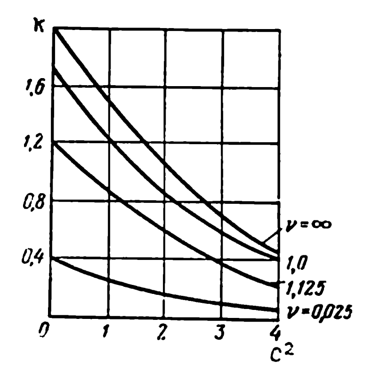


Fig. 9.3. Coefficient d'asymétrie d'un processus à la sortie d'un circuit type

En première approximation on peut estimer le degré de normalisation d'un processus aléatoire à la sortie du filtre au moyen du coefficient d'asymétrie k, dépendant de ν et de c suivant la formule (9.55) et les courbes correspondantes de la figure 9.3. Pour ν petits et c constant, le coefficient d'asymétrie en vertu de (9.55) est proportionnel à $\sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{2\Delta_2}{\Delta_1}}$.

9.2.5. Exemple de calcul pour les circuits linéaires du type *LRC* et *RC*. Parfois on peut éviter les difficultés de calcul des noyaux itérés (9.31) liées à l'extraction de (9.30) des nombres caractéristiques de l'équation intégrale (9.8) ou de l'équation équivalente (9.12).

Supposons, par exemple, que le circuit type soit formé d'un circuit oscillant d'entrée de haute qualité, d'un filtre RC de sortie et d'un système quadratique intermédiaire sélectionnant le carré de l'enveloppe et qu'on applique à l'entrée un bruit blanc normal. Désignons par Δ_1 et Δ_2 les bandes passantes du circuit d'entrée LRC et du filtre de sortie respectivement. En utilisant les formules du § 5.2.3 écrivons l'équation intégrale (9.23) pour l'exemple considéré de la manière suivante:

$$\frac{1}{\lambda} f(z) = \alpha_2 \int_0^\infty e^{-\alpha_1 |z-u|} e^{-\alpha_2 u} f(u)\, du, \tag{9.57}$$

où $\Delta_1 = \pi\alpha_1$; $\Delta_2 = \frac{\pi\alpha_2}{2}$.

Dérivant (9.57) deux fois par rapport à z on obtient l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$\frac{1}{\lambda} f''(z) = \frac{\alpha_1^2}{\lambda} f(z) - 2\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_2 z} f(z), \tag{9.58}$$

qui, après le changement de variable $x = 2\sqrt{\frac{2\alpha_1\lambda}{\alpha_2}}\, e^{-\frac{\alpha_2 z}{2}}$ devient une équation de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + \left[x^2 - \left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\right] y = 0, \tag{9.59}$$

de plus, on a

$$f(z) = y(x) = y\left(2\sqrt{\frac{2\alpha_1\lambda}{\alpha_2}}\, e^{-\frac{\alpha_2 z}{2}}\right). \tag{9.60}$$

La solution de cette équation satisfaisant à la condition $z \to \infty$, $f(z) \to 0$ est donnée par

$$f(z) = AJ_\mu\left(2\sqrt{\mu\lambda}\, e^{-\frac{\alpha_2 z}{2}}\right), \tag{9.61}$$

où $\mu = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2}$ et A est une constante arbitraire.

En portant (9.61) dans (9.57) on peut trouver les nombres caractéristiques λ de l'équation intégrale (9.57). Ils sont donnés par les racines de l'équation $J_{\mu-1}(\sqrt{2\mu\lambda}) = 0$ qui sont réelles car $\mu > 0$ (pour plus de détail voir [4], [8], [9]).

Si les racines de l'équation $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n = 0$ sont réelles on a *):

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} &= -c_1, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} &= c_1^2 - 2c_2, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} &= 3c_1c_2 - 3c_3 - c_1^3, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^4} &= c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 2c_2^2 + 4c_1c_3 - 4c_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.62)$$

En développant en série la fonction de Bessel on obtient:

$$J_{\mu-1}(2\sqrt{\mu\lambda}) = \frac{(\mu\lambda)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\left[1 - \lambda + \frac{\mu\lambda^2}{2\,!\,(\mu+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu^2\lambda^3}{3\,!\,(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{\mu^3\lambda^4}{4\,!\,(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} - \ldots\right]$$

et, compte tenu de (9.62), on trouve à partir de (9.30′) l'expression des quatre premiers cumulants de la distribution du processus à la sortie du circuit type considéré:

cumulant du premier ordre (valeur moyenne)

$$k_1 = \sigma^2, \qquad (9.63)$$

cumulant du second ordre (variance)

$$k_2 = \frac{2\sigma^4}{1+\mu}, \qquad (9.64)$$

cumulant du troisième ordre (moment central du troisième ordre)

$$k_3 = \frac{16\sigma^6}{(1+\mu)(2+\mu)}, \qquad (9.65)$$

cumulant du quatrième ordre

$$k_4 = \frac{48(6+5\mu)\sigma^8}{(1+\mu)^2(2+\mu)(3+\mu)}. \qquad (9.66)$$

On peut à partir des relations (9.64) à (9.66) trouver les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement du processus à la sortie du circuit

*) Voir Spiegel M.R. J. Appl. Phys., 1953, v. 24, page 1103.

type. On a :

$$k = 4\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{1+\mu}}{2+\mu}, \quad \gamma = \frac{12\,(6+5\mu)}{(2+\mu)\,(3+\mu)}. \tag{9.67}$$

On a représenté sur la figure 9.4 les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement du processus à la sortie du circuit type considéré en fonction du rapport des bandes passantes des éléments d'entrée et de sortie. Pour des μ grands, c'est-à-dire dans le cas où la bande passante du filtre de sortie est petite par rapport à celle du circuit d'entrée, les valeurs des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement décroissent comme suit :

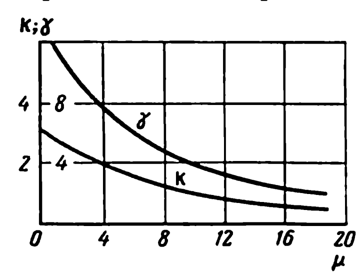


Fig. 9.4. Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement d'un processus à la sortie d'un circuit type

$$k \sim 4\sqrt{\frac{2}{\mu}}, \quad \gamma \sim \frac{60}{\mu}$$

tendant vers zéro pour $\mu \to \infty$. Ceci correspond à la normalisation du processus aléatoire à la sortie du circuit type avec le rétrécissement de la bande passante du filtre de sortie, ce que nous avons d'ailleurs déjà noté plus haut.

9.3. MULTIPLICATEUR — FILTRE

9.3.1. Solution exacte. Soient deux processus aléatoires $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ normaux stationnaires et stationnairement liés, dont les moyennes sont nulles, et les fonctions de corrélation et de corrélation mutuelle sont respectivement $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, $B_{12}(\tau)$, $B_{21}(\tau)$. Le produit $\xi_1(t)\,\xi_2(t)$ de ces processus traverse un système linéaire (filtre) dont la fonction de transition impulsionnelle est égale à $h(t)$. Nous nous proposons de calculer la densité de probabilité unidimensionnelle du processus aléatoire $\zeta(t)$ à la sortie du filtre.

Le processus aléatoire $\zeta(t)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t-u)\,\xi_2(t-u)\,h(u)\,du, \tag{9.68}$$

on suppose comme d'habitude que l'intégrale des processus aléatoires est convergente en moyenne quadratique. L'intégrale (9.68) peut s'écrire sous la forme d'une différence d'intégrales semblables à celles du paragraphe précédent, si au lieu de $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ on introduit leur demi-somme et leur demi-différence, il vient :

$$\varkappa_1(t) = \frac{\xi_1(t)+\xi_2(t)}{2}, \tag{9.69}$$

$$\varkappa_2(t) = \frac{\xi_1(t)-\xi_2(t)}{2}. \tag{9.69'}$$

Les processus aléatoires $\varkappa_1(t)$ et $\varkappa_2(t)$ sont également normalement distribués, leur moyenne étant nulle, et leurs fonctions de corrélation et d'autocorrélation sont [voir (4.56)] :

$$B_{\varkappa_1}(\tau)=\frac{1}{4}[B_1(\tau)+B_{12}(\tau)+B_{21}(\tau)+B_2(\tau)], \qquad (9.70)$$

$$B_{\varkappa_1\varkappa_2}(\tau)=\frac{1}{4}[B_1(\tau)-B_{12}(\tau)+B_{21}(\tau)-B_2(\tau)], \qquad (9.70')$$

$$B_{\varkappa_2\varkappa_1}(\tau)=\frac{1}{4}[B_1(\tau)+B_{12}(\tau)-B_{21}(\tau)-B_2(\tau)], \qquad (9.70'')$$

$$B_{\varkappa_2}(\tau)=\frac{1}{4}[B_1(\tau)-B_{12}(\tau)-B_{21}(\tau)+B_2(\tau)]. \qquad (9.70''')$$

En remplaçant dans (9.68) les variables ξ_1 et ξ_2 par la somme et la différence de $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ on obtient :

$$\zeta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\varkappa_1^2(t-u)-\varkappa_2^2(t-u)]\,h(u)\,du. \qquad (9.71)$$

Ainsi le problème se réduit de nouveau au calcul de la distribution des intégrales du carré d'un processus aléatoire normal.

La fonction caractéristique du processus $\zeta(t)$ à la sortie du filtre a la forme (9.16'), c'est-à-dire

$$\Theta_1(v)=\prod_j\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2iv}{\lambda_j}}}. \qquad (9.72)$$

La seule différence est que les nombres caractéristiques sont obtenus non pas à partir d'une seule équation (9.12), mais d'un système de deux équations intégrales linéaires non homogènes :

$$\frac{1}{\lambda}f_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty}B_{\varkappa_1}(z-u)\,h(u)\,f_1(u)\,du-\int_{-\infty}^{\infty}B_{\varkappa_1\varkappa_2}(z-u)\,h(u)\,f_2(u)\,du, \qquad (9.73)$$

$$\frac{1}{\lambda}f_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty}B_{\varkappa_2\varkappa_1}(z-u)\,h(u)\,f_1(u)\,du-\int_{-\infty}^{\infty}B_{\varkappa_2}(z-u)\,h(u)\,f_2(u)\,du. \qquad (9.73')$$

Notons que si $\xi_1(t)\equiv\xi_2(t)$, on a $\varkappa_1(t)=\xi_1(t)$, $\varkappa_2(t)\equiv 0$, l'équation (9.73') disparaît, et (9.73) coïncide, comme il se devait, avec (9.12), car dans ce cas le problème se réduit au calcul de la distribution du carré d'un processus aléatoire normal stationnaire à la traversée d'un filtre.

9.3.2. Distribution du produit de processus aléatoires normaux cohérents. La résolution du système d'équations intégrales (9.73) et (9.73') est liée dans le cas général à des difficultés d'intégration numérique. Cependant il existe un cas particulier où l'on peut trouver facilement la solution cherchée. Il s'agit ici, comme dans le § 9.2, de la caractéristique fréquentielle d'un filtre uniforme sur toutes les fréquences, par conséquent la fonction de transition impulsionnelle est égale à une fonction delta, c'est-à-dire $h(t) = \delta(t)$. Les équations (9.73) et (9.73') deviennent le système d'équations algébriques suivant (compte tenu de la propriété de filtrage de la fonction delta):

$$\frac{1}{\lambda} f_1(z) = B_{\varkappa_1}(z) f_1(0) - B_{\varkappa_1\varkappa_2}(z) f_2(0), \tag{9.74}$$

$$\frac{1}{\lambda} f_2(z) = B_{\varkappa_2\varkappa_1}(z) f_1(0) - B_{\varkappa_2}(z) f_2(0). \tag{9.74'}$$

Comme ces équations doivent être vérifiées quel que soit z, posant $z = 0$ on obtient:

$$B_{\varkappa_1\varkappa_2}(0) f_2(0) = \left[B_{\varkappa_1}(0) - \frac{1}{\lambda}\right] f_1(0),$$

$$B_{\varkappa_2\varkappa_1}(0) f_1(0) = \left[B_{\varkappa_2}(0) - \frac{1}{\lambda}\right] f_2(0),$$

d'où

$$B_{\varkappa_1\varkappa_2}(0) B_{\varkappa_2\varkappa_1}(0) = \left[B_{\varkappa_1}(0) - \frac{1}{\lambda}\right]\left[B_{\varkappa_2}(0) - \frac{1}{\lambda}\right]. \tag{9.75}$$

Introduisons les désignations suivantes:

$$\sigma_1^2 = B_1(0),\ \sigma_2^2 = B_2(0),\ \sigma_{12}^2 = B_{12}(0) = B_{21}(0).$$

On a alors en vertu de (9.70) à (9.70''')

$$B_{\varkappa_1}(0) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}^2), \tag{9.76}$$

$$B_{\varkappa_2}(0) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2), \tag{9.76'}$$

$$B_{\varkappa_1\varkappa_2}(0) = B_{\varkappa_2\varkappa_1}(0) = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4}. \tag{9.76''}$$

En portant (9.76) à (9.76'') dans (9.75), on obtient une équation du second degré par rapport à la grandeur $\frac{1}{\lambda}$

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\lambda} + \frac{1}{4}(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^4) = 0,$$

les racines de cette équation sont

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_1\sigma_2}{2},\quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\sigma_{12}^2 - \sigma_1\sigma_2}{2}. \tag{9.77}$$

La première racine est positive, et la seconde négative car $\sigma_{12}^2 \leqslant \leqslant \sigma_1\sigma_2$ [voir (4.54)].

En portant (9.77) dans (9.72) on trouve l'équation cherchée de la fonction caractéristique du produit de deux processus aléatoires normaux stationnaires et cohérents, soit:

$$\Theta_1(v) = \{[1 - iv(\sigma_{12}^2 + \sigma_1\sigma_2)][1 - iv(\sigma_{12}^2 - \sigma_1\sigma_2)]\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.78)$$

Par transformation de Fourier inverse de (9.78) on obtient la formule suivante pour la densité de probabilité unidimensionnelle de ce produit [comparer avec (1) dans le problème 3.1]:

$$w_1(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^4}} e^{\frac{\sigma_{12}^2 y}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^4}} K_0\left(\frac{\sigma_1\sigma_2 |y|}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^4}\right), \quad (9.79)$$

où K_0 est la fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro de l'argument imaginaire.

9.3.3. Solution approchée pour un filtre *RC*. Supposons qu'à l'entrée d'un multiplicateur on applique un bruit blanc normal de fonction de corrélation

$$B_1(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) \quad (9.80)$$

et un processus aléatoire normal stationnaire de fonction de corrélation

$$B_2(\tau) = \frac{\alpha\sigma^2}{2} e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad (9.81)$$

supposons de plus que les fonctions de corrélation mutuelle de ces processus soient respectivement (voir § 5.2.6):

$$B_{12}(\tau) = \begin{cases} \alpha\sigma^2 e^{-\alpha\tau}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \quad (9.82)$$

$$B_{21}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0, \\ \alpha\sigma^2 e^{\alpha\tau}, & \tau < 0. \end{cases} \quad (9.83)$$

Supposons également que le système linéaire après le multiplicateur soit un filtre *RC*, dont la fonction de transition impulsionnelle est

$$h(t) = \beta e^{-\beta t}, \quad t > 0, \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0. \quad (9.84)$$

En vertu de (9.81) et (9.84) les grandeurs α et β sont respectivement proportionnelles à la largeur de bande du processus à l'entrée du multiplicateur et à la largeur de bande du filtre.

Remplaçons dans le système d'équations intégrales (9.73) et (9.73') les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ par les fonctions $g_1(z)$ et $g_2(z)$ d'après

les formules

$$f_1(z) = \frac{1}{2}[g_1(z) + g_2(z)],$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2}[g_1(z) - g_2(z)].$$

Compte tenu des formules (9.70) à (9.70‴), (9.80) à (9.84) et de la propriété de filtrage de la fonction delta, le système d'équations intégrales devient alors:

$$\mu g_1(z) = \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{(\alpha-\beta)u} g_1(u)\, du + \beta e^{-\beta z} g_2(z), \tag{9.85}$$

$$\mu g_2(z) = \frac{\alpha\beta}{2} e^{-\alpha z} \int_0^z e^{(\alpha-\beta)u} g_1(u)\, du + \frac{\alpha\beta}{2} e^{\alpha z} \int_z^\infty e^{-(\alpha+\beta)u} g_1(u)\, du +$$

$$+ \alpha\beta e^{\alpha z} \int_z^\infty e^{-(\alpha+\beta)u} g_2(u)\, du, \tag{9.85'}$$

où

$$\mu = \frac{2}{\lambda\sigma^2}. \tag{9.86}$$

En dérivant les deux membres de (9.85′) on obtient:

$$\mu g_2'(z) = -\frac{\alpha^2\beta}{2} e^{-\alpha z} \int_0^z e^{(\alpha-\beta)u} g_1(u)\, du +$$

$$+ \frac{\alpha^2\beta}{2} e^{\alpha z} \int_z^\infty e^{-(\alpha+\beta)u} g_1(u)\, du +$$

$$+ \alpha^2\beta e^{\alpha z} \int_z^\infty e^{-(\alpha+\beta)u} g_2(u)\, du - \alpha\beta e^{-\beta z} g_2(z). \tag{9.87}$$

En multipliant les deux membres de (9.85′) par $-\alpha$ et en ajoutant au résultat (9.87) on trouve, compte tenu de (9.85), une relation simple entre $g_2(z)$ et $g_1(z)$:

$$\mu g_2'(z) - \mu\alpha g_2(z) = -\alpha^2\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{(\alpha-\beta)u} \times$$

$$\times g_1(u)\, du - \alpha\beta e^{-\beta z} g_2(z), \tag{9.88}$$

ou

$$g_2'(z) - \alpha g_2(z) = -\alpha g_1(z). \tag{9.88'}$$

Pour exclure de (9.88′) la fonction $g_1(z)$, dérivons (9.88) par rapport à z et utilisons (9.85), il vient :

$$\mu\,[g_2''(z) - \alpha g_2'(z)] = \alpha^2(\mu - \beta e^{-\beta z})\,g_1(z) - \\ - \alpha^2\beta e^{-\beta z} g_2(z) - \alpha\beta e^{-\beta z}\,[g_2'(z) - \beta g_2(z)]. \quad (9.89)$$

En comparant (9.88′) et (9.89) on voit que pour exclure $g_1(z)$ il suffit de multiplier les deux membres de (9.88′) par $\alpha(\mu - \beta e^{-\beta z})$ et de les ajouter ensuite à (9.89). Après diverses réductions, on arrive à l'équation différentielle ordinaire du second ordre suivante :

$$g_2''(z) + \left[\frac{\alpha\beta}{\mu}(2\alpha - \beta)\,e^{-\beta z} - \alpha^2\right] g_2(z) = 0, \quad (9.90)$$

c'est-à-dire à une équation du même type que (9.58). En utilisant le procédé employé au § 9.2.5 on peut mettre (9.90) sous la forme d'une équation de Bessel dont la solution satisfait à la condition $z \to \infty$, $g_2(z) \to 0$ [voir (9.85′)], soit :

$$g_2(z) = AJ_{\frac{2\alpha}{\beta}}\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1\right)}\,e^{-\frac{\beta z}{2}}\right]. \quad (9.91)$$

En portant (9.91) dans (9.88′) et compte tenu de la formule de récurrence des fonctions de Bessel on trouve la seconde fonction inconnue

$$g_1(z) = A\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{2\alpha}{\beta} - 1\right)}\,e^{-\frac{\beta z}{2}} \times \\ \times J_{\frac{2\alpha}{\beta}-1}\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{2\alpha}{\mu} - 1\right)}\,e^{-\frac{\beta z}{2}}\right]. \quad (9.92)$$

Si maintenant on porte (9.91) et (9.92) dans (9.85) on peut calculer les nombres caractéristiques λ_j du système d'équations intégrales, se trouvant dans l'expression (9.72) de la fonction caractéristique à la sortie du filtre. Ce sont simplement les zéros de la fonction de Bessel

$$J_{\frac{2\alpha}{\beta}-2}\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{2\alpha}{\mu} - 1\right)}\right],$$

dont les racines sont toutes réelles car $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ et par conséquent $\frac{2\alpha}{\beta} - 2 > -2$. En écrivant les quatre premiers termes du développement de cette fonction en série suivant les puissances et en utilisant (9.62) on obtient les expressions suivantes pour les quatre premiers cumulants de la distribution du processus à la sortie du filtre :

pour cumulant du premier ordre (moyenne)

$$k_1 = \frac{\alpha\sigma^2}{2}, \tag{9.93}$$

pour cumulant du second ordre (variance)

$$k_2 = \frac{\beta}{\alpha} k_1^2, \tag{9.94}$$

pour cumulant du troisième ordre (moment central du troisième ordre)

$$k_3 = k_1^3 \frac{8\beta}{\alpha} \frac{\beta}{2\alpha+\beta}, \tag{9.95}$$

pour cumulant du quatrième ordre

$$k_4 = k_1^4 \frac{6\beta}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{\beta}{2\alpha+\beta} \frac{10\alpha+\beta}{\alpha}. \tag{9.96}$$

On peut à partir de (9.95) et (9.96) trouver également les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement:

$$\text{k} = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = \frac{8\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}{\frac{2\alpha}{\beta}+1}, \tag{9.97}$$

$$\gamma = \frac{k_4}{k_2^2} = 6\,\frac{10\frac{\alpha}{\beta}+1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)\left(\frac{2\alpha}{\beta}+1\right)}. \tag{9.98}$$

Pour des valeurs grandes de $\frac{\alpha}{\beta}$, c'est-à-dire si la bande passante du filtre est petite par rapport à la bande passante du spectre énergétique du processus à l'entrée du multiplicateur, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement décroissent comme suit:

$$\text{k} \sim \frac{4}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}, \quad \gamma \sim \frac{30}{\frac{\alpha}{\beta}}$$

et tendent vers zéro pour $\frac{\alpha}{\beta} \to \infty$. Nous avons là une confirmation supplémentaire du théorème de normalisation du processus à la sortie du circuit type au fur et à mesure du rétrécissement relatif de la largeur de la bande passante du filtre de sortie.

9.4. DISTRIBUTION DE LA PUISSANCE MOYENNE SUR UN TEMPS FINI

9.4.1. Processus à large bande. Soit un processus aléatoire normal ergodique $\xi(t)$ de moyenne nulle et de fonction de corrélation $B_\xi(\tau)$. La puissance moyenne de ce processus calculée comme le carré moyen sur l'intervalle de temps T est égale à

$$\eta_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi^2(t)\, dt, \tag{9.99}$$

où l'intégrale est prise en moyenne quadratique. La fonction caractéristique de la variable aléatoire η_T peut se calculer à l'aide de la formule générale (9.16′). Les nombres caractéristiques λ_j de cette formule sont donnés par l'équation (9.12) avec

$$h_2(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & |\tau| \leqslant \frac{T}{2}, \\ 0, & |\tau| > \frac{T}{2}, \end{cases} \tag{9.100}$$

et la fonction de corrélation dans cette équation coïncide avec $B_\xi(\tau)$. Ainsi, dans notre cas les nombres caractéristiques donnant la distribution de la puissance moyenne sur un temps T peuvent être obtenus à partir de l'équation intégrale

$$\lambda \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_\xi(z-\tau) f(\tau)\, d\tau = T f(z). \tag{9.101}$$

Notons que (9.100) donne la fonction de transition impulsionnelle d'un intégrateur parfait, dont la largeur de bande est proportionnelle à $\frac{1}{T}$.

Calculons la distribution de la puissance moyenne dans le cas où

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \tag{9.102}$$

c'est-à-dire lorsque le processus $\xi(t)$ provient d'un bruit blanc normal ayant traversé un circuit RC [voir (5.38)].

Tout comme dans les cas étudiés aux §§ 9.2.5 et 9.3.3 l'équation intégrale (9.101) se réduit facilement à une équation différentielle du second ordre, avec cette seule différence que dans notre cas l'équation différentielle est linéaire. En effet, compte tenu de (9.102),

on peut écrire (9.101) sous la forme suivante:

$$\frac{T}{\lambda\sigma_\xi^2} f(z) = \int_{-\frac{T}{2}}^{z} e^{-\alpha(z-\tau)} f(\tau)\, d\tau + \int_{z}^{\frac{T}{2}} e^{-\alpha(\tau-z)} f(\tau)\, d\tau$$

et en dérivant deux fois par rapport à z les deux membres de cette égalité on trouve:

$$\frac{T}{\lambda\sigma_\xi^2} f''(z) = \alpha^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{z} e^{-\alpha(z-\tau)} f(\tau)\, d\tau + \alpha^2 \int_{z}^{\frac{T}{2}} e^{-\alpha(\tau-z)} f(\tau)\, d\tau - 2\alpha f(z),$$

d'où

$$f''(z) = \frac{\lambda\sigma_\xi^2}{T} \left[\alpha^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\alpha|z-\tau|} f(\tau)\, d\tau - 2\alpha f(z)\right]$$

ou encore

$$f''(z) + \left(\frac{2\lambda\sigma_\xi^2}{\alpha T} - 1\right) \alpha^2 f(z) = 0. \qquad (9.103)$$

La solution générale de l'équation (9.103) est de la forme:

$$f(z) = c_1 e^{ib\alpha z} + c_2 e^{-ib\alpha z}, \qquad (9.104)$$

avec

$$b^2 = \frac{2\lambda\sigma_\xi^2}{\alpha T} - 1. \qquad (9.104')$$

En portant (9.104) dans (9.101) on voit que cette solution n'est une fonction propre de l'équation intégrale que si $b^2 > 0$ et si de plus la grandeur b satisfait à l'une des équations transcendantes

$$b \operatorname{tg}(\alpha T b) = 1, \quad b \operatorname{ctg}(\alpha T b) = -1. \qquad (9.105)$$

Ainsi les nombres caractéristiques de l'équation intégrale (9.101) pour un processus aléatoire de fonction de corrélation exponentielle donnée par (9.102) sont *)

$$\lambda_k = \frac{\alpha T}{2\sigma_\xi^2} (1 + b_k^2), \qquad (9.106)$$

où b_k sont les racines de l'équation (9.105).

*) Comme le noyau de l'équation (9.101) est défini positif, tous les nombres caractéristiques sont positifs.

La figure 9.5 donne une famille de courbes des densités de probabilité de la puissance moyenne pour plusieurs valeurs du paramètre $\beta = \frac{\alpha T}{2}$ *). Pour $\beta = 0$ (c'est-à-dire pour $T = 0$) on a $\eta_T = \xi^2(t)$. Par conséquent la courbe $\beta = 0$ sur la figure 9.5 correspond à la distribution unidimensionnelle du carré d'un processus aléatoire normal stationnaire [voir (3.10')]. Lorsque la grandeur β croît avec le temps T sur lequel on prend la moyenne, le maximum de la densité de probabilité pour $\frac{y}{\sigma_\xi^2} = 1$ apparaît plus nettement, c'est-à-dire qu'au voisinage de la valeur moyenne de la puissance moyenne on a $m_1\{\eta_T\} = m_1\{\xi^2(t)\} = \sigma_\xi^2$. Notons que la variance de la puissance moyenne, égale à (voir problème 7.6, *a*)

$$M_2\{\eta_T\} = \frac{\sigma_\xi^4}{(2\beta)^2}(4\beta - 1 + e^{-4\beta}), \tag{9.107}$$

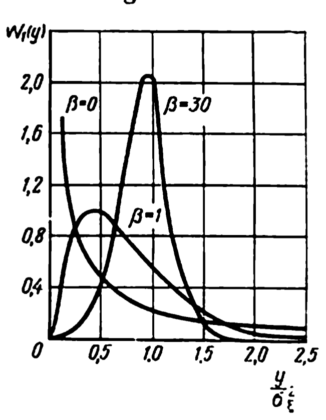


Fig. 9.5. Densité de probabilité de la puissance moyenne d'un bruit à la traversée d'un circuit *RC*

tend vers zéro lorsque le temps sur lequel on prend la moyenne augmente indéfiniment, soit:

$$M_2\{\eta_T\} \sim \frac{\sigma_\xi^4}{\beta} = \frac{2\sigma_\xi^4}{\alpha T}. \tag{9.107'}$$

La distribution de la puissance moyenne est alors asymptotiquement normale

$$W_{1\eta_T}(y) \sim \frac{1}{\sigma_\xi^2}\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\, e^{-\frac{\beta(y-\sigma_\xi^2)^2}{2\sigma_\xi^4}}. \tag{9.108}$$

On peut étudier d'une manière analogue (voir [11]) la distribution de la puissance moyenne d'un processus ergodique normal dont le spectre énergétique est

$$F_\xi(\omega) = \frac{2Q\sigma_\xi^2}{\omega_0}\,\frac{\omega^2}{\omega^2 + \left(\frac{Q}{\omega_0}\right)^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \tag{9.109}$$

*) Ces courbes sont tirées de [11], elles ont été obtenues par une méthode approchée avec des erreurs ne dépassant pas un pour cent.

A ce spectre correspond un bruit blanc ayant traversé un circuit oscillant formé par une résistance R, une inductance L et un condensateur C en série (voir § 5.2.3), Q étant toujours le coefficient de surtension du circuit, et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation de résonance.

La figure 9.6 donne une famille de courbes des densités de probabilité de la puissance moyenne du processus mentionné pour plusieurs valeurs du paramètre $\rho = \frac{\omega_0 T}{2Q}$. Pour $T = 0$ la courbe de la figure 9.6 (tout comme sur la figure 9.5 pour $\beta = 0$) correspond à la distribution unidimensionnelle du carré d'un processus aléatoire normal stationnaire. Au fur et à mesure de l'accroissement de ρ (augmentation du temps T sur lequel on prend la moyenne) on voit apparaître le maximum de la densité de probabilité pour $\frac{y}{\sigma_\xi^2} = 1$, c'est-à-dire qu'au voisinage de la valeur moyenne de la puissance moyenne on a $m_1\{\eta_T\} = \sigma_\xi^2$, bien que comparativement aux courbes de la figure 9.5, celles de la figure 9.6, pour des valeurs comparables de ρ et β, aient une pente plus douce. La variance de la puissance moyenne égale ici à (voir problème 7.6, *b*)

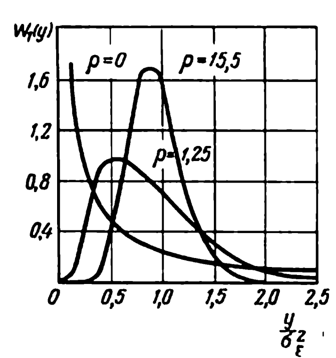


Fig. 9.6. Densité de probabilité de la puissance moyenne d'un bruit à la traversée d'un circuit *RLC*

$$M_2\{\eta_T\} = \frac{\sigma_\xi^4}{2\rho^2}\left(2\rho - 1 + e^{-2\rho} + \frac{2e^{-2\rho}}{4Q^2-1}\sin^2\rho\sqrt{4Q^2-1}\right), \tag{9.110}$$

décroît lorsque le temps sur lequel on prend la moyenne augmente indéfiniment, soit:

$$M_2\{\eta_T\} \sim \frac{\sigma_\xi^4}{\rho} = \frac{2Q\sigma_\xi^4}{\omega_0 T}. \tag{9.110'}$$

La distribution de la puissance moyenne pour $\rho \to \infty$ tend asymptotiquement vers la loi normale

$$W_{1\eta_T}(y) \sim \frac{1}{\sigma_\xi^2}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\, e^{-\frac{\rho(y-\sigma_\xi^2)^2}{2\sigma_\xi^4}}. \tag{9.111}$$

9.4.2. Enveloppe d'un processus à bande étroite. Soit $\xi(t)$ un processus aléatoire normal ergodique à bande étroite de moyenne nulle et dont le spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ est symétrique par rapport à la pulsation centrale ω_0. La fonction de corrélation de ce processus peut, en vertu de (4.72), s'écrire sous la forme

$$B_\xi(\tau) = a_c(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

où $a_c(\tau)$ est la fonction de corrélation d'une des composantes en quadrature $A(t)$ ou $C(t)$ (voir § 6.2.2). La valeur moyenne de l'enveloppe $E(t)$ du processus $\xi(t)$ sur l'intervalle de temps T est égale à

$$\zeta_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E^2(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [A^2(t) + C^2(t)]\,dt. \quad (9.112)$$

La fonction caractéristique de la variable aléatoire ζ_T peut être calculée à l'aide de la formule générale (9.26'). Les nombres caractéristiques figurant dans cette formule doivent être obtenus à partir de l'équation intégrale (9.25), laquelle dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\lambda \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_c(z-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = Tf(z). \quad (9.113)$$

Si $\xi(t)$ est un bruit blanc normal ayant traversé un circuit oscillant RLC, on a [voir (5.40)]

$$a_c(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha = \frac{R}{2L} > 0. \quad (9.114)$$

Dans ce cas (9.114) ne diffère pas de (9.102) et par conséquent les nombres caractéristiques peuvent être obtenus à partir des équations transcendantes (9.105). Il est évident que la distribution de la puissance moyenne de l'enveloppe du processus considéré diffère de la distribution de la puissance moyenne d'un bruit à large bande ayant traversé un circuit RC, car ces distributions sont obtenues à partir des mêmes fonctions caractéristiques mais portées dans des formules différentes [voir (9.26') et (9.16')].

La moyenne et la variance de la variable aléatoire ζ_T sont [voir (9.107)]

$$m_1\{\zeta_T\} = 2\sigma_\xi^2, \quad (9.115)$$

$$M_2\{\zeta_T\} = \frac{\sigma_\xi^4}{2\beta^2}(4\beta - 1 + e^{-4\beta}), \quad \beta = \frac{\alpha T}{2}, \quad (9.115')$$

cette dernière décroît comme

$$M_2\{\zeta_T\} \sim \frac{2\sigma_\xi^4}{\beta}, \quad (9.116)$$

lorsque $\beta \to \infty$.

La distribution de la puissance moyenne de l'enveloppe est alors normale de paramètres $2\sigma_\xi^2$, $\frac{2\sigma_\xi^4}{\beta}$.

Problèmes

9.1. Un circuit type se compose d'un cuircuit oscillant RLC de coefficient de surtension élevé, d'un détecteur quadratique dégageant le carré de l'amplitude et d'un intégrateur RC, le rapport des bandes passantes des circuits avant et après le détecteur étant $\mu = \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{3}{2}$. Montrer que la densité de probabilité du processus à la sortie de ce circuit type, lorsqu'on applique un bruit blanc normal à son entrée, est

$$W_1(y) = \frac{2\pi^2}{3\sigma^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 e^{-\frac{\pi^2 k^2 y}{3\sigma^2}}, \tag{1}$$

où σ^2 est la puissance du bruit par unité de bande de fréquences.

9.2. Montrer que dans les conditions du problème précédent, pour un rapport arbitraire des bandes passantes μ et un temps fini T d'intégration après le détecteur, la distribution du processus à la sortie du circuit type est donnée par la formule générale (9.16′) en substituant les nombres caractéristiques $\lambda_j = \frac{\alpha_2}{8\alpha_1} q_j^2$, où q_j sont les racines positives de l'équation

$$J_{\mu+1}\left(e^{-\frac{\alpha_2 T}{2}} q_j\right) N_{\mu-1}(q_j) = J_{\mu-1}(q_j) N_{\mu+1}\left(e^{-\frac{\alpha_2 T}{2}} q_j\right), \tag{2}$$

J_n et N_m étant les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce.

9.3. En utilisant la représentation d'un processus aléatoire à bande étroite $\xi(t)$ sous la forme d'une somme de composantes en quadrature, montrer que lorsque le temps T sur lequel on prend la moyenne est fini, la distribution de la puissance moyenne d'un bruit blanc normal à la sortie d'un circuit oscillant RLC de coefficient de surtension élevé tend asymptotiquement, pour $Q \to \infty$ [comparer avec (3.38)], vers

$$W_{1\eta_T}(y) \sim \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{y}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)} I_0\left[\frac{y}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right], \tag{3}$$

où

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\xi}{2}\left(1 + \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T}\right); \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_\xi}{2}\left(1 - \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T}\right). \tag{3′}$$

Chapitre 10

DÉPASSEMENTS DES PROCESSUS ALÉATOIRES

10.1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans de nombreux problèmes pratiques on a besoin de connaître la densité de probabilité ou les caractéristiques numériques des durées des *dépassements* d'un processus aléatoire $\xi(t)$, où la durée ζ_d du dépassement est l'intervalle de temps durant lequel $\xi(t)$ est supérieur à un certain niveau $x = x_0$. Il est aussi intéressant de connaître la durée des *intervalles* ζ_{in} séparant les dépassements (dépassement négatif), c'est-à-dire des intervalles de temps durant lesquels $\xi(t)$ est inférieur à un certain niveau $x = x_0$ (fig. 10.1).

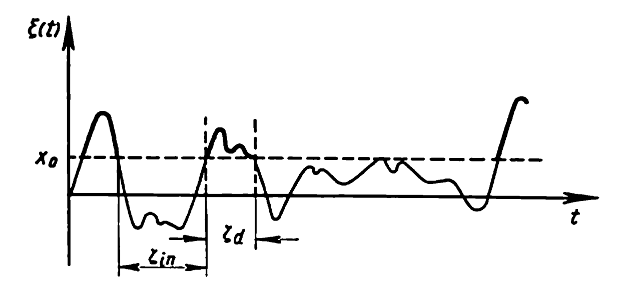


Fig. 10.1. Intersection d'un niveau donné par un processus aléatoire

Parfois au lieu de la distribution de la durée des dépassements on étudie la distribution des zéros d'une variable aléatoire, c'est-à-dire des points d'intersection de cette fonction avec une droite donnée. Dans le cas général, on peut étudier la distribution des points d'intersection de $\xi(t)$ avec une fonction donnée $f(t)$ ou le temps global durant lequel le processus dépasse une fonction donnée. Ceci conduit au problème de la distribution du temps où les processus aléatoires se trouvent entre deux niveaux (ou deux fonctions du temps).

Le problème de la détermination des caractéristiques probabilistes des dépassements des processus aléatoires attire depuis longtemps l'attention des mathématiciens et des ingénieurs. Déjà en 1945 Rice [15] a calculé l'expression générale de la densité de probabilité des durées des dépassements sous la forme d'une série lentement convergente, dont les termes sont des intégrales de mul-

tiplicité indéfiniment croissant (voir § 10.2.4). Déjà lors du calcul des premiers termes de cette série (même en utilisant des ordinateurs rapides) on se heurte à de grosses difficultés. La première approximation de cette série n'est acceptable que pour des durées petites des dépassements et même la représentation qualitative à l'extérieur de l'intervalle des petites durées n'est pas correcte. Relativement simples sont les formules donnant la moyenne et la variance du nombre d'intersections (§§ 10.2.1, 10.2.2).

Les travaux de ces dernières années visent non pas à obtenir une formule exacte utilisable pour les calculs pratiques des densités de probabilité des dépassements, mais à élaborer d'une part des méthodes approchées de calcul desdites fonctions (§ 10.3). et d'autre part à réaliser de nombreuses expériences permettant d'accumuler des données empiriques (voir [13]).

Le présent chapitre est consacré au calcul des caractéristiques probabilistes des dépassements, des intervalles séparant les dépassements et du nombre d'intersections, sur un certain intervalle de temps, d'un niveau donné par des processus aléatoires continus, dérivables tout au moins en probabilité (voir § 4.3.3). Cette dernière condition est très importante. En effet pour les processus de Markov n'ayant pas de dérivées (déterminées conformément aux critères probabilistes du § 4.3.3), les caractéristiques étudiées ci-dessous n'ont pas de sens.

10.2. CARACTÉRISTIQUES PROBABILISTES DES DÉPASSEMENTS

10.2.1. Nombre moyen d'intersections. Nous allons commencer par l'étude de la caractéristique la plus simple des dépassements d'un processus aléatoire, c'est-à-dire du nombre moyen d'intersections de ce processus d'un certain niveau $x = x_0$ par unité de temps.

La probabilité d'intersection du niveau $x = x_0$ de bas en haut (c'est-à-dire avec une dérivée positive) sur un intervalle de temps suffisamment petit Δt coïncide avec la probabilité des inégalités

$$x_0 - \Delta x < \xi(t) < x_0, \quad \frac{d\xi(t)}{dt} > 0.$$

Soit $w_2(x, y, t)$ la densité de probabilité bidimensionnelle de $\xi(t)$ et de $\frac{d\xi(t)}{dt}$ à l'instant t. On a alors

$$P\left\{x_0 - \Delta x < \xi(t) < x_0, \quad \frac{d\xi(t)}{dt} > 0\right\} = \int_0^\infty \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} w_2(x, y, t)\, dx\, dy$$

Pour un Δt suffisamment petit l'intégrale intérieure peut être remplacée par l'expression $w_2(x_0, y, t)\, \Delta x = y w_2(x_0, y, t)\, \Delta t$, on

a alors

$$P\left\{x_0-\Delta x<\xi(t)<x_0,\ \frac{d\xi(t)}{dt}>0\right\}=$$

$$=\Delta t\int_0^\infty yw_2(x_0,y,t)\,dy=v_1(x_0,t)\,\Delta t, \qquad (10.1)$$

avec la notation

$$v_1(x,t)=\int_0^\infty yw_2(x,y,t)\,dy. \qquad (10.2)$$

Considérons maintenant l'intervalle de temps fini $(t, t+T)$ et divisons cet intervalle en N petits intervalles ne se recouvrant pas $(t_i, t_i+\Delta t_i)$ par des points intermédiaires $t=t_1<t_2<\ldots$ $\ldots<t_{N+1}=t+T$; $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$. Pour chacun des intervalles de temps mentionnés calculons la grandeur ν_i, égale à l'unité si sur l'intervalle $(t_i, t_i+\Delta t_i)$ le processus $\xi(t)$ coupe le niveau $x=x_0$ avec une dérivée positive, et égale à zéro si cette intersection n'a pas lieu. Ces variables aléatoires sont en quelque sorte des compteurs d'intersections. Il est évident que le nombre total d'intersections sur l'intervalle $(t, t+T)$ est $\nu=\sum_{i=1}^{N}\nu_i$. On suppose que Δt_i est tellement petit, que la probabilité de plus d'une intersection est négligeable. Comme la probabilité d'avoir $\nu_i=1$ est donnée par la formule (10.1), la valeur moyenne $M_1(x_0, t, T)$ du nombre d'intersections du niveau $x=x_0$ avec une dérivée positive sur l'intervalle mentionné est égale à

$$M_1(x_0,t,T)=m_1\{\nu\}=\sum_{i=1}^{N}m_1\{\nu_i\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}P\left\{x_0-\Delta x_i<\xi(t_i)<x_0,\ \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=t_i}>0\right\}=\sum_{i=1}^{N}v_1(x_0,t_i)\,\Delta t_i.$$

En passant à la limite pour $N\to\infty$ on trouve la formule suivante pour le nombre moyen d'intersections du niveau $x=x_0$ avec une dérivée positive sur l'intervalle $(t, t+T)$:

$$M_1(x_0,t,T)=\int_t^{t+T}v_1(x_0,t)\,dt$$

ou encore

$$M_1(x_0,t,T)=\int_t^{t+T}\int_0^\infty yw_2(x_0,y,t)\,dy\,dt. \qquad (10.3)$$

La valeur moyenne du nombre d'intersections avec une dérivée positive du niveau x_0 par unité de temps $\left(\text{c'est-à-dire} \lim\limits_{N\to\infty} m_1\left\{\frac{\nu}{T}\right\}\right)$ est

$$\lambda_1(x_0, t, T) = \frac{M_1(x_0, t, T)}{T} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_0^\infty y w_2(x_0, y, t)\, dy\, dt. \qquad (10.4)$$

Pour un processus aléatoire stationnaire, la distribution conjointe du processus et de sa dérivée aux mêmes instants de temps ne dépend pas de t, et le nombre moyen d'intersections avec une dérivée positive du niveau x_0 par unité de temps est constant et égal à

$$\lambda_1(x_0) = v_1(x_0) = \int_0^\infty y w_2(x_0, y)\, dy. \qquad (10.5)$$

D'une manière analogue on peut trouver la formule donnant la valeur moyenne du nombre d'intersections du niveau $x = x_0$ de haut en bas (c'est-à-dire avec une dérivée négative) sur l'intervalle $(t, t+T)$. On a:

$$M_1^*(x_0, t, T) = \int_t^{t+T} P\left\{x_0 < \xi(t) < x_0 + \Delta x, \ \frac{d\xi(t)}{dt} < 0\right\} =$$

$$= \int_t^{t+T} v_1^*(x_0, t)\, dt, \qquad (10.6)$$

où

$$v_1^*(x, t) = -\int_{-\infty}^0 y w_2(x, y, t)\, dy = \int_{-\infty}^0 |y|\, w_2(x, y, t)\, dy.$$

Cependant, comme la distribution conjointe du processus et de sa dérivée aux mêmes instants de temps est paire par rapport à la variable y [voir (4.142)], il vient:

$$v_1^*(x, t) = \int_{-\infty}^0 y w_2(x, y)\, dy = v_1(x, t) \qquad (10.7)$$

et par conséquent

$$M_1^*(x_0, t, T) = M_1(x_0, t, T). \qquad (10.8)$$

Pour un processus aléatoire stationnaire

$$\lambda_1^*(x_0) = \frac{M_1^*(x_0, t, T)}{T} = \lambda_1(x_0) = v_1(x_0). \qquad (10.9)$$

La valeur moyenne du nombre total d'intersections par unité de temps est, en vertu de (10.9), égale à

$$\lambda(x_0) = 2\lambda_1(x_0) = 2\int_0^\infty y w_2(x_0, y)\, dy. \quad (10.10)$$

Notons que le nombre moyen d'intersections avec une dérivée de signe donné (positif ou négatif) coïncide avec le nombre moyen de dépassements du processus aléatoire. Ainsi les formules (10.3) et (10.4) donnent également le nombre moyen de dépassements respectivement sur un intervalle donné et par unité de temps.

10.2.2. Variance du nombre d'intersections. Pour obtenir la formule donnant la variance du nombre d'intersections (à dérivée positive) sur l'intervalle $(t, t+T)$ nous allons de nouveau utiliser les compteurs d'intersections et considérer le second moment de la somme $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$, c'est-à-dire

$$m_2\{\nu\} = m_1\left\{\left(\sum_{i=1}^{N}\nu_i\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{N} m_1\{\nu_i^2\} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_1\{\nu_i\nu_j\}. \quad (10.11)$$

Comme la variable aléatoire ν_i ne prend que deux valeurs: l'unité avec une probabilité égale à $v_1(x_0, t_i)\,\Delta t_i$ et zéro avec une probabilité égale à $1 - v_1(x_0, t_i)\,\Delta t_i$, on a

$$m_1\{\nu_i^2\} = v_1(x_0, t_i)\,\Delta t_i \quad (10.12)$$

et pour $i \neq j$

$$m_1\{\nu_i\nu_j\} = P\{\nu_i = 1, \nu_j = 1\} =$$
$$= P\left\{x_0 - \Delta x_i < \xi(t_i) < x_0,\ \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=t_i} > 0,\right.$$
$$\left. x_0 - \Delta x_j < \xi(t_j) < x_0,\ \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=t_j} > 0\right\}. \quad (10.13)$$

Tout comme dans le cas de (10.1) on obtient à partir de (10.13)

$$m_1\{\nu_i\nu_j\} = \Delta t_i\Delta t_j \int_0^\infty\int_0^\infty y_1 y_2 w_4(x_0, y_1, x_0, y_2, t_i, t_j)\, dy_1\, dy_2 =$$
$$= v_2(x_0, x_0, t_i, t_j)\Delta t_i\, \Delta t_j, \quad (10.14)$$

où

$$v_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_0^\infty\int_0^\infty y_1 y_2 w_4(x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2)\, dy_1\, dy_2, \quad (10.15)$$

$w_4(x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2)$ étant la distribution conjointe du processus et de sa dérivée à deux instants différents.

En portant (10.12) et (10.14) dans (10.11) et en passant à la limite pour $N \to \infty$ on trouve

$$m_2\{\nu\} = \int_t^{+T} v_1(x_0, t)\, dt + \int_t^{t+T}\int_t^{t+T} v_2(x_0, x_0, t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2. \quad (10.16)$$

La variance du nombre d'intersections (à dérivée positive) sur l'intervalle $(t, t+T)$ est égale à

$$D_1(x_0, t, T) = m_2\{\nu\} - m_1^2\{\nu\}. \quad (10.17)$$

En portant (10.16) dans (10.17) et tenant compte de (10.3) on obtient

$$D_1(x_0, t, T) = M_1(x_0, t, T) - M_1^2(x_0, t, T) + \\ + \int_t^{t+T}\int_t^{t+T} v_2(x_0, x_0, t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2. \quad (10.18)$$

La variance du nombre d'intersections avec une dérivée positive du niveau x_0 par unité de temps (c'est-à-dire de la variable aléatoire $\left.\frac{\nu}{T}\right)$ est

$$\mu_1(x_0, t, T) = \frac{1}{T^2} D_1(x_0, t, T). \quad (10.19)$$

La distribution conjointe d'un processus et de sa dérivée $w_4(x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2)$ dans le cas d'un processus stationnaire ne dépend que de la différence $\tau = t_2 - t_1$. C'est pourquoi la variance du nombre d'intersections, avec une dérivée positive, du niveau x_0 par unité de temps est égale à

$$\mu_1(x_0, T) = \frac{\lambda_1(x_0)}{T} - \lambda_1^2(x_0) + \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) v_2(x_0, x_0, \tau)\, d\tau. \quad (10.20)$$

Il est évident que les formules (10.18) à (10.20) donnent également la variance du nombre de dépassements respectivement sur un intervalle donné et par unité de temps. Lorsque l'on considère le nombre total d'intersections, les grandeurs mentionnées se trouvent simplement doublées.

10.2.3. Durée moyenne des dépassements et des intervalles les séparant. On peut facilement trouver la valeur moyenne du temps où un processus aléatoire *ergodique* dépasse un niveau $x = x_0$. Considérons le temps relatif pendant lequel la réalisation de ce processus aléatoire se trouve au-dessus du niveau x_0 sur l'ivtervalle T. En vertu de la propriété d'ergodicité [voir (4.42)], pour des valeurs grandes de T, cette grandeur tend vers

$$P\{\xi(t) > x_0\} = 1 - F_1(x_0),$$

et par conséquent le temps total où la réalisation du processus $\xi(t)$ se trouve au-dessus du niveau x_0 tend asymptotiquement vers $[1-F_1(x_0)]\,T$, $F_1(x)$ étant la fonction de répartition unidimensionnelle du processus aléatoire $\xi(t)$. Durant un temps T suffisamment long, le nombre total d'intervalles pour lesquels $\xi(t) > x_0$ est égal au nombre moyen de dépassements durant ce temps, c'est-à-dire est égal à $\lambda_1(x_0)\,T$. La valeur moyenne de la durée des dépassements est égale à

$$m_1\{\zeta_d\} = \frac{[1-F_1(x_0)]\,T}{\lambda_1(x_0)\,T} = \frac{1-F_1(x_0)}{\lambda_1(x_0)}. \qquad (10.21)$$

D'une manière analogue on peut obtenir l'expression de la durée moyenne des intervalles séparant les dépassements d'un processus aléatoire ergodique

$$m_1\{\zeta_{\text{in}}\} = \frac{F_1(x_0)}{\lambda_1(x_0)}. \qquad (10.22)$$

10.2.4. Distribution des durées des dépassements et des intervalles les séparant. Commençons par calculer la probabilité conjointe d'intersection du niveau $x = x_0$ dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \Delta t_0)$ avec une dérivée positive et dans les intervalles $(t_i, t_i + \Delta t_i)$, $i = 1, \ldots, N$ avec des dérivées négatives. Cette probabilité coïncide avec la probabilité de la réalisation du système d'inégalités suivant:

$$\begin{gathered} x_0 - \Delta x_0 < \xi(t_0) < x_0, \quad \xi'(t_0) > 0, \\ x_0 + \Delta x_i > \xi(t_i) > x_0, \quad \xi'(t_i) < 0, \\ i = 1, \ldots, N. \end{gathered}$$

Soit $w_{2(N+1)}(x, y, x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N)$ la densité de probabilité conjointe du processus $\xi(t)$ et de sa dérivée à $N+1$ instants de temps. On a alors

$$\begin{gathered} P\{x_0 - \Delta x_0 < \xi(t_0) < x_0,\ \xi'(t_0) > 0; \\ x_0 + \Delta x_i > \xi(t_i) > x_0,\ \xi'(t_i) < 0,\ i = 1, \ldots, N\} = \\ = \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^0 \ldots \int_{-\infty}^0 dy_1 \ldots dy_N \int_{x_0-\Delta x_0}^{x_0} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_1} \ldots \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_N} dx\, dx_1 \ldots \\ \ldots dx_N w_{2N+1}(x, y, x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N). \end{gathered}$$

Pour des Δt_i ($\Delta x_0 = y \Delta t_0$, $\Delta x_i = -y_i \Delta t_i$, $i \geqslant 1$) suffisamment petits les intégrales sur les variables x_i peuvent être remplacées par l'expression suivante:

$$\begin{gathered} w_{2(N+1)}(x_0, y, x_0, y_1, \ldots, x_0, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N)\, \Delta x_0\, \Delta x_1 \ldots \\ \ldots \Delta x_N = (-1)^N y y_1 y_2 \ldots y_N w_{2(N+1)} \times \\ \times (x_0, y, x_0, y_1, \ldots, x_0, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N)\, \Delta t_0\, \Delta t_1 \ldots \Delta t_N \end{gathered}$$

et la probabilité cherchée s'écrira alors sous la forme

$$P\{x_0 - \Delta x_0 < \xi(t_0) < x_0,\ \ \xi'(t_0) > 0,$$
$$x_0 + \Delta x_i > \xi(t_i) > x_0,\ \ \xi'(t_i) < 0,\ \ i \geqslant 1\} =$$
$$= \Delta t_0 \ldots \Delta t_N (-1)^N \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \ldots \int_{-\infty}^{0} y y_1 \ldots y_N \times$$
$$\times\, w_{2(N+1)}(x_0, y, x_0, y_1, \ldots, x_0, y_N, t_0, \ldots, t_N) \times$$
$$\times\, dy\, dy_1 \ldots dy_N =$$
$$= \Delta t_0 \ldots \Delta t_N V_{N+1}(x_0, t_0, x_0, t_1, \ldots, x_0, t_N), \qquad (10.23)$$

où

$$V_{N+1}(x_0, t_0, x_0, t_1, \ldots, x_0, t_N) =$$
$$= (-1)^N \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \ldots \int_{-\infty}^{0} y y_1 \ldots y_N \times$$
$$\times\, w_{2(N+1)}(x_0, y, x_0, y_1, \ldots, x_0, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N) \times$$
$$\times\, dy_1 \ldots dy_N\, dy. \qquad (10.24)$$

Supposons qu'on sache a priori que pour $t = t_0$ il y a intersection du niveau x_0 avec une dérivée positive. La probabilité conditionnelle d'intersection du niveau x_0 avec une dérivée négative aux points $t = t_i$, $i \geqslant 1$ est, en vertu de (2.54), égale à

$$W_N(x_0, t_1, \ldots, x_0, t_N \mid t_0) = \frac{V_{N+1}(x_0, t_0, \ldots, x_0, t_N)}{v_1(x_0, t_0)}, \qquad (10.25)$$

où $v_1(x_0, t_0)$ est donné par (10.2) *).

Passons maintenant au calcul de la fonction de répartition du temps durant lequel le processus aléatoire $\xi(t)$ se trouve au-dessus du niveau $x = x_0$, en utilisant pour cela (10.23) et la règle généralisée d'addition (1.16). En introduisant de nouveau sur chacun des intervalles Δt_i les variables aléatoires ν_i (« compteurs d'intersections » du niveau x_0 avec une dérivée négative) et en supposant que l'on sache a priori que pour $t = t_0$ il y a eu intersection du niveau x_0 avec une dérivée positive, nous allons trouver la probabilité pour que la durée du dépassement ζ_d au-dessus du niveau x_0 soit supérieure à $\tau = t_N - t_0$:

$$P\{\zeta_d > \tau \mid x_0, t_0\} =$$
$$= \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \frac{P\{\nu_1 = 0, \text{ et } \nu_2 = 0, \text{ et} \ldots, \text{ et } \nu_N = 0;\ x_0, t_0\}}{v_1(x_0, t_0)\, \Delta t_0}. \qquad (10.26)$$

*) La fonction $W_N(x_0, t_1, \ldots, x_0, t_N \mid t_0)$ n'est pas la densité conjointe des variables aléatoires. Elle peut être appelée probabilité différentielle. La fonction $v_1(x_0, t_0)$ est la probabilité a priori (différentielle) d'intersection du niveau x_0 à l'instant $t = t_0$.

Comme

$$P\{\nu_1 = 0, \text{ et } \nu_2 = 0, \text{ et } \ldots, \text{ et } \nu_N = 0;\ x_0, t_0\} = v_1(x_0,t_0)\Delta t_0 - P\{\nu_1 = 1, \text{ ou } \nu_2 = 1, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } \nu_N = 1;\ x_0, t_0\}$$

on trouve en vertu de (1.16) et (10.23)

$$P\{\nu_1 = 1, \text{ ou } \nu_2 = 1, \text{ ou } \ldots, \text{ ou } \nu_N = 1;\ x_0, t_0\} = \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r-1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<N} P\{\nu_{i_1} = 1, \text{ et } \nu_{i_2} = 1, \text{ et } \ldots, \text{ et } \nu_{i_r} = 1;\ x_0, t_0\} = \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r-1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<N} V_{r+1}(x_0, t_{i_1}, x_0, t_{i_2}, \ldots, x_0, t_{i_r}) \times \Delta t_{i_1} \Delta t_{i_2} \ldots \Delta t_{i_r} \Delta t_0. \tag{10.27}$$

Puis après un passage à la limite dans (10.27) pour $\Delta t_i \to 0$ et en portant le résultat dans (10.26) on trouve

$$Q_{\zeta_d}(\tau \mid x_0, t_0) = P\{\zeta_d > \tau \mid x_0, t_0\} = 1 - \frac{1}{v_1(x_0, t_0)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+t_r} \ldots \int_{t_0}^{t_0+t_2} V_{r+1}(x_0, t_0, x_0, t_1, \ldots, x_0, t_r)\, dt_1 \ldots dt_r. \tag{10.28}$$

La densité de probabilité de la durée du dépassement est égale à

$$w_{\zeta_d}(\tau \mid x_0, t_0) = -\frac{dQ_{\zeta_d}(\tau \mid x_0, t_0)}{d\tau}. \tag{10.29}$$

Le premier terme dans (10.29), soit

$$q_1(\tau, x_0, t_0) = \frac{V_2(x_0, t_0, x_0, t_0+\tau)}{v_1(x_0, t_0)} = \frac{-1}{v_1(x_0, t_0)} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{0} y y_1 w_4(x_0, y, x_0, y_1, t_0, t_0+\tau)\, dy\, dy_1 \tag{10.30}$$

est la probabilité différentielle d'intersection du niveau x_0 avec une dérivée négative pour $t = t_0 + \tau$, sachant que pour $t = t_0$ il y a eu intersection de ce niveau avec une dérivée positive (indépendamment du nombre d'intersections dans d'autres points de l'intervalle $t_0 < t < t_0 + \tau$). Pour des valeurs petites de τ les termes suivants dans (10.29) sont petits et on peut les négliger, c'est-à-dire que l'on peut négliger la probabilité d'intersection du niveau x_0 à l'intérieur de l'intervalle $(t_0, t_0 + \tau)$. La fonction $q_1(\tau, x_0, t_0)$ décrit alors d'une façon suffisamment précise le début de la courbe de la densité de probabilité de la durée du dépassement.

Si le processus aléatoire est stationnaire, $q_1(\tau, x_0, t_0)$ ne dépend que de τ et ne dépend pas de t_0:

$$q_1(\tau, x_0) = -\frac{\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} yy_1 w_4(x_0, y, x_0, y_1, \tau)\, dy\, dy_1}{\int_0^{\infty} yw_2(x_0, y)\, dy}. \qquad (10.31)$$

Pour trouver la densité de probabilité des intervalles séparant les dépassements il y a lieu d'écrire la probabilité conjointe d'intersection par le processus du niveau x_0 dans l'intervalle $(t_0, t_0 + \Delta t_0)$ avec une dérivée négative et dans les intervalles $(t_i, t_i + \Delta t_i)$, $i = 1, \ldots, N$ avec des dérivées positives, soit:

$$P\{x_0 < \xi(t_0) < x_0 + \Delta x_0,\ \xi'(t_0) < 0,$$
$$x_0 - \Delta x_i < \xi(t) < x_0,\ \xi'(t_i) > 0,\ i \geqslant 1\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} dy \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} dy_1 \ldots dy_N \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} \int_{x_0-\Delta x_1}^{x_0} \ldots \int_{x_0-\Delta x_N}^{x_0} dx\, dx_1 \ldots dx_N \times$$
$$\times w_{2(N+1)}(x, y, x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N) =$$
$$= \Delta t_0 \Delta t_1 \ldots \Delta t_N U_{N+1}(x_0, t_0, x_0, t_1, \ldots, x_0, t_N), \qquad (10.32)$$

où

$$U_{N+1}(x_0, t_0, x_0, t_1, \ldots, x_0, t_N) =$$
$$= -\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} yy_1 \ldots y_N w_{2(N+1)}(x_0, y, x_0, y_1, \ldots$$
$$\ldots, x_0, y_N, t_0, t_1, \ldots, t_N)\, dy_1 \ldots dy_N\, dy. \qquad (10.33)$$

En répétant les raisonnements ci-dessus on voit que la fonction de répartition des intervalles entre les dépassements coïncide avec (10.28) à condition toutefois de remplacer dans cette formule les fonctions V_{r+1} par les fonctions U_{r+1}. Par conséquent

$$Q_{\zeta_{1n}}(\tau \mid x_0, t_0) = P\{\zeta_{1n} > \tau \mid x_0, t_0\} = 1 - \frac{1}{v_1(x_0, t_0)} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+t_r} \ldots \int_{t_0}^{t_0+t_2} U_{r+1}(x_0, t_0, x_0, t_1, \ldots, x_0, t_r)\, dt_1 \ldots dt_r \qquad (10.34)$$

et

$$w_{\zeta_{1n}}(\tau \mid x_0, t_0) = -\frac{dQ_{\zeta_{1n}}(\tau \mid x_0, t_0)}{d\tau}. \qquad (10.35)$$

Le premier terme dans (10.35)

$$q_1^*(\tau, x_0, t_0) = \frac{U_2(x_0, t_0, x_0, t_0+\tau)}{v_1(x_0, t_0)} = \\ = -\frac{\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{\infty} y_1 y w_4(x_0, y, x_0, y_1, t_0, t_0+\tau)\, dy\, dy_1}{v_1(x_0, t)} \qquad (10.36)$$

est la probabilité différentielle d'intersection du niveau x_0 avec une dérivée positive pour $t = t_0 + \tau$, sachant que pour $t = t_0$ il y a eu intersection de ce niveau avec une dérivée négative. Pour des valeurs petites de τ les termes suivants dans (10.35) sont négligeables, car dans des intervalles petits on peut négliger la probabilité d'intersection du niveau x_0 à l'intérieur de l'intervalle $(t_0, t_0 + \tau)$. La fonction $q_1^*(\tau, x_0, t_0)$ décrit alors assez bien le début de la courbe de la densité de probabilité de l'intervalle séparant les dépassements. Pour un processus aléatoire stationnaire la densité de probabilité ne dépend pas de t_0, on a alors

$$q_1^*(\tau, x_0) = -\frac{\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{\infty} y y_1 w_4(x_0, y, x_0, y_1, \tau)\, dy\, dy_1}{\int\limits_{0}^{\infty} y w_2(x_0, y)\, dy}. \qquad (10.37)$$

Notons qu'en vertu de (10.31) et (10.37) pour $\tau \to \infty$, on a

$$\lim_{\tau\to\infty} q_1(\tau, x_0) = \lim_{\tau\to\infty} q_1^*(\tau, x_0) = \lambda_1(x_0), \qquad (10.37')$$

c'est-à-dire que les courbes correspondant à la première approximation de la densité de probabilité de la durée des dépassements et des intervalles tendent asymptotiquement non pas vers l'axe des abscisses mais vers une droite qui lui est parallèle. La distance de cette asymptote de l'axe des abscisses est égale à la probabilité différentielle a priori d'intersection du niveau x_0 avec une dérivée d'un certain signe, c'est-à-dire à la valeur moyenne du nombre d'intersections par unité de temps avec une dérivée positive ou négative. D'autre part, on a établi (voir [6]) que pour des durées importantes ces densités de probabilité doivent être asymptotiquement exponentielles (dans l'ouvrage mentionné les méthodes efficaces permettant de trouver les paramètres des exponentielles ne sont pas données).

Ceci montre que les fonctions $q_1(\tau, x_0)$ et $q_1^*(\tau, x_0)$ ne donnent pas les propriétés essentielles des densités de probabilité de la durée des dépassements et des intervalles les séparant pour des grandes valeurs de τ et, par conséquent, ne peuvent être utilisées pour caractériser plus ou moins complètement du point de vue probabiliste les variables aléatoires considérées.

Si l'on veut trouver les termes suivants dans (10.29) et (10.35), on se heurte à des difficultés presque insurmontables liées au calcul des intégrales multiples. Nous verrons au § 10.3 certaines méthodes d'approximation des courbes de distribution de la durée des dépassements et des intervalles les séparant.

10.2.5. Extréma d'un processus aléatoire. Soit $\xi(t)$ un processus aléatoire dérivable deux fois (en probabilité). La probabilité pour la variable aléatoire $\xi(t)$ d'avoir dans un intervalle suffisamment petit $(t, t+\Delta t)$ un maximum dont la valeur se trouve dans l'intervalle $(x-\Delta x, x)$ coïncide avec la probabilité des inégalités

$$x-\Delta x<\xi(t)<x, \quad -\Delta y<\frac{d\xi(t)}{dt}<0, \quad \frac{d^2\xi(t)}{dt^2}<0.$$

Si $w_3(x, y, z, t)$ est la densité de probabilité tridimensionnelle du processus et de ses deux premières dérivées aux mêmes instants t, la probabilité mentionnée pour un Δt suffisamment petit est égale à

$$P\left\{x-\Delta x<\xi(t)<x, \ -\Delta y<\frac{d\xi(t)}{dt}<0, \ \frac{d^2\xi(t)}{dt^2}<0\right\}=$$

$$=\int_{x-\Delta x}^{x}\int_{-\Delta y}^{0}\int_{-\infty}^{0} w_3(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=-\Delta x\int_{-\infty}^{0}\Delta y w_3(x, 0, z, t)\,dz=$$

$$=-\Delta x\,\Delta t\int_{-\infty}^{0} zw_3(x, 0, z, t)\,dz=G(x, t)\,\Delta x\,\Delta t, \qquad (10.38)$$

où

$$G(x, t)=-\int_{-\infty}^{0} zw_3(x, 0, z, t)\,dz=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} |z|\,w_3(x, 0, z, t)\,dz. \qquad (10.39)$$

La formule (10.38) donne également le nombre moyen de maxima sur l'intervalle $(t, t+\Delta t)$ dont la valeur se trouve comprise entre $x-\Delta x$ et x. Le nombre moyen de maxima par unité de temps est égal dans ce cas à $G(x, t)\,\Delta x$, et pour un processus stationnaire à $G(x)\,\Delta x$.

Le nombre moyen de maxima par unité de temps dont la valeur dépasse x_0 est égal pour un processus stationnaire à

$$\mu_{\max}(x_0)=\int_{x_0}^{\infty} G(x)\,dx, \qquad (10.40)$$

et le nombre moyen de maxima de valeur quelconque est égal à

$$\mu_{max} = \mu_{max}(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} |z|\, w_3(x, 0, z)\,dz\,dx = \int_{-\infty}^{0} |z|\, w_2(0, z)\,dz, \quad (10.41)$$

où $w_2(y, z)$ est la distribution conjointe de la première et de la seconde dérivées du processus.

Le rapport de $G(x)$ à μ_{max} donne la densité de probabilité des maxima.

D'une manière analogue à (10.38), la probabilité pour que sur un intervalle Δt suffisamment petit la variable aléatoire $\xi(t)$ ait un minimum, dont la valeur se trouve comprise entre $(x - \Delta x, x)$, est égale à

$$P\left\{x - \Delta x < \xi(t) < x,\ 0 < \frac{d\xi(t)}{dt} < \Delta y,\ \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} > 0\right\} =$$

$$= \Delta x\,\Delta t \int_0^{\infty} z w_3(x, 0, z, t)\,dz = H(x, t)\,\Delta x\,\Delta t, \quad (10.42)$$

où

$$H(x, t) = \int_0^{\infty} z w_3(x, 0, z, t)\,dz. \quad (10.43)$$

La formule (10.42) donne également le nombre moyen de minima de $\xi(t)$ sur l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, de valeur entre $x - \Delta x$ et x. Le nombre moyen de minima par unité de temps est égal dans ce cas à $H(x, t)\,\Delta x$, et pour un processus stationnaire à $H(x)\,\Delta x$.

Le nombre moyen de minima par unité de temps, dont la valeur est supérieure à x_0, est, pour un processus stationnaire, égal à

$$\mu_{min}(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} H(x)\,dx, \quad (10.44)$$

et le nombre moyen de minima de valeur quelconque est

$$\mu_{min} = \mu_{min}(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} z w_3(x, 0, z)\,dz\,dx = \int_0^{\infty} z w_2(0, z)\,dz. \quad (10.44')$$

Le rapport de $H(x)$ à $\mu_{\min}$ est la densité de probabilité des minima.

En vertu de (10.41) et de (10.44) le nombre moyen d'extréma d'un processus aléatoire stationnaire est égal à:

$$\mu_{\text{extr}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |z|\, w_3(x, 0, z)\, dz\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, w_2(0, z)\, dz. \qquad (10.45)$$

10.3. MÉTHODES APPROCHÉES

10.3.1. Approximation par segments de la densité de probabilité. Comme nous l'avons noté plus haut, il est pratiquement impossible d'utiliser les expressions générales des densités de probabilité de la durée des dépassements [voir (10.29)] et des intervalles les séparant [voir (10.35)]. Les premiers termes de ces formules assimilent les fonctions réelles suffisamment bien seulement si les durées des dépassements (les intervalles les séparant) sont petites et ne sauraient donner une représentation exacte, ne serait-ce que qualitative, pour des durées importantes. P. Kouznetsov, R. Stratonovitch et V. Tichonov [6] ont montré que pour des durées importantes les distributions doivent tendre vers l'exponentielle, mais les auteurs n'ont pas indiqué comment calculer les paramètres de ces distributions limites.

Considérons maintenant l'une des méthodes les plus simples de calcul approché des densités de probabilité de la durée des dépassements et des intervalles les séparant. Dans cette méthode la courbe réelle est remplacée par des segments de deux courbes: de la première approximation [(10.30) ou (10.36)] et d'une exponentielle, les deux paramètres de l'exponentielle et le point d'intersection des courbes approchées sont choisis à partir des conditions de continuité, de normalisation de l'aire se trouvant sous les courbes et d'égalité du moment du premier ordre de la fonction approchée à la durée moyenne des dépassements (ou des intervalles les séparant), cette dernière étant calculée par la formule exacte.

Selon cette méthode la densité de probabilité de la durée des dépassements par un processus aléatoire stationnaire d'un certain niveau de seuil x_0 peut être calculée de la manière suivante. On trouve la première approximation $q_1(\tau, x_0)$ à l'aide de la formule (10.31). La seconde partie de la fonction approchée est une exponentielle $\gamma e^{-\alpha\tau}$ coupant la courbe $q_1(\tau, x_0)$ au point τ^*. Les trois paramètres inconnus α, γ et τ^* de la fonction approchée sont donnés par un système de trois équations (en général, transcendantes):

de la condition de continuité:

$$q_1(\tau^*, x_0) = \gamma e^{-\alpha\tau^*}, \qquad (10.46)$$

de la condition de normalisation de l'aire sous les courbes:

$$\int_0^{\tau^*} q_1(\tau, x_0)\, d\tau + \frac{\gamma}{\alpha} e^{-\alpha\tau^*} = 1, \tag{10.46'}$$

de la condition d'égalité du moment du premier ordre à la durée moyenne des dépassements:

$$\int_0^{\tau^*} \tau q_1(\tau, x_0)\, d\tau + (1+\alpha\tau^*)\frac{\gamma}{\alpha^2} e^{-\alpha\tau^*} = m_1\{\zeta_d\}. \tag{10.46''}$$

Pour un processus ergodique le second membre de la dernière équation est donné par la formule (10.21).

D'une manière analogue on peut écrire le système d'équations donnant les paramètres de la fonction assimilant la distribution des intervalles séparant les dépassements. Il suffit pour cela de remplacer dans (10.46) à (10.46″) la fonction $q_1(\tau, x_0)$ par la première approximation $q_1^*(\tau, x_0)$ pour les intervalles [voir (10.37)] et de porter dans le second membre de (10.46″) l'expression pour $m_1\{\zeta_{in}\}$ donnée pour les processus ergodiques par la formule (10.22).

10.3.2. Correspondance entre le niveau d'intersection et la limitation parfaite. Le processus de sortie d'un limiteur parfait de caractéristique

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant x_0, \\ -1, & x < x_0, \end{cases} \tag{10.47}$$

est une suite d'impulsions bipolaires rectangulaires d'amplitude ± 1 (voir § 7.2.4). La durée des impulsions positives est égale à celle des dépassements du niveau x_0, et la durée des impulsions négatives à celle des intervalles séparant les dépassements du processus agissant à l'entrée du limiteur. C'est pourquoi il doit y avoir une relation entre la fonction de corrélation du processus à la sortie du limiteur $\zeta(t)$, qui est un processus aléatoire impulsionnel apériodique (voir chapitre 11), et les caractéristiques probabilistes des intersections d'un niveau donné par le processus aléatoire $\xi(t)$ agissant à l'entrée du limiteur.

Supposons que $\xi(t)$ soit un processus aléatoire stationnaire dérivable en moyenne quadratique; le processus $\zeta(t)$ est alors également stationnaire. Soient deux instants t_1 et t_2, calculons les probabilités conjointes des événements consistant en ce qu'aux deux instants les impulsions à la sortie du limiteur auront les mêmes polarités ou des polarités différentes. Ces probabilités sont évidemment de quatre types. Pour les distinguer, nous introduisons les indices « + » et « — » correspondant aux impulsions positives et négatives. Pour le calcul de ces probabilités nous allons utiliser la méthode exposée au § 4.2.10. Comme $\zeta(t)$ ne prend que deux valeurs +1 et —1 et compte tenu de la formu-

le (13) du problème 6.4 on a

$$m_1\{\zeta(t_1)\} = P_{++} - P_{--} + P_{+-} - P_{-+} = 1 - 2F_1(x_0),$$
$$m_1\{\zeta(t_2)\} = P_{++} - P_{--} - P_{+-} + P_{-+} = 1 - 2F_1(x_0),$$
$$m_1\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\} = B_\zeta(t_2 - t_1) = P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+},$$
$$P_{++} + P_{--} + P_{+-} + P_{-+} = 1.$$

En vertu des deux premières équations du système ci-dessus, on a $P_{+-} = P_{-+}$. En utilisant les deux autres équations on trouve la probabilité pour qu'à l'instant t_1 l'impulsion de sortie soit négative, et à l'instant t_2 positive. Il vient

$$P_{-+} = \frac{1}{4}[1 - B_\zeta(t_2 - t_1)] = \frac{1}{4}[B_\zeta(0) - B_\zeta(t_2 - t_1)], \tag{10.48}$$

où $B_\zeta(\tau)$ est la fonction de corrélation du processus à la sortie d'un limiteur parfait.

Posons $t_2 = t + T$, $t_1 = t$. Dans ce cas pour $T \to 0$ la grandeur $P_{-+} = \lambda_1(x_0)\,T$ est la probabilité d'intersection du niveau x_0 par le processus $\xi(t)$ avec une dérivée positive (comparer avec § 10.2.1). Par conséquent, en vertu de (10.48) on a

$$\lambda_1(x_0) = \lim_{T\to 0}\frac{P_{-+}}{T} = -\frac{1}{4}\lim_{T\to 0}\frac{B_\zeta(T) - B_\zeta(0)}{T} = -\frac{1}{4}B'_\zeta(0_+)$$

ou *)

$$\lambda_1(x_0) = -\frac{1}{4}B'_\zeta(0_+). \tag{10.49}$$

Ainsi, la grandeur $-B'_\zeta(0_+)$ peut servir de compteur des intersections du niveau x_0 par unité de temps par le processus $\xi(t)$. Ceci est évident, car en vertu de (4.139) la dérivée $B'_\zeta(\tau)$ pour un processus stationnaire est égale à la fonction de corrélation mutuelle des processus $\zeta(\tau)$ et $\zeta'(t)$, la dérivée du processus à la sortie du limiteur $\zeta'(t)$ représente la somme des fonctions delta $2\sum_k(-1)^k\,\delta(t - t_k)$, où t_k sont les instants d'intersections. Par exemple pour un signal télégraphique aléatoire stationnaire (voir § 4.2.10), on a $B'_\zeta(0_+) = -2\lambda_0$ et par conséquent $2\lambda_1(0) = \lambda_0$, c'est-à-dire que cette dérivée est égale au nombre moyen de zéros du signal télégraphique par unité de temps.

Montrons maintenant que pour des τ petits la densité de probabilité $q_1(\tau, x_0)$ des durées des dépassements par le processus $\xi(t)$ du niveau x_0 est proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un limiteur parfait (10.47) lorsque le processus $\xi(t)$ est appliqué à son entrée.

Comme nous l'avons déjà noté, pour des intervalles τ petits la probabilité de plus de deux intersections du niveau est négligeable. Supposons que la grandeur T soit telle que l'on puisse négliger la probabilité de plus de deux intersections du niveau x_0 sur l'intervalle de temps $(t, t + T)$. Supposons qu'à l'instant t_i il y ait intersection du niveau x_0 avec une dérivée positive et soit $\zeta_i = t_{i+1} - t_i$ la durée du dépassement. La grandeur $\zeta(t_i + \tau)$ sera alors

*) Comme après une limitation parfaite le processus $\zeta(t)$ n'est pas dérivable en moyenne quadratique, on a $B'_\zeta(0_+) \neq 0$.

positive, si $\tau < \zeta_i$, et négative, si $\zeta_i < \tau < T$. Par conséquent,

$$P\{\zeta(t_i+\tau)>0\}=P\{\zeta_i>\tau\}=\int_{\tau}^{\infty} q_1(\tau, x_0)\,d\tau, \qquad (10.50)$$

$$P\{\zeta(t_i+\tau)<0\}=P\{\zeta_i<\tau\}=\int_{0}^{\tau} q_1(\tau, x_0)\,d\tau. \qquad (10.50')$$

Utilisant l'interprétation ci-dessus de $B'_\zeta(\tau)$ et compte tenu de (10.50) et de (10.50′) on obtient:

$$B'_\zeta(\tau)=-4\lambda_1(x_0)\int_{\tau}^{\infty} q_1(\tau, x_0)\,d\tau+4\lambda(x_0)\int_{0}^{\tau} q_1(\tau, x_0)\,d\tau=$$

$$=-4\lambda_1(x_0)+8\lambda(x_0)\int_{0}^{\tau} q_1(\tau, x_0)\,d\tau,$$

d'où

$$B''_\zeta(\tau)=8\lambda(x_0)\,q_1(\tau, x_0). \qquad (10.51)$$

En remplaçant dans (10.51) $\lambda(x_0)$ par son expression (10.49), on trouve la relation cherchée entre $q_1(\tau, x_0)$ et $B''_\zeta(\tau)$:

$$q_1(\tau, x_0)=-\frac{B''_\zeta(\tau)}{2B'(0_+)}, \quad 0<\tau<T. \qquad (10.52)$$

Si B'_ζ a une discontinuité au point τ, $q_1(\tau, x_0)$ devient une fonction delta, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité non nulle pour que la durée du dépassement soit exactement égale à τ:

$$P\{\zeta_d=\tau\}=\frac{B'_\zeta(\tau_+)-B'_\zeta(\tau_-)}{2B'_\zeta(0_+)}. \qquad (10.52')$$

Notons que pour un signal télégraphique aléatoire stationnaire la grandeur

$$-\frac{B''_\zeta(\tau)}{B'_\zeta(0)}=\frac{4\lambda_0^2 e^{-2\lambda_0\tau}}{2\lambda_0}=2\lambda_0 e^{-2\lambda_0\tau}, \quad \tau>0$$

coïncide avec la densité de probabilité de la durée aléatoire d'émission d'un certain signe (ou avec la densité de probabilité des intervalles séparant les zéros).

10.3.3. Méthode des impulsions de référence. Dans cette méthode on remplace les réalisations d'un processus aléatoire par une suite d'impulsions rectangulaires adjacentes d'égale durée (impulsions de référence, voir § 4.1.2), on calcule les caractéristiques probabilistes de ces suites et on les utilise en tant qu'approximations des caractéristiques correspondantes du processus. La précision de l'approximation dépend de la période de répétition (durée τ_0) des impulsions de référence.

Suivant la valeur choisie de la durée τ_0 et les propriétés du processus aléatoire approximé, les lois statistiques se rapportent à un

nombre n différent d'impulsions formant la suite ($n = 1, 2, \ldots$). Nous dirons que la suite des impulsions est m fois connexe, si l'amplitude aléatoire de l'impulsion k ne dépend que des amplitudes aléatoires des impulsions dont le numéro diffère de k d'un nombre non supérieur à m. Pour $m = 0$ on obtient une suite d'impulsions indépendantes, pour $m = 1$, une suite de Markov simplement connexe, pour $m = 2$, une suite biconnexe, etc.

Passant à l'étude de la durée des dépassements par un processus aléatoire $\xi(t)$ d'un certain niveau de seuil x_0, introduisons les notations suivantes:

$$\xi_m \in \xi_+, \text{ si } \xi_m > x_0,$$
$$\xi_m \in \xi_-, \text{ si } \xi_m \leqslant x_0,$$

et considérons le dépassement comme une suite d'impulsions adjacentes, dont l'amplitude ξ_m reste dans le domaine ξ_+.

La densité de probabilité de la durée de plusieurs dépassements consécutifs du niveau de seuil dans une suite d'impulsions indépendantes, c'est-à-dire la probabilité pour que $k - 1$ impulsions de suite se trouvent au-dessus du niveau de seuil, est égale à

$$P_0(k) = p_+^{k-1}(1 - p_+), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10.53}$$

où p_+ est la probabilité pour que l'amplitude de l'impulsion de référence appartienne à ξ_+.

Calculons la densité de probabilité de la durée de plusieurs dépassements consécutifs du niveau de seuil pour une suite simplement connexe d'impulsions de référence. La probabilité pour que la série de dépassements contienne une seule impulsion de référence est égale à

$$P_1(1) = p_{+-} = 1 - p_{++},$$

où p_{+-} et p_{++} sont les probabilités a posteriori de tomber dans les domaines ξ_- et ξ_+ à condition que l'amplitude de l'impulsion précédente appartienne à ξ_+.

Les probabilités d'avoir deux, trois, etc. dépassements de suite sont respectivement:

$$P_1(2) = p_{++}p_{+-} = p_{++}(1 - p_{++}),$$
$$P_1(3) = p_{++}^2 p_{+-} = p_{++}^2(1 - p_{++}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou sous une forme générale

$$P_1(k) = p_{++}^{k-1}(1 - p_{++}), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10.54}$$

D'une manière analogue, on peut calculer la distribution de la durée de plusieurs dépassements consécutifs pour une suite de connexité multiple d'impulsions de référence. En particulier, pour une

suite *biconnexe* la probabilité d'avoir un seul dépassement à la fois est égale à

$$P_2(1) = p_{-+-} = 1 - p_{-++}, \qquad (10.55)$$

où p_{-+-} et p_{-++} sont les probabilités a posteriori de tomber dans les domaines ξ_- et ξ_+, si toutefois les amplitudes des deux impulsions précédentes appartiennent à ξ_- et ξ_+.

Les probabilités d'avoir deux, trois, etc. dépassements consécutifs sont respectivement:

$$P_2(2) = p_{-++}p_{++-} = p_{-++}(1 - p_{+++}),$$
$$P_2(3) = p_{-++}p_{+++}(1 - p_{+++}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou sous une forme générale

$$P_2(k) = p_{-++}p_{+++}^{k-2}(1 - p_{+++}), \quad k \geqslant 2, \qquad (10.56)$$

où p_{+++} est la probabilité a posteriori de tomber dans le domaine ξ_+ à condition que les amplitudes des deux impulsions précédentes appartiennent à ξ_+.

Notons qu'à partir de (10.55) et (10.56) on peut obtenir les formules correspondantes pour une suite simplement connexe ($p_{+++} = p_{-++} = p_{++}$) et pour une suite d'impulsions indépendantes ($p_{+++} = p_{-++} = p_{++} = p_+$).

Les probabilités se trouvant dans les seconds membres de (10.53) à (10.56) peuvent facilement s'exprimer à l'aide des densités de probabilités d'ordres correspondants, c'est-à-dire

$$p_+ = P\{\xi(t) > x_0\} = \int_{x_0}^{\infty} w_1(x, t)\, dx, \qquad (10.57)$$

$$p_{++} = \frac{P\{\xi(t) > x_0,\ \xi(t+\tau_0) > x_0\}}{P\{\xi(t) > x_0\}} = \frac{\int_{x_0}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} w_2(x_1, x_2, t, \tau_0)\, dx_1\, dx_2}{\int_{x_0}^{\infty} w_1(x, t)\, dx}, \qquad (10.58)$$

$$p_{+++} = \frac{P\{\xi(t) > x_0,\ \xi(t+\tau_0) > x_0,\ \xi(t+2\tau_0) > x_0\}}{P\{\xi(t) > x_0,\ \xi(t+\tau_0) > x_0\}} =$$
$$= \frac{\int_{x_0}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} w_3(x_1, x_2, x_3, t, \tau_0)\, dx_1\, dx_2\, dx_3}{\int_{x_0}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} w_2(x_1, x_2, t, \tau_0)\, dx_1\, dx_2}, \qquad (10.59)$$

$$p_{-++}=$$

$$=\frac{P\{\xi(t)>x_0,\ \xi(t+\tau_0)>x_0\}-P\{\xi(t)>x_0,\ \xi(t+\tau_0)>x_0,\ \xi(t+2\tau_0)>x_0\}}{P\{\xi(t)>x_0\}-P\{\xi(t)>x_0,\ \xi(t+\tau_0)>x_0\}}=$$

$$=\frac{1}{\int\limits_{x_0}^{\infty} w_1(x,t)\,dx-\int\limits_{x_0}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{\infty} w_2(x_1,x_2,t,\tau_0)\,dx_1\,dx_2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{x_0}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{\infty} w_2(x_1,x_2,t,\tau_0)\,dx_1\,dx_2-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{x_0}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{\infty} w_3(x_1,x_2,x_3,t,\tau_0)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right]. \quad (10.60)$$

La distribution de la durée des dépassements ζ_d par le processus aléatoire d'un certain seuil x_0 dans l'approximation cherchée est donnée par le système suivant de relations:

pour une suite d'impulsions indépendantes

$$P\{\zeta_d = k\tau_0\} = P_0(k)$$

[obtenue en portant (10.57) dans (10.53)];

pour une suite d'impulsions simplement connexe

$$P\{\zeta_d = k\tau_0\} = P_1(k)$$

[obtenue en portant (10.58) dans (10.54)];

pour une suite d'impulsions biconnexe

$$P\{\zeta_d = k\tau_0\} = P_2(k)$$

[obtenue en portant (10.59) et (10.60) dans (10.55), (10.56)].

10.3.4. Dépassements des processus à bande étroite. On peut arriver à une certaine simplification lors de l'étude des caractéristiques statistiques des dépassements positifs (dépassements du niveau $x_0 = 0$) lorsque le processus $\xi(t)$ est à bande étroite, c'est-à-dire lorsqu'il peut s'écrire sous la forme suivante (voir § 6.2.2)

$$\xi(t) = E(t)\cos[\omega_0 t - \varphi(t)].$$

Comme des valeurs nulles de l'enveloppe $E(t)$ apparaissent bien plus rarement que les valeurs nulles de $\cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$, l'étude des dépassements positifs d'un processus aléatoire à bande étroite peut se réduire (à une certaine approximation) à l'étude des intervalles séparant les zéros de $\cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$.

Soient t_1 et t_2 les instants successifs où la fonction $\cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$ est nulle. On a alors

$$\omega_0(t_2 - t_1) - \varphi(t_2) + \varphi(t_1) = \pm\pi,$$

et comme $\varphi(t)$ varie lentement par rapport à $\cos\omega_0 t$, on peut remplacer la différence $\varphi(t_2) - \varphi(t_1)$ par $(t_2 - t_1)\varphi'(t_1)$ supposant que la phase est dérivable (du moins en probabilité). Ainsi, pour un processus à bande étroite l'inter-

valle entre les zéros est égal à

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 - \varphi'(t_1)}. \tag{10.61}$$

En vertu de (10.61) le nombre de zéros de $\xi(t)$ sur l'intervalle $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ est égal à

$$N_T = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\omega_0 - \varphi'(t_1)}{\pi} dt_1 = \frac{\omega_0 T}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi'(t_1)\, dt_1,$$

alors le nombre moyen de zéros par unité de temps pour un processus stationnaire à bande étroite sera

$$\lambda(0) = m_1 \left\{\frac{N}{T}\right\} = \frac{\omega_0}{\pi}, \tag{10.62}$$

c'est-à-dire qu'il est égal au nombre de zéros par unité de temps d'une oscillation harmonique de pulsation ω_0.

La variance du nombre de zéros sur cet intervalle est égale à

$$M_2 \left\{\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varphi'(t)\, dt\right\} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} B_{\varphi'}(t_2 - t_1)\, dt_2\, dt_1 =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_{\varphi'}(\tau)\, d\tau. \tag{10.63}$$

Il existe une relation simple entre la densité de probabilité $W_1(\tau)$ de la durée des intervalles entre les zéros et celle de la dérivée de la phase $w_{1\varphi'}(x)$. En vertu de (10.61) on a

$$W_1(\tau) = \frac{\pi}{\tau^2} \left[w_{1\varphi'}\left(\omega_0 - \frac{\pi}{\tau}\right) + w_{1\varphi'}\left(\omega_0 + \frac{\pi}{\tau}\right) \right]. \tag{10.64}$$

10.4. DÉPASSEMENTS D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

10.4.1. Nombre moyen d'intersections. Considérons un processus aléatoire normal $\eta(t)$ qui est la somme d'un signal déterministe $S(t)$ et d'un bruit normal stationnaire $\xi(t)$ dérivable en moyenne quadratique, de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. En vertu des relations

$$\xi(t) = \eta(t) - S(t), \quad \xi'(t) = \eta'(t) - S'(t), \tag{10.65}$$

on trouve en utilisant (4.177) l'expression suivante pour la densité de probabilité conjointe du processus aléatoire $\eta(t)$ et de sa dérivée

aux mêmes instants

$$w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\omega_1^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x - S(t))^2 + \frac{1}{\omega_1^2}(y - S'(t))^2\right]\right\}, \tag{10.66}$$

où [voir (4.174)]

$$\omega_1^2 = -R_\xi''(0) = \frac{\int_0^\infty \omega^2 F_\xi(\omega)\, d\omega}{\int_0^\infty F_\xi(\omega)\, d\omega};$$

$F_\xi(\omega)$ est le spectre énergétique du bruit.

Calculons avant tout le nombre moyen d'intersections du niveau $x = x_0$ avec un signe donné de la dérivée (nombre moyen de dépassements) par unité de temps sur l'intervalle $(t, t + T)$. En vertu de (10.4) et de (10.66) on a [voir également (9) dans l'annexe V]:

$$\lambda_1(x_0, t, T) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\omega_1 T} \int_T^{t+T} e^{-\frac{[x_0 - S(t)]^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty y \times$$

$$\times e^{-\frac{[y - S'(t)]^2}{2\sigma^2\omega_1^2}} dy\, dt = \frac{\omega_1}{2\pi T} \int_t^{t+T} e^{-\frac{[x_0 - S(t)]^2}{2\sigma^2}} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{[S'(t)]^2}{2\sigma^2\omega_1^2}} + \frac{S'(t)\sqrt{2\pi}}{\sigma\omega_1} F\left(-\frac{S't}{\sigma\omega_1}\right)\right] dt =$$

$$= \frac{\omega_1}{2T\sqrt{2\pi}} \int_t^{t+T} \left[\frac{S'(t)}{\sigma\omega_1} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{[S'(t)]^2}{2\sigma^2\omega_1^2}\right)\right] \times$$

$$\times e^{-\frac{[x_0 - S(t)]^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{10.67}$$

Examinons certains cas particuliers. En l'absence de composante déterministe du processus $\eta(t)$, on a $S = S' \equiv 0$, et en vertu de (10.67) on trouve $\left[\text{car } {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = 1\right]$ le nombre moyen d'intersections du niveau $x = x_0$ par unité de temps, avec un signe donné de la dérivée, par un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle *):

$$\lambda_1(x_0) = \frac{\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.68}$$

*) Notons que pour un processus aléatoire normal de spectre énergétique $F(\omega) = F(0)\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$ (processus de Markov, voir § 4.5) la grandeur ω_1 est illimitée et par conséquent le nombre moyen d'intersections par unité de temps est infini.

Le nombre moyen d'intersections du niveau $x = 0$ par unité de temps avec un signe donné de la dérivée est égal à $\lambda_1(0) = \frac{\omega_1}{2\pi}$ et par conséquent

$$\frac{\lambda_1(x_0)}{\lambda_1(0)} = e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.69}$$

Le nombre moyen de zéros par unité de temps est égal à ω_1 au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, soit:

$$\lambda(0) = 2\lambda_1(0) = \frac{\omega_1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\int_0^\infty \omega^2 F_\xi(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty F_\xi(\omega)\,d\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.70}$$

En utilisant (5.30) et (5.33) il est facile de trouver à l'aide de la formule (10.70) le nombre moyen de zéros par unité de temps d'un bruit blanc normal à la sortie d'un système linéaire de caractéristique fréquentielle $C(\omega)$. Pour une caractéristique fréquentielle arbitraire on a

$$\lambda(0) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\int_0^\infty \omega^2 C^2(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty C^2(\omega)\,d\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.71}$$

et pour un système linéaire à bande étroite [voir (5.34)]

$$\lambda(0) = \frac{\omega_0}{\pi}\left(1 + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\int_0^\infty \omega^2 C_0^2(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty C_0^2(\omega)\,d\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega_0}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2\omega_0^2}\rho_{C_0}^2\right), \tag{10.71'}$$

où

$$\rho_{C_0}^2 = \frac{\int_0^\infty \omega^2 C_0^2(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty C_0^2(\omega)\,d\omega}$$

est le carré du « rayon de giration » de la caractéristique fréquentielle, lié généralement par une relation simple à la largeur Δ de la bande passante (si ce rayon a une valeur finie). Par exemple, pour un filtre parfait cette grandeur est égale à $\frac{\Delta^2}{12}$, et pour un ampli-

ficateur à étages multiples de caractéristique de fréquence gaussienne il est égal à $\frac{\Delta^2}{2\pi}$ (voir § 5.2.3).

Notons que le premier terme dans (10.71′) donne simplement le nombre de zéros d'une oscillation harmonique de pulsation ω_0 par unité de temps.

Pour illustrer la correspondance entre la limitation parfaite et le problème des intersections proposons-nous de trouver la formule (10.68) à partir de (10.49). Utilisons à cette fin les résultats du problème 7.11 et écrivons la dérivée de la fonction de corrélation $B_\zeta(\tau)$ du processus à la sortie d'un limiteur symétrique parfait (de seuil x_0), lorsqu'on applique à son entrée un processus aléatoire normal stationnaire, dérivable en moyenne quadratique, de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. On a :

$$B'_\zeta(\tau) = \frac{dB_\zeta}{dR} \cdot \frac{dR}{d\tau} = \frac{2}{\pi} \frac{R'(\tau)}{\sqrt{1-R^2(\tau)}} e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2[1+R(\tau)]}}.$$

Pour $\tau \to 0_+$ le facteur $\frac{R'}{\sqrt{1-R^2}}$ devient une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour enlever cette indétermination notons que pour $\tau \to 0$ on a

$$\frac{R'(\tau)}{\sqrt{1-R^2(\tau)}} \to \frac{R''(\tau)}{-\frac{R(\tau)R'(\tau)}{\sqrt{1-R^2(\tau)}}},$$

c'est-à-dire

$$\left[\frac{R'(\tau)}{\sqrt{1-R^2(\tau)}}\right]^2 \to -\frac{R''(\tau)}{R(\tau)}$$

et

$$\lim_{\tau\to 0_+} \frac{R'(\tau)}{\sqrt{1-R^2(\tau)}} = -\sqrt{-R''(0)} = -\omega_1.$$

Par conséquent, en vertu de (10.49) on a

$$\lambda_1(x_0) = -\frac{1}{4} B'_\zeta(0_+) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\omega_1}{\pi} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}},$$

ce qui coïncide avec (10.68).

Considérons un second exemple. Proposons-nous d'obtenir à partir de (10.67) le nombre moyen d'intersections par unité de temps (avec une dérivée de signe donné), la composante déterministe étant une oscillation harmonique

$$S(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$
$$S'(t) = -A_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (10.72)$$

En portant (10.72) dans (10.67) et en remplaçant la variable d'intégration t par $\theta = \omega_0 t + \varphi_0$ on trouve

$$\lambda_1(x_0, t, T \mid A_0) = \frac{\omega_1}{2\pi T \omega_0} \int\limits_{\omega_0 t + \varphi_0}^{\omega_0(t+T)+\varphi_0} e^{-\frac{(x_0 - A_0 \cos\theta)^2}{2\sigma^2}} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{A_0^2 \omega_0^2}{2\sigma^2 \omega_1^2} \sin^2\theta} - \frac{A_0 \omega_0 \sin\theta}{\sigma \omega_1} \sqrt{2\pi}\, F\left(-\frac{A_0\omega_0}{\sigma\omega_1} \sin\theta\right)\right] d\theta.$$

Comme la fonction se trouvant sous l'intégrale est périodique par rapport à la variable d'intégration, il vient en choisissant T multiple de la période $\frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\lambda_1(x_0 \mid A_0) = \frac{\lambda_1(0)}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sigma} - a\cos\theta\right)^2} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{b^2}{2}\sin^2\theta} + \sqrt{2\pi}\; b \sin\theta F(b \sin\theta)\right] d\theta, \qquad (10.73)$$

où l'on a noté

$$a = \frac{A_0}{\sigma}; \; b = \frac{A_0\omega_0}{\sigma\omega_1}; \; \lambda_1(0) = \frac{\omega_1}{2\pi}.$$

Pour $A_0 = 0$ la formule (10.73) devient évidemment (10.69).

Pour le niveau d'intersection $x_0 = 0$ l'intégrale du second membre de (10.73) prend la forme suivante:

$$\lambda_1(0 \mid A_0) = \lambda_1(0)\left[e^{-\alpha} I_0(\beta) + \frac{b^2}{2\alpha} Ie\left(\frac{\beta}{\alpha}, \alpha\right)\right], \qquad (10.74)$$

où

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{4}; \; \beta = \frac{a^2 - b^2}{4},$$

et la fonction

$$Ie\,(k, x) = Ie\,(-k, x) = \int\limits_0^x e^{-u} I_0(ku)\, du \qquad (10.75)$$

a été tabulée (voir [16]).

Dans le cas général pour $x_0 \neq 0$ le second membre de (10.73) ne peut se réduire qu'à une série contenant des fonctions hypergéométriques et des polynômes d'Hermite, soit:

$$\lambda_1(x_0 \mid A_0) = \lambda_1(0)\, e^{-\frac{x_0^2}{2}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}}{(n\,!)^2} H_{2n}(x_0)\; {}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\, n+1;\; -\frac{b^2}{2}\right). \qquad (10.76)$$

10.4.2. Durée moyenne des dépassements et des intervalles les séparant. La durée moyenne des dépassements du niveau x_0 pour un processus aléatoire normal ergodique dérivable en moyenne quadratique de moyenne nulle est obtenue en portant (10.68) dans (10.21):

$$m_1\{\zeta_d\}=\frac{2\pi}{\omega_1}e^{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}\left[1-F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)\right], \tag{10.77}$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace [voir (2.61)].

Pour $x_0 \gg \sigma$, compte tenu de (2.64), on trouve

$$m_1\{\zeta_d\}\sim\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{x_0\omega_1}, \tag{10.78}$$

et pour $x_0 \ll -\sigma$, en négligeant $F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)$ par rapport à l'unité, on obtient

$$m_1\{\zeta_d\}\sim\frac{2\pi}{\omega_1}e^{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.79}$$

Il vient de (10.77) que la durée moyenne des dépassements positifs ($x_0 = 0$) est égale à $\frac{\pi}{\omega_1} = \frac{1}{\lambda(0)}$.

En portant (10.68) dans (10.22), on obtient une formule permettant de calculer la durée moyenne des intervalles entre les dépassements d'un processus aléatoire ergodique normal. On a:

$$m_1\{\zeta_{in}\}=\frac{2\pi}{\omega_1}F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)e^{\frac{x_0^2}{2\sigma^2}}. \tag{10.80}$$

En comparant (10.80) et (10.77) et ayant en vue la symétrie de la distribution normale $\left[F\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)=1-F\left(-\frac{x_0}{\sigma}\right)\right]$, on voit que la durée moyenne des intervalles séparant les dépassements du niveau $\frac{x_0}{\sigma}$ est égale à la durée moyenne des dépassements du niveau $-\frac{x_0}{\sigma}$.

Notons que pour un processus aléatoire normal dont la fonction de corrélation décroît comme une exponentielle (processus de Markov, voir § 4.5) la grandeur ω_1 n'est pas limitée et par conséquent les durées moyennes des dépassements et des intervalles les séparant sont nulles (voir également la note à la page 442).

10.4.3. Distribution de la durée des dépassements et des intervalles les séparant (première approximation). Calculons la probabilité différentielle $q_1(\tau, x_0)$ d'intersection du niveau x_0 avec une dérivée négative à l'instant $t_0+\tau$ sachant qu'à l'instant t_0 ce niveau a été coupé avec une dérivée positive, dans le cas d'un processus aléatoire

normal stationnaire $\xi(t)$, dérivable en moyenne quadratique, de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$.

Comme nous l'avons déjà noté au § 10.2.4, la fonction $q_1(\tau, x_0)$ est la première approximation de la densité de probabilité de la durée des dépassements, décrivant d'une manière suffisamment précise son début pour des valeurs petites de τ.

Pour pouvoir utiliser la formule générale (10.31) écrivons la densité de probabilité quadridimensionnelle de $\xi(t)$ et de sa dérivée à deux instants t_0 et $t_0+\tau$ [voir (4.178) à (4.182)]:

$$w_4(x, y, x_1, y_1, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2\sigma^4\sqrt{D}} \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2 D}(D_{11}x^2 + 2D_{12}xy + D_{22}y^2 + D_{33}x_1^2 + 2D_{34}x_1y_1 + D_{44}y_1^2 + 2D_{13}xx_1 + 2D_{24}yy_1 + 2D_{14}xy_1 + 2D_{23}yx_1)\Big], \quad (10.81)$$

où D et D_{ij} sont le déterminant et les cofacteurs des éléments de la matrice suivante:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & R(\tau) & R'(\tau) \\ 0 & \omega_1^2 & -R'(\tau) & -R''(\tau) \\ R(\tau) & -R(\tau) & 1 & 0 \\ R'(\tau) & -R''(\tau) & 0 & \omega_1^2 \end{Vmatrix}.$$

Les expressions explicites de ces grandeurs sont:

$$D = (\omega_1^4 - R''^2)(1 - R^2) + R'^2(R'^2 - 2RR'' - 2\omega_1^2), \quad (10.82)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{33} = \omega_1^4 - R''^2 - \omega_1^2 R'^2, \\ D_{22} &= D_{44} = \omega_1^2(1 - R^2) - R'^2, \\ D_{12} &= D_{34} = R'R'' + RR'\omega_1^2, \\ D_{14} &= -D_{23} = R'^3 - R'\omega_1^2 - RR'R'', \\ D_{13} &= RR''^2 - \omega_1^4 R - R'^2R'', \\ D_{24} &= R''(1 - R^2) + RR'^2, \end{aligned} \quad (10.83)$$

on en déduit également

$$(1 - R^2)D = D_{22}^2 - D_{24}^2. \quad (10.84)$$

En vertu de (10.81) et (10.83) on a

$$w_4(x_0, y, x_0, y_1, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2\sigma^4\sqrt{D}} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2 D}[2(D_{11} + D_{13})x_0^2 + D_{22}(y^2 + y_1^2) + 2D_{24}yy_1 + 2(D_{12} + D_{14})(y - y_1)x_0]\Big\}. \quad (10.85)$$

Portons (10.85) dans (10.31) et faisons le changement suivant des variables d'intégration :

$$u_1=\left(\frac{1-R^2}{\sigma^2 D_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y+\frac{x_0 R'}{1+R}\right),$$

$$u_2=\left(\frac{1-R^2}{\sigma^2 D_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y_1-\frac{x_0 R'}{1+R}\right).$$

Ce changement fera disparaître les termes linéaires dans l'exposant de l'exponentielle. Compte tenu de (10.68) et (10.84) on obtient

$$q_1(\tau, x_0)=\frac{D_{22}}{\omega_1(1-R^2)^{3/2}}e^{-\frac{x_0^2}{2}\frac{1-R}{1+R}}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_h^\infty\int_h^\infty (u_1-h)(u_2-h)\,e^{-\frac{u_1^2+u_2^2-2ru_1u_2}{2(1-r^2)}}du_1\,du_2, \qquad (10.86)$$

où

$$h=\frac{x_0 R'}{\sigma(1+R)}\sqrt{\frac{1-R^2}{D_{22}}};\quad r=\frac{D_{24}}{D_{22}}. \qquad (10.86')$$

En écrivant de la manière suivante

$$f(u_1, u_2)=\left[r\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}+r\frac{\partial^2}{\partial u_2^2}+(1+r^2)\frac{\partial^2}{\partial u_1\,\partial u_2}+\right.$$

$$\left.+h(1+r)\frac{\partial}{\partial u_1}+h(1+r)\frac{\partial}{\partial u_2}+r+h^2\right]e^{-\frac{u_1^2+u_2^2-2ru_1u^2}{2(1-r^2)}}$$

la fonction sous l'intégrale dans l'intégrale multiple (10.86), on peut exprimer la première approximation cherchée à l'aide des fonctions tabulées, soit :

$$q_1(\tau, x_0)=\frac{D_{22}}{\omega_1(1-R^2)^{3/2}}e^{-\frac{x_0^2}{2}\frac{1-R}{1+R}}\left\{(r+h^2)K(r, h)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}e^{-\frac{h^2}{1+r}}-\frac{2h}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h^2}{2}}\left[1-F\left(h\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right)\right]\right\}, \qquad (10.87)$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace et

$$K(r, h)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_h^\infty\int_h^\infty e^{-\frac{u^2+v^2-2ruv}{2(1-r^2)}}du\,dv \qquad (10.87')$$

la fonction de répartition bidimensionnelle de la loi normale, tabulée dans [3]. On a reproduit dans l'annexe I un extrait de ces tables.

Les tables ont été calculées pour $h > 0$. Les valeurs de $K(r, h)$ pour des h négatifs sont données par (2.72). On a:

$$K(r, -h) = K(r, h) + 2F(h) - 1. \qquad (10.88)$$

A partir de (10.87) pour le cas particulier $x_0 = h = 0$ on obtient la première approximation de la distribution de la durée des dépassements positifs (c'est-à-dire des dépassements du niveau nul), soit:

$$q_1(\tau, 0) = \frac{D_{22}}{\omega_1 (1-R^2)^{3/2}} \left[rK(r, 0) + \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi} \right]$$

et, compte tenu de (10.87′) et de la formule (11) du problème 2.8, on trouve [voir également (16) de l'annexe II]:

$$q_1(\tau, 0) = \frac{D_{24}}{2\pi\omega_1 (1-R^2)^{3/2}} \left(\pi - \arccos \frac{D_{24}}{D_{22}} + \frac{\sqrt{D_{22}^2 - D_{24}^2}}{D_{24}} \right), \qquad (10.89)$$

$$0 < \arccos \frac{D_{24}}{D_{22}} \leqslant \pi.$$

Pour $\tau \to \infty$, on a $R = R' = R'' = D_{24} = r = h = 0$, $D_{22} = \omega_1^2$ et compte tenu de (10.87) on obtient

$$\lim_{\tau \to \infty} q_1(\tau, x_0) = \frac{\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}} = \lambda_1(x_0), \qquad (10.89')$$

ce qui est en accord avec le résultat général (10.37′).

Pour des valeurs petites de τ, en supposant que la fonction $R^{(4)}(\tau)$ soit continue, on trouve à partir de (10.89)

$$q_1(\tau, 0) \approx \frac{R^{(4)}(0) - \omega_1^4}{8\omega_1^2} \tau. \qquad (10.89'')$$

Utilisons la méthode des impulsions de référence pour calculer la distribution des intervalles séparant les zéros d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. Pour une suite biconnexe d'impulsions de référence cette distribution peut être obtenue à partir de (10.59) et (10.60) par substitution des densités de probabilité bi- et tridimensionnelle (voir problème 2.11) et par intégration de zéro à l'infini. Pour l'intégration on met les fonctions exponentielles sous la forme de somme de carrés, et en passant aux coordonnées polaires, on a:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_1^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2(1-R_1^2)} (x_1^2 - 2R_1 x_1 x_2 + x_2^2) \right] dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\arccos R_1}{\pi} \right),$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-2R_1^2-R_2^2+2R_1^2R_2}}\times$$
$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2(1-2R_1^2-R_2^2+2R_1^2R_2)}[(1-R_1^2)x_1^2+\right.$$
$$+(1-R_2^2)x_2^2+(1-R_1^2)x_3^2-2R_1(1-R_2)x_1x_2-$$
$$\left.-2R_1(1-R_2)x_2x_3-2(R_2-R_1^2)x_3x_1]\right\}dx_1\,dx_2\,dx_3=$$
$$=\frac{1}{4}\left(2-\frac{2\arccos R_1}{\pi}-\frac{\arccos R_2}{\pi}\right),$$

où

$$R_1=R(\tau_0);\quad R_2=R(2\tau_0).$$

En utilisant les expressions obtenues pour les intégrales ci-dessus, on trouve à partir de (10.55) et (10.56) l'expression approchée de la distribution des intervalles séparant les zéros:

$$P\{\zeta_d=\tau_0\}=\frac{2\arccos R_1-\arccos R_2}{2\arccos R_1}, \tag{10.90}$$

$$P\{\zeta_d=k\tau_0\}=\frac{(\arccos R_2)^2}{4(\pi-\arccos R_1)\arccos R_1}\times$$
$$\times\left[\frac{2\pi-2\arccos R_1-\arccos R_2}{2(\pi-\arccos R_1)}\right]^{k-2},\quad k\geqslant 2. \tag{10.90'}$$

Montrons aussi comment la fonction de corrélation d'un processus stationnaire normal après un limiteur parfait est liée à la distribution de la durée des dépassements pour des valeurs petites de τ. A cet effet, tout comme ceci a été fait au § 10.4.1, nous allons utiliser les résultats du problème 7.11. Ecrivons:

$$\frac{d^2B}{dR^2}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{R}{(1-R^2)^{3/2}}+\frac{x_0^2}{\sigma^2(1+R)^2}\right]e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2(1+R)}},$$

$$\frac{dB}{dR}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2(1+R)}},$$

par conséquent

$$B''(\tau)=[R'(\tau)]^2\frac{d^2B}{dR^2}+R''(\tau)\frac{dB}{dR}=$$
$$=\frac{2}{\pi}e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2(1+R)}}\left[\frac{RR'^2+(1-R^2)R''}{(1-R^2)^{3/2}}+\frac{R'^2}{(1+R)^2}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{2}{\pi}e^{-\frac{x_0^2}{\sigma^2(1+R)}}\left[\frac{D_{21}}{(1-R^2)^{3/2}}-\frac{R'^2}{(1+R)^2}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2\right].$$

A partir de (10.52) et compte tenu de (10.49) et de (10.68) on obtient l'expression approchée de la densité de probabilité des dépassements par un processus aléatoire normal stationnaire d'un niveau x_0, valable pour des valeurs petites de τ:

$$q_1(\tau, x_0) = \frac{1}{2\omega_1}\left[\frac{D_{24}}{(1-R^2)^{3/2}} + \frac{R'^2}{(1+R)^2}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2\right] e^{-\frac{1-R}{1+R}\frac{x_0^2}{\sigma^2}}. \quad (10.91)$$

Notons que pour $x_0 = 0$ l'expression (10.91) coïncide avec (10.89) si l'on néglige dans cette dernière les deux termes entre parenthèses.

Dans le cas d'un processus aléatoire normal à bande étroite dont le spectre énergétique est concentré au voisinage de la pulsation ω_0, pour des valeurs de τ proches de la durée moyenne du dépassement égale à $\tau_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, les grandeurs D_{22} et D_{24} sont à peu près égales. En négligeant dans (10.89) les deux derniers termes entre parenthèses on trouve

$$q_1(\tau, 0) \approx \frac{D_{24}}{2\omega_1(1-R^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{2\varepsilon\tau_1\left[1+\frac{(\tau-\tau_1)^2}{\varepsilon^2\tau_1^2}\right]^{3/2}}, \quad (10.92)$$

où $\varepsilon = \frac{\omega_*}{\omega_0}$, ω^* étant donnée par la relation (8.109).

On peut également utiliser la formule approchée (10.64) valable pour les processus à bande étroite. La densité de probabilité de la dérivée d'un processus aléatoire normal stationnaire est donnée par (8.117). La formule (10.64) donne alors

$$q_1(\tau, 0) = \frac{\tau_1}{2\varepsilon\tau^2}\left\{\frac{1}{\left[1+\frac{(\tau-\tau_1)^2}{\varepsilon^2\tau^2}\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1+\frac{(\tau+\tau_1)^2}{\varepsilon^2\tau^2}\right]^{3/2}}\right\}. \quad (10.92')$$

Comme on pouvait s'y attendre, lorsque τ diffère peu de τ_1, les formules (10.92) et (10.92′) donnent des résultats voisins, car pour des processus à bande étroite on a $\varepsilon \ll 1$.

Pour calculer la première approximation $q_1^*(\tau, x_0)$ de la densité de probabilité de la durée des intervalles séparant les dépassements au niveau x_0 pour un processus aléatoire normal stationnaire nous allons utiliser la formule (10.37). En portant (10.37) dans l'expression (10.81) il est facile de voir que l'on a

$$q_1^*(\tau, x_0) = q_1(\tau, -x_0),$$

c'est-à-dire que la densité de probabilité de la durée des intervalles entre les dépassements au niveau x_0 coïncide avec celle de la durée des dépassements au-dessus du niveau $-x_0$, ce qui découle évidemment de la symétrie de la distribution normale. En utilisant (10.87)

et (10.88) on trouve

$$q_1^*(\tau, x_0) = q_1(\tau, -x_0) + \frac{D_{22}}{\omega_1(1-R^2)^{3/2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{2h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} + (r+h^2)\,[2F(h)-1] \right\} e^{-\frac{x_0^2}{2}\frac{1-R}{1+R}}, \quad h>0. \qquad (10.93)$$

Au niveau $x_0 = 0$ on a

$$q_1^*(\tau, 0) = q_1(\tau, 0),$$

c'est-à-dire que les densités de probabilité des durées des dépassements positifs et des intervalles les séparant coïncident pour un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle.

10.4.4. Nombre moyen et densité de probabilité des maxima. Rappelons qu'un processus aléatoire stationnaire et sa dérivée ne sont pas corrélés aux mêmes instants, la matrice de corrélation des grandeurs aléatoires $\xi(t)$, $\xi'(t)$ et $\xi''(t)$ peut donc s'écrire de la manière suivante

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\omega_1^2 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & R^{(4)}(0) \end{Vmatrix}. \qquad (10.94)$$

L'expression (10.94) donne

$$D = \det M = \omega_1^2\,[R^{(4)}(0) - \omega_1^4] = \omega_1^2\omega_2^4,$$
$$D_{11} = \omega_1^2 R^{(4)}(0),\ D_{13} = \omega_1^4,\ D_{33} = \omega_1^2, \qquad (10.94')$$

par conséquent pour un processus aléatoire normal stationnaire on a

$$w_3(x, 0, z, t) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3\omega_1\omega_2^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2\omega_2^4}\,[R^{(4)}(0)\,x^2 + 2\omega_1^2 xz + z^2] \right\}. \qquad (10.95)$$

En portant (10.95) dans (10.39) on obtient

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3\omega_1\omega_2^2} e^{-\frac{R^{(4)}(0)x^2}{2\sigma^2\omega_2^4}} \int_{-\infty}^{0} |z|\, e^{-\frac{z^2+2\omega_1^2 xz}{2\sigma^2\omega_2^4}}\, dz$$

ou encore, en écrivant l'exposant de l'exponentielle de manière à avoir un carré parfait et en intégrant on trouve

$$G(x) = \frac{\omega_1}{(2\pi)^{3/2}\sigma} \left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 e^{-\frac{R^{(4)}(0)x^2}{2\sigma^2\omega_2^4}} + \sqrt{2\pi}\,\frac{x}{\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} F\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\frac{x}{\sigma}\right) \right]. \qquad (10.96)$$

En vertu de (10.40), le nombre moyen de maxima par unité de temps de valeurs supérieures à x_0 est égal à

$$\mu_{\max}(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} G(x)\,dx =$$

$$= \frac{\omega_1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{R^{(4)}(0)}}{\omega_1^2} F\left(-\frac{\sqrt{R^{(4)}(0)}}{\omega_2^2}\frac{x_0}{\sigma}\right) + e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}} F\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\cdot\frac{x_0}{\sigma}\right)\right], \qquad (10.97)$$

par conséquent, le nombre moyen de maxima de valeur quelconque par unité de temps est

$$\mu_{\max} = \frac{\omega_1}{2\pi}\frac{\sqrt{R^{(4)}(0)}}{\omega_1^2} = \lambda_1(0)\frac{\sqrt{R^{(4)}(0)}}{\omega_1^2}. \qquad (10.98)$$

Ainsi, le nombre moyen de maxima par unité de temps est de $\sqrt{R^{(4)}(0)}/\omega_1^2$ fois supérieur au nombre moyen de dépassements positifs. Pour un bruit blanc ayant traversé un système linéaire de caractéristique fréquentielle $C(\omega)$, ce coefficient de proportionnalité est

$$k = \frac{\sqrt{R^{(4)}(0)}}{\omega_1^2} = \frac{\left[\int_0^{\infty}\omega^4 C^2(\omega)\,d\omega \int_0^{\infty} C^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}}{\int_0^{\infty}\omega^2 C^2(\omega)\,d\omega} \qquad (10.99)$$

(pour un filtre passe-bas parfait ce coefficient est égal à $3/\sqrt{5} \approx$ $\approx 1{,}35$).

Notons que pour $\frac{x_0}{\sigma} \gg 1$ (10.97) conduit à la formule asymptotique suivante

$$\mu_{\max}(x_0) \sim \frac{\omega_1}{2\pi} e^{-\frac{x_0}{2\sigma^2}} = \lambda_1(x_0), \qquad (10.100)$$

c'est-à-dire que pour un niveau x_0 élevé, le nombre moyen de maxima supérieurs à ce niveau tend vers le nombre moyen de dépassements. En effet, il est peu probable que pour $x_0 \gg \sigma$ un dépassement contienne plus d'un maximum.

En divisant (10.96) par (10.98) écrivons la densité de probabilité des maxima, en utilisant la notation (10.99), soit:

$$w_{1m}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sqrt{k^2-1}}{k} e^{-\frac{k^2x^2}{2\sigma^2(k^2-1)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{k} F\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{k^2-1}}\right)\right]. \qquad (10.101)$$

Pour $k \gg 1$ la densité de probabilité tend vers la loi normale:

$$w_{1m}(x) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad (10.101')$$

et pour $k \to 1$, elle tend vers la loi de Rayleigh:

$$w_{1m}(x) \to \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \qquad (10.101'')$$

Notons également qu'en vertu de la symétrie de la distribution normale tous les résultats de ce paragraphe restent vrais pour les caractéristiques des minima d'un processus aléatoire normal stationnaire.

10.5. DÉPASSEMENTS DE L'ENVELOPPE D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

10.5.1. Caractéristiques numériques. Considérons la somme d'un signal harmonique et d'un processus aléatoire normal, dérivable en moyenne quadratique, de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)$. En utilisant l'expression (8.114) de la distribution conjointe de l'enveloppe et de sa dérivée, il est facile de trouver à partir de (10.4) le nombre moyen d'intersections par unité de temps de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal à bande étroite, d'un niveau $r = r_0$ avec un signe donné de la dérivée, c'est-à-dire le nombre moyen de dépassements:

$$\lambda_1(r_0) = W_1(r_0)\frac{1}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2\omega_*^2}}\,dr = \frac{\sigma\omega_*}{\sqrt{2\pi}}W_1(r_0), \qquad (10.102)$$

où $W_1(r_0)$ est la fonction de Rayleigh généralisée [voir (8.17)]; ω_* est donné par la formule (8.109).

La relation (10.102) permet de conclure que les courbes de distribution de l'enveloppe données sur la figure 3.6 représentent également, à une certaine échelle, le nombre moyen de dépassements de l'enveloppe.

Le nombre moyen d'intersections du niveau r_0, avec une dérivée de signe donné, pour l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire est égal à

$$\lambda_1(r_0) = \frac{\omega_*}{\sqrt{2\pi}}\frac{r_0}{\sigma} e^{-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}}. \qquad (10.103)$$

En vertu de (10.21) la valeur moyenne de la durée des dépassements est donnée par la formule suivante (en supposant de plus que

le processus normal est ergodique):

$$m_1\{\zeta_d\}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\omega_*}\frac{1}{W_1(r_0)}\int_{r_0}^{\infty}W_1(r)\,dr. \tag{10.104}$$

Pour l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite, $W_1(r)$ est la fonction de distribution de Rayleigh ordinaire. Dans ce cas la durée moyenne d'un dépassement de l'enveloppe au-dessus du niveau r_0 est égale à

$$m_1\{\zeta_d\}=\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\omega_* r_0}. \tag{10.105}$$

La formule (10.22) donne la durée moyenne des intervalles séparant les dépassements de l'enveloppe. Il vient:

$$m_1\{\zeta_{\text{in}}\}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\omega_*}\frac{1}{W_1(r_0)}\int_{0}^{r_0}W_1(r)\,dr. \tag{10.106}$$

Pour l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite cette formule prend la forme suivante:

$$m_1\{\zeta_{\text{in}}\}=\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\omega_* r_0}\left(e^{\frac{r_0^2}{2\sigma^2}}-1\right). \tag{10.107}$$

Si $\frac{r_0}{\sigma}\ll 1$ on a

$$m_1\{\zeta_{\text{in}}\}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega_*}\frac{r_0}{2\sigma}. \tag{10.107'}$$

10.5.2. Densités de probabilité des intervalles séparant les dépassements et de la durée des dépassements (première approximation). La probabilité différentielle $q_1^*(\tau, r_0)$ d'intersection par l'enveloppe d'un niveau $r_0>0$ avec une dérivée positive à l'instant $t_0+\tau$, à condition qu'à l'instant t_0 il y ait intersection de ce niveau avec une dérivée négative (indépendamment du nombre d'intersections de ce niveau aux autres instants entre t_0 et $t_0+\tau$), peut servir de première approximation pour la densité de probabilité des intervalles séparant les dépassements de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite. Supposons que le spectre énergétique $F(\omega)$ d'un processus aléatoire normal $\xi(t)$, stationnaire, à bande étroite, dérivable en moyenne quadratique, soit symétrique par rapport à la pulsation centrale ω_0. Pour pouvoir utiliser la formule (10.36) il faut connaître la densité de probabilité quadridimensionnelle de l'enveloppe $E(t)$ et de sa dérivée $E'(t)$ aux instants t_0 et $t_0+\tau$. A cet effet, conformément à la méthode

utilisée au § 6.2.3, il faut connaître la densité de probabilité octodimensionnelle des grandeurs aléatoires $A(t)$, $A'(t)$, $A(t+\tau)$, $A'(t+\tau)$, $C(t)$, $C'(t)$, $C(t+\tau)$, $C'(t+\tau)$.

Conformément à l'hypothèse faite sur la symétrie du spectre énergétique du processus aléatoire normal initial $\xi(t)$, ses composantes en quadrature $A(t)$ et $C(t)$ sont indépendantes, leurs fonctions de corrélation sont identiques et égales à

$$\sigma^2 R_0(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega_0-\omega)\tau\, d\omega.$$

La densité de probabilité octodimensionnelle en question est alors égale au produit de deux densités quadridimensionnelles

$$w_{AA'}(x_1, x_1', x_2, x_2', \tau)\, w_{CC'}(y_1, y_1', y_2, y_2', \tau),$$

dont chacune sera donnée par (10.81), si seulement dans la matrice de corrélation M [et par conséquent dans les formules (10.82), (10.83)] on remplace le coefficient de corrélation $R(\tau)$ et ses dérivées par $R_0(\tau)$ et les dérivées correspondantes. En particulier, il convient de remplacer la grandeur ω_1 par ω_*. Puis comme d'habitude on passe aux coordonnées polaires:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r_1\cos\vartheta_1,\quad x_2 = r_2\cos\vartheta_2,\\
y_1 &= r_1\sin\vartheta_1,\quad y_2 = r_2\sin\vartheta_2,\\
x_1' &= r_1'\cos\vartheta_1 - r_1\vartheta_1'\sin\vartheta_1,\\
x_2' &= r_2'\cos\vartheta_2 - r_2\vartheta_2'\sin\vartheta_2,\\
y_1' &= r_1'\sin\vartheta_1 + r_1\vartheta_1'\cos\vartheta_1,\\
y_2' &= r_2'\sin\vartheta_2 + r_2\vartheta_2'\cos\vartheta_2,
\end{aligned}$$

et compte tenu du jacobien de la transformation, égal à $r_1^2 r_2^2$ [comparer avec (8.111')], on obtient la distribution conjointe de l'enveloppe, de la phase et de leurs dérivées à deux instants [voir ci-dessous la formule (10.115) pour $u\equiv 0$]. Les intégrations successives sur ϑ_1, ϑ_2, ϑ_1', ϑ_2' donnent la distribution cherchée de l'enveloppe et de ses dérivées à deux instants. En portant cette distribution dans (10.36) et compte tenu de (10.103), pour la première approximation on arrive à une expression assez compliquée :

$$q_1^*(\tau, r_0) = \frac{r_0 D_{22} e^{\frac{r_0^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}(1-R_0^2)^2}\int_0^{2\pi} J(\rho, \varkappa)\, e^{-\frac{r_0^2}{\sigma^2}\frac{1-R_0\cos\varphi}{1-R_0^2}}\, d\varphi, \qquad (10.108)$$

où

$$\rho = \frac{D_{24}}{D_{22}}\cos\varphi;\quad \varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2; \qquad (10.109)$$

$$\varkappa = \frac{R_0 R_0'(R_0-\cos\varphi)}{\sqrt{D_{22}(1-R_0^2)}}, \qquad (10.110)$$

et la fonction $J(\rho, \varkappa)$ coïncide avec l'expression se trouvant dans accolade de (10.87) lorsqu'on remplace dans cette expression r et h respectivement par ρ et $\varkappa$.

Pour $\tau \to \infty$, on a $R_0 = R_0' = R_0'' = D_{24} = \rho = \varkappa = 0$, $D_{22} = \omega_*^2$ et il découle de (10.108)

$$\lim_{\tau\to\infty} q_1^*(\tau, r_0) = \frac{r_0\omega_*}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}} = \lambda_1(x_0),$$

ce qui est en accord avec le résultat général (10.37').

On peut montrer que pour des valeurs petites de τ et de $\frac{r_0}{\sigma}$ et un rapport donné de $\frac{\tau\sigma}{r_0}$, on a en vertu de (10.108)

$$q_1^*(\tau, r_0) \approx \frac{2\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}}{r_0} e^{-z} \left\{z^2[I_0(z) - I_1(z)] - \frac{z}{2} I_1(z)\right\}, \qquad (10.111)$$

où

$$z = \left(\frac{r_0}{\sigma\omega_*\tau}\right)^2. \qquad (10.112)$$

Si maintenant on se donne $\frac{r_0}{\sigma}$ et si l'on fait tendre τ vers zéro (c'est-à-dire $z \to \infty$), en utilisant les développements asymptotiques suivants des fonctions de Bessel

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{128z^2} + \ldots\right),$$

$$I_1(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1 - \frac{3}{8z} - \frac{15}{128z^2} + \ldots\right),$$

on obtient à partir de (10.111)

$$q_1^*(\tau, r_0) \approx \frac{2\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}}{r_0} \frac{3}{16\sqrt{2\pi z}} = \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma\omega_*}{r_0}\right)^2 \tau. \qquad (10.113)$$

Pour trouver la première approximation $q_1(\tau, r_0)$ de la densité de probabilité de la durée des dépassements de l'enveloppe au-dessus du niveau r_0, il suffit de remplacer, dans (10.108), la fonction sous l'intégrale $J(\rho, \varkappa)$ par $J(\rho, -\varkappa)$. On a alors [comparer avec (10.93)]

$$q_1(\tau, r_0) = q_1^*(\tau, r_0) + \frac{r_0 D_{22} e^{\frac{r_0^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}(1 - R_0^2)^2} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left\{(\rho + \varkappa^2)[2F(\varkappa) - 1] + \frac{2\varkappa}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varkappa^2}{2}}\right\} \times$$

$$\times e^{-\frac{r_0^2}{\sigma^2}\frac{1 - R_0\cos\varphi}{1 - R_0^2}} d\varphi. \qquad (10.114)$$

10.5.3. Calcul approché de la densité de probabilité de la durée des dépassements et des intervalles entre les dépassements de l'enveloppe de la somme d'un signal harmonique et d'un bruit normal stationnaire. En utilisant la méthode du § 6.2.3, on trouve l'expression suivante pour la densité de probabilité conjointe de l'enveloppe, de la phase et de leurs dérivées à deux instants t_0 et $t_0 + \tau$ d'une somme d'un signal harmonique et d'un processus aléatoire normal stationnaire, à bande étroite, dérivable en moyenne quadratique, dont le spectre énergétique est symétrique par rapport à la fréquence du signal. On a :

$$\begin{aligned}
&W_8(r_1, r_2, r_1', r_2', \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_1', \vartheta_2') = \\
&= \frac{r_1^2 r_2^2}{\sigma^4 (2\pi)^4 D} \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2 D} [D_{11}(r_1^2 + r_2^2 + \\
&+ 2u^2 - 2ur_1 \cos\vartheta_1 - 2ur_2\cos\vartheta_2) + D_{22}(r_1'^2 + r_2'^2 + r_1^2\vartheta_1'^2 + r_2^2\vartheta_2'^2) + \\
&+ 2D_{13}(r_1 r_2 \cos\varphi - ur_1\cos\vartheta_1 - ur_2\cos\vartheta_2 + u^2) + \\
&+ 2D_{24}(r_1' r_2' \cos\varphi + r_1 r_2 \vartheta_1'\vartheta_2' \cos\varphi - r_1 r_2'\vartheta_1' \sin\varphi + r_2 r_1' \vartheta_2' \sin\varphi) + \\
&+ 2D_{12}(r_1 r_1' - ur_1'\cos\vartheta_1 + ur_1\vartheta_1'\sin\vartheta_1 - r_1 r_2' + \\
&+ ur_2'\cos\vartheta_2 - ur_2\vartheta_2'\sin\vartheta_2) + \\
&+ 2D_{14}(r_1 r_2'\cos\varphi - r_1 r_2 \vartheta_2'\sin\varphi - ur_2'\cos\vartheta_2 + \\
&+ ur_2\vartheta_2'\sin\vartheta_2 - r_2 r_1'\cos\varphi - r_1 r_2\vartheta_1'\sin\varphi + \\
&\qquad\qquad + ur_1'\cos\vartheta_1 - ur_2\vartheta_1'\sin\vartheta_1)]\Big\}, \qquad (10.115)
\end{aligned}$$

où $\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$; u est l'amplitude du signal, et les grandeurs D, D_{ij} sont données par (10.82) et (10.83).

Comme le montre une analyse détaillée de la formule (10.115), pour des valeurs petites de τ, les termes entre crochets ne contenant pas u sont des infiniment petits d'ordre $O(\tau^2)$, alors que les termes contenant u (c'est-à-dire se rapportant au signal) sont d'ordre de petitesse $O(\tau^4)$. C'est pourquoi, lors du calcul de la valeur approchée, le premier segment de la fonction donnant la distribution de la durée des dépassements de l'enveloppe de la somme en question, est le même qu'en l'absence de signal [voir (10.114) et (11) du problème 10.7], c'est-à-dire

$$q_1(\tau, r_0) = \frac{\tau\omega_*^2 r_0^2}{4\sigma^2} e^{-\frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^2}{8\sigma^2}}. \qquad (10.116)$$

Le second segment, conformément à la méthode exposée au § 10.3.1, est une exponentielle, soit

$$\gamma e^{-\alpha\tau},$$

où α et γ sont les paramètres de l'exponentielle, dépendant des valeurs du niveau de seuil r_0 et de l'amplitude du signal u.

Au point τ^* d'intersection de la première approximation avec la courbe exponentielle, les valeurs de ces fonctions doivent être les mêmes [voir (10.46)], donc

$$\frac{\tau^*\omega_*^2 r_0^2}{4\sigma^2} e^{-\frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^{*2}}{8\sigma^2}} = \gamma e^{-\alpha\tau^*}. \quad (10.117)$$

Comme l'aire se trouvant sous la courbe approchée doit être égale à l'unité, on obtient l'équation suivante:

$$\frac{r_0^2}{4\sigma^2} \int_0^{\tau^*\omega_*} x e^{-\frac{r_0^2 x^2}{8\sigma^2}} dx + \gamma \int_{\tau^*}^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = 1. \quad (10.117')$$

Enfin, comme le moment du premier ordre de la densité de probabilité doit être égal à la durée moyenne d'un dépassement, on trouve une troisième équation pour les variables α, γ et τ^*:

$$\frac{r_0^2}{4\sigma^2\omega_*} \int_0^{\tau^*\omega_*} x^2 e^{-\frac{r_0^2 x^2}{8\sigma^2}} dx + \gamma \int_{\tau^*}^{\infty} \tau e^{-\alpha\tau} d\tau = m_1\{\zeta_d\}. \quad (10.117'')$$

En intégrant dans (10.117) à (10.117″), on obtient le système d'équations suivant:

$$\frac{\tau^*\omega_*^2 r_0^2}{4\sigma^2} e^{-\frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^{*2}}{8\sigma^2}} = \gamma e^{-\alpha\tau^*},$$

$$e^{-\frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^{*2}}{8\sigma^2}} = \frac{\gamma}{\alpha} e^{-\alpha\tau^*},$$

$$\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{r_0\omega_*} \Phi\left(\frac{\tau^*\omega_* r_0}{2\sigma}\right) - \tau^* e^{-\frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^{*2}}{8\sigma^2}} + $$

$$+ \frac{\gamma}{\alpha}\left(\tau^* + \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha\tau^*} = m_1\{\zeta_d\}, \quad (10.118)$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de Kramp [voir (2.65)].

La première équation du système (10.118) donne le paramètre γ de la courbe exponentielle:

$$\gamma = \frac{\tau^*\omega_*^2 r_0^2}{4\sigma^2} \exp\left\{\alpha\tau^* - \frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^{*2}}{8\sigma^2}\right\}. \quad (10.119)$$

En portant les valeurs de γ dans la seconde équation du système, on trouve l'expression donnant l'autre paramètre de l'exponentielle:

$$\alpha = \frac{\tau^*\omega_*^2 r_0^2}{4\sigma^2}. \quad (10.119')$$

Enfin, en remplaçant dans la troisième équation du système (10.118) γ et α par leurs expressions (10.119) et (10.119′), on obtient pour τ^* l'équation transcendante suivante:

$$\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{r_0}\Phi\left(\frac{\tau^*\omega_* r_0}{2\sigma}\right)+\frac{4\sigma^2}{\tau^*\omega_* r_0^2}e^{-\frac{\omega_*^2 r_0^2 \tau^{*2}}{8\sigma^2}}=\omega_* m_1\{\zeta_d\}. \qquad (10.120)$$

La grandeur $m_1\{\zeta_d\}$ se calcule à l'aide de la formule (10.104).

10.6. DÉPASSEMENTS DE LA PHASE D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

10.6.1. Caractéristiques numériques des dépassements de la phase. Considérons la somme d'un processus aléatoire normal stationnaire, dérivable en moyenne quadratique, à bande étroite, de moyenne nulle, de variance σ^2, de coefficient de corrélation $R(\tau)=R_0(\tau)\times\times\cos\omega_0\tau$, et d'un signal harmonique $s(t)=u\cos\omega_0 t$. Supposons que le spectre énergétique $F(\omega)$ de ce processus normal soit symétrique par rapport à la pulsation centrale ω_0. Pour calculer la distribution conjointe de la phase et de sa dérivée nous utiliserons l'expression (8.115). La relation (10.4) permet alors de trouver le nombre moyen d'intersections du niveau ϑ_0 par unité de temps (avec un signe donné de la dérivée, c'est-à-dire le nombre moyen de dépassements) de la phase du processus complexe considéré, soit:

$$\lambda_1(\vartheta_0)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}\omega_*}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\int_0^\infty\int_0^\infty \vartheta' r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)}e^{\frac{ur\cos\vartheta_0}{\sigma^2}}\,dr\,d\vartheta'.$$

En intégrant tout d'abord sur ϑ', on trouve

$$\lambda_1(\vartheta_0)=\frac{\omega_*}{\sigma(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2-2ur\cos\vartheta_0}{2\sigma^2}}\,dr.$$

Enfin, en écrivant l'exposant de l'exponentielle sous la forme d'un carré parfait et en intégrant sur r, on trouve la formule cherchée

$$\lambda_1(\vartheta_0)=\frac{\omega_*}{2\pi}e^{-\frac{u^2\sin^2\vartheta_0}{2\sigma^2}}F\left(\frac{u}{\sigma}\cos\vartheta_0\right),\quad |\vartheta_0|\leqslant\pi. \qquad (10.121)$$

En l'absence de signal ($u=0$) la formule (10.121) devient

$$\lambda_1(\vartheta_0)=\frac{\omega_*}{4\pi}, \qquad (10.121')$$

ce qui correspond au nombre moyen de dépassements de la phase d'un processus normal stationnaire par unité de temps. Ce nombre est indépendant du niveau ϑ_0 et ne dépend que du rayon de giration du spectre énergétique du processus normal. En vertu du résultat obtenu, la densité de probabilité de la phase est uniforme sur

l'intervalle $(-\pi, \pi)$. On aurait pu obtenir la formule (10.121′) directement à partir de (8.117) en calculant, par exemple, le nombre de zéros de la phase par unité de temps

$$\lambda(0)=2\lambda_1(0)=\frac{1}{4\pi\omega_*}\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta'|\left(1+\frac{\vartheta'^2}{\omega_*^2}\right)^{-\frac{3}{2}}d\vartheta'=\frac{\omega_*}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z)^{3/2}}=\frac{\omega^*}{2\pi},$$

égal au nombre moyen d'intersections du niveau nul avec une dérivée positive dans le cas d'un processus aléatoire normal stationnaire à large bande, dont le spectre énergétique est obtenu par translation du spectre initial $F(\omega)$ dans le domaine des basses fréquences.

La durée moyenne d'un dépassement au niveau ϑ_0 de la phase d'un processus aléatoire normal ergodique et la durée moyenne de l'intervalle séparant les dépassements sont respectivement

$$m_1\{\zeta_d\}=2\frac{\pi-\vartheta_0}{\omega_*},\quad |\vartheta_0|\leqslant\pi, \tag{10.122}$$

$$m_1\{\zeta_{in}\}=2\frac{\vartheta_0+\pi}{\omega_*},\quad |\vartheta_0|\leqslant\pi. \tag{10.122′}$$

Pour un signal faible $\left(\frac{u}{\sigma}\ll 1\right)$, aux infiniment petits du second ordre près, on a en vertu de (10.121)

$$\lambda_1(\vartheta_0)=\frac{\omega_*}{4\pi}\left(1+\frac{u}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\vartheta_0\right), \tag{10.123}$$

et pour un signal intense $\left(\frac{u}{\sigma}\gg 1,\ \vartheta_0 \text{ est petit}\right)$ on a

$$\lambda_1(\vartheta_0)\sim\frac{\omega_*}{2\pi}e^{-\frac{u^2\vartheta_0^2}{2\sigma^2}}, \tag{10.124}$$

ce qui correspond à la tendance de la phase vers la loi normale pour des valeurs grandes du rapport signal/bruit [voir (8.63) et (10.68)].

Notons qu'on obtient directement à partir de (10.121) la formule donnant le nombre moyen de dépassements par unité de temps du niveau z_0 par le cosinus de la phase du processus sommaire considéré, soit:

$$\lambda_1(z_0)=\frac{\omega_*}{2\pi}e^{-\frac{u^2(1-z_0^2)}{2\sigma^2}}F\left(\frac{uz_0}{\sigma}\right). \tag{10.125}$$

En l'absence de signal ($u=0$) la formule (10.125) coïncide avec (10.121′), autrement dit, le nombre moyen de dépassements du cosinus de la phase d'un processus normal stationnaire ne dépend pas du niveau z_0 et coïncide avec le nombre moyen de dépassements de la phase.

10.6.2. Nombre moyen de dépassements de la pulsation. Proposons-nous de trouver la formule donnant le nombre moyen de dépassements par unité de temps de la dérivée de la phase (pulsation) d'un

processus, somme d'un signal harmonique et d'un bruit normal stationnaire. A cette fin il faut connaître la distribution conjointe des dérivées première et seconde de la phase aux mêmes instants qui, selon la méthode générale, s'obtient à partir de la distribution normale à six dimensions des grandeurs aléatoires $A(t)$, $A'(t)$, $A''(t)$, $C(t)$, $C'(t)$, $C''(t)$.

Supposant toujours que le spectre énergétique du processus aléatoire normal initial à bande étroite (avec la condition supplémentaire de l'existence de la dérivée seconde en moyenne quadratique) est symétrique, on voit que les grandeurs $A(t)$ et $C(t)$ sont indépendantes, qu'elles ont les mêmes fonctions de corrélation égales à $\sigma^2 R_0(\tau)$ et que de plus les dérivées premières $A'(t)$ et $C'(t)$ de ces composantes en quadrature sont indépendantes de $A(t)$, $A''(t)$ et de $C(t)$, $C''(t)$ respectivement. La distribution à six dimensions cherchée est le produit des quatre fonctions densité de probabilité suivantes:

$$w_{A'}(x')\, w_{C'}(y')\, w_{AA''}(x, x'')\, w_{CC''}(y, y''),$$

dont chacune s'écrit facilement, sachant que la valeur moyenne des grandeurs aléatoires considérées est nulle, que l'on connaît leur variance et que $A(t)$ et $A''(t)$, $C(t)$ et $C''(t)$ ont mêmes coefficients de corrélation égaux à $R_0^4(0)$.

Ainsi, on a

$$w_6(x, x', x'', y, y', y'') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3\, \omega_*^2\, [R_0^{(4)}(0) - \omega_*^4]} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2\omega_*^2\, [R_0^{(4)}(0) - \omega_*^4]}\, [\omega_*^2 R_0^{(4)}(0)\,(x^2 + y^2) + \omega_*^2\,(x''^2 + y''^2) + \right.$$
$$\left. + [R_0^{(4)}(0) - \omega_*^4]\,(x'^2 + y'^2) + 2\omega_*^2\,(xx'' + yy'')]\right\}. \qquad (10.126)$$

On passe alors aux coordonnées polaires:

$$x = r\cos\vartheta - u,\quad x' = r'\cos\vartheta - \vartheta' r\sin\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta,\quad y' = r'\sin\vartheta + \vartheta' r\cos\vartheta,$$
$$x'' = r''\cos\vartheta - 2\vartheta' r'\sin\vartheta - \vartheta'' r\sin\vartheta - \vartheta'^2 r\cos\vartheta,$$
$$y'' = r''\sin\vartheta + 2\vartheta' r'\cos\vartheta + \vartheta'' r\cos\vartheta - \vartheta'^2 r\sin\vartheta,$$

et compte tenu du jacobien de la transformation égal à r^3, on obtient pour la distribution conjointe des deux premières dérivées de la phase aux mêmes instants l'expression suivante:

$$W_2(\vartheta', \vartheta'') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^3\, [R_0^{(4)}(0) - \omega_*^4]\, \omega_*^2} \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} r^3 \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\omega_*^2\, [R_0^{(4)}(0) - \omega_*^4]} \times \right.$$

$$\times [\omega_*^2 R_0^{(4)}(0)(u^2+r^2-2ur\cos\vartheta)+[R_0^{(4)}(0)-\omega_*^4](r'^2+r^2\vartheta'^2)+$$
$$+2\omega_*^2(rr''-r^2\vartheta'^2)+\omega_*^2(r''^2-2rr''\vartheta'^2+4r'^2\vartheta'^2+r^2\vartheta'^4+$$
$$+4rr'\vartheta'\vartheta''+r^2\vartheta''^2)+2\omega_*^2 u(rr''\sin\vartheta+2r'\vartheta'\sin\vartheta+r\vartheta'^2\cos\vartheta-$$
$$-r''\cos\vartheta)]\Big\}\,dr'\,dr''\,dr\,d\vartheta.$$

On peut intégrer sur r' et r'', ce qui donne

$$W_2(\vartheta',\vartheta'')=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2\,\omega_*\omega_{**}^2\,(1+4\vartheta'^2\omega_*^2/\omega_{**}^4)^{1/2}}\times$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} r^3\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[r^2-2ur\cos\vartheta+u^2+\frac{r^2\vartheta'^2}{\omega_*^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(u\omega_*^2\sin\vartheta+r\vartheta'')^2}{\omega_{**}^4(1+4\vartheta'^2\omega_*^2/\omega_{**}^4)}\right]\right\}dr\,d\vartheta, \qquad (10.127)$$

où

$$\omega_{**}^4=R_0^{(4)}(0)-\omega_*^4. \qquad (10.127')$$

Le nombre moyen de dépassements du niveau ϑ_0' en unité de temps par la pulsation du processus est donné par la formule

$$\lambda_1(\vartheta_0')=\int_0^{\infty}\vartheta''W_2(\vartheta_0',\vartheta'')\,d\vartheta'', \qquad (10.128)$$

où $W_2(\vartheta_0',\vartheta'')$ se calcule à l'aide de (10.127).

Faisant dans (10.128) le changement de variables

$$z=\frac{r}{\sigma},\qquad x=\frac{r\vartheta''}{\sigma\omega_*^2}$$

et introduisant de plus les désignations

$$s=\frac{u}{\sigma},\quad v_0=1+\frac{\vartheta_0'^2}{\omega_*^2},\quad \delta=\frac{\omega_*^4}{\omega_{**}^4(1+4\vartheta_0'^2\omega_*^2/\omega_{**}^4)},$$

on peut écrire l'intégrale multiple sous une forme plus simple, soit:

$$\lambda_1(\vartheta_0')=\frac{\omega_*\sqrt{\delta}}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}zx\,\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}[v_0z^2-2zs\cos\vartheta+s^2+(x+s\sin\vartheta)^2]\right\}dx\,d\vartheta\,dz.$$

On peut montrer que cette intégrale se réduit à l'expression

$$\lambda_1(\vartheta_0')=\frac{\omega_*}{2\pi v_0\sqrt{\delta}}e^{-\frac{s^2}{2}}\left\{e^{-\frac{\delta s^2}{4}}I_0\left(\frac{\delta s^2}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1+v_0\delta}{1+\frac{v_0\delta}{2}}e^{\frac{s^2}{2v_0}}Ie\left[\frac{v_0\delta}{2+v_0\delta},\ \frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{v_0}+\frac{\delta}{2}\right)\right]\right\}, \qquad (10.129)$$

où la fonction $Ie(k, x)$ est donnée par (10.75).

Comme $Ie\,(k,\ 0) = 0$, on obtient à partir de (10.129) une formule assez simple pour le nombre moyen de dépassements par unité de temps de la pulsation d'un processus aléatoire stationnaire ($s = 0$)

$$\lambda_1(\vartheta_0') = \frac{\omega_*}{2\pi v_0 \sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\omega_{**}^4 + 4\vartheta_0'^2\omega_*^2}}{2\pi\omega_*\left(1 + \frac{\vartheta_0'^2}{\omega_*^2}\right)}. \qquad (10.129')$$

Le nombre moyen de dépassements par unité de temps du niveau nul par la pulsation (nombre moyen de zéros) est égal à

$$\lambda(0) = 2\lambda_1(0) = \frac{\omega_{**}^2}{\pi\omega_*}. \qquad (10.130)$$

Pour $\vartheta_0' \gg \omega_*$ on a

$$\lambda_1(\vartheta_0') \sim \frac{2\omega_*^2}{\pi\vartheta_0'}. \qquad (10.130')$$

En utilisant (8.118) on trouve également la durée moyenne des dépassements de la pulsation d'un processus aléatoire normal ergodique

$$m_1\{\zeta_d\} = \frac{\pi\sqrt{\delta}}{\omega_*}\left(1 + \frac{\vartheta_0'^2}{\omega_*^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_*^2}{\vartheta_0'^2}}}\right) \qquad (10.131)$$

ainsi que la durée moyenne des intervalles entre les dépassements

$$m_1\{\zeta_{in}\} = \frac{\pi\sqrt{\delta}}{\omega_*}\left(1 + \frac{\vartheta_0'^2}{\omega_*^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_*^2}{\vartheta_0'^2}}}\right). \qquad (10.132)$$

Si $\vartheta_0' \gg \omega_*$ on a

$$m_1\{\zeta_d\} \sim \frac{\pi}{4\vartheta_0'}, \quad m_1\{\zeta_{in}\} \sim \frac{\pi\vartheta_0'}{\omega_*^2}. \qquad (10.133)$$

Comme $Ie\,(k,\ \infty) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ on peut obtenir à partir de (10.129) la formule asymptotique pour un signal intense ($s \gg 1$). Dans ce cas le premier terme entre accolades de (10.129) est petit par rapport au second ($e^{s^2/2v_0}$). Si de plus on se limite au domaine $\vartheta_0' \ll \omega_*$ (intéressant dans le cas d'un signal intense), on obtient à partir de (10.129)

$$\lambda_1(\vartheta_0') \sim \frac{\omega_*}{2\pi\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{s^2\vartheta_0'^2}{2\omega_*^2}}, \qquad (10.134)$$

ce qui correspond à tendance de la dérivée de la phase vers la loi normale pour un grand rapport signal/bruit [voir (8.121)].

10.6.3. Densité de probabilité de la durée des dépassements (première approximation). Pour calculer la première approximation

de la densité de probabilité de la durée des dépassements de la phase d'un processus, somme d'un signal harmonique et d'un processus aléatoire normal stationnaire dérivable en moyenne quadratique, il faut connaître la distribution conjointe de la phase et de sa dérivée à deux instants de temps. On peut obtenir la fonction cherchée à partir de (10.115) en intégrant sur r_1 et r_2 de zéro à l'infini et sur r_1' et r_2' de $-\infty$ à $+\infty$. Nous allons nous limiter à la première approximation de la distribution de la durée des dépassements positifs de la phase (c'est-à-dire des dépassements du niveau nul). Dans ce cas il faut calculer W_4 $(0, 0, \vartheta_1', \vartheta_2')$, et on peut alors intégrer sur r_1' et r_2'. On trouve

$$W_4(0, 0, \vartheta_1', \vartheta_2') = \frac{1}{\pi^3\omega_*^2 \sqrt{D_{22}^2 - D_{24}^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2(1+R_0)}} \times$$
$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty x^2y^2 \exp\left\{-\frac{1}{\omega_*^2 D}[D_{22}x^2\vartheta_1'^2 + 2D_{24}xy\vartheta_1'\vartheta_2' + \right.$$
$$+ D_{22}y^2\vartheta_2'^2] + \frac{1}{1-R_0^2}[x^2 + y^2 - 2R_0xy - 2(1-R_0)ux +$$
$$\left. + 2(1-R_0)uy]\right\} dx\, dy. \qquad (10.135)$$

En portant (10.135) et (10.121) dans (10.31) pour $\vartheta_0 = 0$ et en intégrant sur ϑ_1' et ϑ_2', on obtient l'expression suivante pour la première approximation de la distribution de la durée des dépassements de la phase du processus considéré au-dessus du niveau nul:

$$q_{1\varphi}(\tau, 0) = \frac{D_{24}}{2\pi\omega_* (1-R_0)^{3/2}} \left[\pi - \arccos \frac{D_{24}}{D_{22}} \frac{\sqrt{D_{22}^2 - D_{24}^2}}{D_{24}}\right] \times$$
$$\times \frac{K\left(R_0, \frac{u}{\sigma}\right) + 2F\left(\frac{u}{\sigma}\right) - 1}{F\left(\frac{u}{\sigma}\right)}, \qquad (10.136)$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace; $K(r, h)$ est donné par (10.87′). En comparant avec (10.89) l'expression obtenue on trouve

$$q_{1\varphi}(\tau, 0) = q_{1A}(\tau, 0) \frac{K\left(R_0, \frac{u}{\sigma}\right) + 2F\left(\frac{u}{\sigma}\right) - 1}{F\left(\frac{u}{\sigma}\right)}. \qquad (10.136')$$

Pour $\tau \to \infty$ on a en vertu de (10.89′)

$$q_{1A}(\tau, 0) \to \frac{\omega_*}{2\pi}, K\left(0, \frac{u}{\sigma}\right) = \left[1 - F\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right]^2$$

[voir (12) dans le problème 2.8].

Par conséquent [comparer avec (10.121) pour $\vartheta_0 = 0$]

$$\lim_{\tau\to\infty} q_{1\varphi}(\tau,\ 0)=\frac{\omega_*}{2\pi}F\left(\frac{u}{\sigma}\right),$$

ce qui se trouve en accord avec le résultat général (10.37').

Comme

$$K(r,\ 0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\arccos r$$

[voir (11) dans le problème 2.8], on a en l'absence de signal ($u = 0$)

$$\begin{gathered} q_{1\varphi}(\tau,\ 0)=q_{1A}(\tau,\ 0)\frac{\pi-\arccos R_0}{2\pi}, \\ 0\leqslant\arccos R_0\leqslant\pi. \end{gathered} \qquad (10.137)$$

Pour un signal intense $u \gg \sigma$ [supposant que $K\left(R_0,\ \frac{u}{\sigma}\right) \sim$ $\sim 2 - 2F\left(\frac{u}{\sigma}\right) \sim 0,\ F\left(\frac{u}{\sigma}\right) \sim 1$] on a

$$q_{1\varphi}(\tau,\ 0) \sim q_{1A}(\tau,\ 0),$$

c'est-à-dire que la densité de probabilité (en première approximation) de la durée des dépassements de la phase coïncide avec celle de la durée des dépassements de la composante en quadrature audessus du niveau nul.

Problèmes

10.1. Soit $\eta(t)$ la somme de deux processus aléatoires normaux stationnaires, dérivables en moyenne quadratique: d'un bruit à large bande, de moyenne nulle, de variance σ_ξ^2 et de coefficient de corrélation $R_\xi(\tau)$ et d'un signal à bande étroite, de moyenne nulle, de variance σ_s^2 et de coefficient de corrélation $R_s(\tau)\cos\omega_0(\tau)$. Montrer que le nombre moyen d'intersections par unité de temps du niveau $x = x_0$ avec une dérivée de signe donné (nombre moyen de dépassements) du processus $\eta(t)$ est égal à

$$\lambda_1(x_0)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sigma_s^2[\omega_0^2-R_s''(0)]-\sigma_\xi^2R_\xi''(0)}{\sigma_\xi^2+\sigma_s^2}\right\}^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x_0^2}{2(\sigma_\xi^2+\sigma_s^2)}} \qquad (1)$$

ou (étant donné que pour un signal à bande étroite on a $-R_s''(0) \ll \omega_0^2$)

$$\lambda_1(x_0)=\left[\frac{\varkappa^2-\frac{R_\xi''(0)}{\omega_0^2}}{\varkappa^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\omega_0}{2\pi}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_\xi^2(1+\varkappa^2)}}, \qquad (2)$$

$$\varkappa^2=\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_\xi}\right)^2.$$

Si le bruit est également à bande étroite, avec un spectre énergétique concentré au voisinage de Ω_0, on obtient l'expression approchée suivante

$$\lambda_1(x_0) \approx \frac{\omega_0}{2\pi}\left(\frac{\varkappa^2+\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}}{\varkappa^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_\xi^2(1+\varkappa^2)}}. \qquad (3)$$

10.2. Etudier le cas particulier de (10.67) pour $S(t) = c_0 + c_1 t$ et montrer que dans ce cas on a la formule suivante

$$\lambda_1(x_0, t, T) = \frac{\sigma\omega_1}{Tc_1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c_1^2}{2\omega_1^2\sigma^2}} + \frac{c_1}{\sigma\omega_1} F\left(\frac{c_1}{\sigma\omega_1}\right)\right] \times$$
$$\times \left\{F\left[\frac{c_0+c_1(t+T)-x_0}{\sigma}\right] - F\left(\frac{c_0+c_1 t-x_0}{\sigma}\right)\right\}. \qquad (4)$$

10.3. En utilisant la distribution conjointe d'une oscillation harmonique de phase aléatoire et de sa dérivée aux mêmes instants, soit

$$W_2(x, y, t) = \frac{1}{\pi a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,\delta\left(y-\omega_0\sqrt{a^2-x^2}\right), \qquad (5)$$

(où a et ω_0 sont respectivement l'amplitude et la pulsation constantes), montrer que le nombre moyen d'intersections par unité de temps d'une oscillation d'un niveau donné x_0 (avec une dérivée de signe arbitraire) est égal à $\frac{\omega_0}{\pi}$, et la durée moyenne des dépassements de ce niveau est égale à

$$\frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{x_0}{a}\right), \qquad |x_0| \leqslant a.$$

10.4. En utilisant (10.88), ainsi que la formule (13) du problème 2.6 et le développement en série de Taylor du coefficient de corrélation $R(\tau)$, montrer que pour des valeurs petites de τ la première approximation $q_1(\tau, x)$ de la densité de probabilité de la durée des dépassements d'un processus aléatoire normal stationnaire du niveau x_0 est

$$q_1(\tau, x_0) \approx \frac{\tau\omega_2^4}{4\omega_1^2} e^{-\frac{x_0^2\tau^2\omega_1^2}{8\sigma^2}} J\left(\frac{x_0}{\sigma}\right), \qquad (6)$$

où

$$J\left(\frac{x_0}{\sigma}\right) = (h^2+1)\,F(h) + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}},$$
$$h = \frac{x_0\omega_1^2}{\sigma\omega_2^2}.$$

A partir de (6) obtenir les cas particuliers suivants:

pour x_0/σ donné et $\tau \to 0$

$$q_1(\tau, x_0) \approx \frac{\tau\omega_2^4}{4\omega_1^2} J\left(\frac{x_0}{\sigma}\right), \qquad (7)$$

pour $x_0/\sigma \to \infty$, $\tau \to 0$ et $\frac{\tau x_0}{\sigma} = \text{const}$

$$q_1(\tau, x_0) \approx \frac{\tau\omega_1^2}{4}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)^2 \exp\left[-\frac{x_0^2\tau^2\omega_1^2}{8\sigma^2}\right]. \qquad (8)$$

10.5. En conservant les notations du § 10.4.3 montrer que la variance du nombre de zéros d'un processus aléatoire normal stationnaire par unité de temps est égale à

$$\mu_1(x_0, T)=\frac{2}{T\pi^2}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\frac{D_{24}}{(1-R^2)^{3/2}}\times$$
$$\times\left(\pi-\arccos\frac{D_{24}}{D_{22}}+\frac{\sqrt{D_{22}^2-D_{24}^2}}{D_{22}}\right)d\tau+\frac{\omega_1}{\pi T}-\frac{\omega_1^2}{\pi^2}. \qquad (9)$$

10.6. Montrer que le nombre moyen d'intersections du niveau y_0 avec une dérivée positive par unité de temps par la dérivée d'un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle est égal à

$$\lambda_1(y_0)=\mu_{\max}e^{-\frac{y_0^2}{2\sigma^2\omega_1^2}}, \qquad (10)$$

où $\mu_{\max}$ est le nombre moyen de maxima de grandeur quelconque par unité de temps pour le processus initial [voir (10.98)]. Notons que $\lambda_1(0)=\mu_{\max}$.

10.7. En utilisant (10.114) montrer que pour $\frac{r_0}{\sigma}\to\infty$, $\tau\to 0$, et $\frac{\tau r_0}{\sigma}=$ $=$ const la première approximation pour la densité de probabilité de la durée des dépassements du niveau r_0 par l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite (de spectre énergétique symétrique) est [comparer avec (8) du problème 10.4]

$$q_1(\tau, r_0)\approx\frac{\tau\omega_*^2}{4}\left(\frac{r_0}{\sigma}\right)^2\exp\left[-\frac{r_0^2\tau^2\omega_*^2}{2\sigma^2}\right]. \qquad (11)$$

10.8. En utilisant (10.39) et (10.41) démontrer les formules suivantes donnant l'une le nombre moyen de maxima $\mu_{\max}$ de grandeur quelconque par unité de temps et l'autre la densité de probabilité $W_{1m}(r)$ des maxima de l'enveloppe d'un processus aléatoire normal stationnaire à bande étroite, de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau)=R_0(\tau)\cos\omega_0\tau$:

$$\mu_{\max}=\frac{\omega_*}{\sqrt{\pi}}\frac{(k^2-1)^2}{(2k)^{5/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{2n+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+7}{4}\right)}\frac{A_n}{k^n}, \qquad (12)$$

où

$$\omega_*^2=-R_0''(0);\ k^2=\frac{R_0^{4}(0)}{\omega_*^4};$$

$$A_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{(n-m+1)(3-k^2)^m}{m!\,2^m}, \qquad n>0,$$

$$A_0=1;$$

$$W_{1m}(r)=\frac{\omega_*(k^2-1)^{\frac{3}{2}}}{4\sigma\mu_{\max}}z^{3/2}e^{-k^2z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_nz^n}{\Gamma\left(\frac{2n+7}{4}\right)}, \qquad (13)$$

où

$$z=\frac{r\omega_*^2}{\sigma\omega_{**}^2\sqrt{2}}.$$

10.9. La loi du χ^2 donnée par la formule

$$\chi(t)=\Big[\sum_{k=1}^{n}A_k^2(t)\Big]^{1/2}, \tag{14}$$

où $A_k(t)$ sont des processus normaux stationnaires (à bande étroite) de moyennes nulles, ayant même fonction de corrélation, indépendants aux mêmes instants, est la généralisation de l'enveloppe (d'un processus aléatoire normal stationnaire, à bande étroite, dérivable en moyenne quadratique). Montrer que la distribution conjointe d'un processus distribué suivant la loi du χ^2 et de sa dérivée aux mêmes instants est de la forme:

$$W_2(z, z', t) = W_1(z, t)\, W_1(z', t), \tag{15}$$

où

$$W_1(z, t)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{z}{\sigma\sqrt{2}}\right)^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \quad z\geqslant 0, \tag{16}$$

$$W_1(z', t)=\frac{1}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z'^2}{2\omega_*^2\sigma^2}}. \tag{17}$$

Utilisant (15) obtenir la formule donnant le nombre moyen de dépassements par unité de temps d'un processus distribué suivant la loi du χ^2 du niveau r_0 [comparer avec (10.102)]:

$$\lambda_1(r_0)=\frac{\sigma\omega_*}{\sqrt{2\pi}}\, W_1(r_0), \tag{18}$$

où la densité $W_1(r_0)$ est donnée par (16).

10.10. Montrer que la première approximation de la densité de probabilité de la durée des dépassements du niveau $\vartheta_0 = \pi$ de la phase d'un processus représentant la somme d'un signal harmonique $u \cos \omega_0 t$ et d'un bruit normal stationnaire à bande étroite de moyenne nulle, de variance σ^2 et de coefficient de corrélation $R(\tau) = R_0(\tau) \cos \omega_0\tau$ est

$$q_{1\varphi}(\tau, \pi)=q_{1A}(\tau, 0)\,\frac{K\left(R_0, \frac{u}{\sigma}\right)}{1-F\left(\frac{u}{\sigma}\right)}, \tag{19}$$

où $F(x)$ est l'intégrale de Laplace et $K(r, h)$ une fonction donnée par (10.87) [comparer (19) et (10.136')].

Chapitre 11

PROCESSUS ALÉATOIRES IMPULSIONNELS

11.1. SPECTRES ÉNERGÉTIQUES DES PROCESSUS ALÉATOIRES IMPULSIONNELS (THÉORIE GÉNÉRALE)

11.1.1. Définitions, limitations et formules générales. De nombreux problèmes de la technique d'impulsions qui a pris un grand essort ces dernières années conduisent à l'étude des spectres de suites d'impulsions identiques. Les paramètres essentiels caractérisant la forme géométrique et la position de ces impulsions (amplitude, durée, début, etc.) peuvent varier suivant une certaine loi ou être des fonctions aléatoires du temps. Ce dernier cas se produit lorsque les impulsions sont déformées par des bruits aléatoires ou lorsque la modulation de la suite d'impulsions peut être considérée comme un processus aléatoire.

Nous appellerons *processus aléatoire impulsionnel* une suite d'impulsions dont les paramètres sont des grandeurs aléatoires.

Si la forme des impulsions est donnée et leurs paramètres sont aléatoires, à la suite des impulsions correspond une suite de grandeurs aléatoires multidimensionnelles, et plus précisément, on peut faire correspondre au début de chaque impulsion des valeurs aléatoires de ses paramètres.

Un processus aléatoire impulsionnel est donné par une infinité de réalisations, chacune d'elles étant une suite d'impulsions. Prenons une de ces suites (par exemple, la k-ième) et considérons $2N+1$ impulsions disposées de part et d'autre de l'impulsion nulle, liée à l'origine du temps.

Désignons par $Z_N^{(k)}(\omega)$ la densité spectrale (transformée de Fourier) de la fonction décrivant cette suite d'impulsions, et supposons que la distance entre les impulsions extrêmes soit égale à $(2N+1)\,T$. Le spectre énergétique du processus impulsionnel est donné par la relation suivante *) [voir (4.105)]

$$F(\omega)=\lim_{N\to\infty}\frac{2}{(2N+1)\,T}\,m_1\{\,|\,Z_N^{(k)}(\omega)\,|^2\}. \tag{11.1}$$

*) En général, la grandeur T (dans 11.1) pour un processus aléatoire impulsionnel est une grandeur aléatoire. Cependant on peut la considérer comme constante, égale à la valeur moyenne de la durée des intervalles de temps entre les débuts des impulsions successives. Soit σ_T^2 la variance des intervalles séparant les impulsions, et supposons que sur un intervalle de temps suffisamment

On peut obtenir ce même spectre énergétique par transformation de Fourier de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire impulsionnel dont on a pris la moyenne sur le temps. Cependant dans l'exposé ultérieur pour le calcul du spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel on utilise la formule (11.1), et on trouve la fonction de corrélation moyenne de ce processus par la transformation de Fourier du spectre énergétique $F(\omega)$ [voir (4.106)].

Considérons la réalisation $\xi^{(k)}(t)$ d'un processus aléatoire impulsionnel, dont les impulsions ont une forme donnée, tandis que

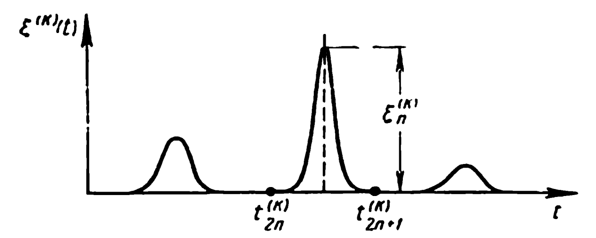


Fig. 11.1 Processus aléatoire impulsionnel

l'instant de leur apparition, la durée et l'amplitude sont aléatoires (fig. 11.1). Les instants $t_q^{(k)}$ pour q pair correspondent au début des impulsions et pour q impair à leur fin.

Nous attribuons à chaque impulsion d'une réalisation un numéro, nombre (positif ou négatif) égal à la moitié du nombre se trouvant dans l'indice de t_{2r} correspondant au début de l'impulsion. La suite des instants correspondant aux débuts des impulsions est *ordonnée*, c'est-à-dire que l'on a $t_{2(n+1)} > t_{2n}$. Pour les instants d'indices impairs ce n'est pas toujours vrai, car il peut se faire que l'on ait $t_{2l+1} < t_{2r+1}$ pour $l > r$, ce qui signifiera que la r-ième impulsion recouvrira toutes les impulsions ultérieures dont le numéro est au moins inférieur à l.

Désignons par $\zeta_n^{(k)}(t - t_{2n}^{(k)}, t_{2n+1}^{(k)})$ la fonction décrivant dans le temps la n-ième impulsion de la k-ième réalisation. Cette fonction doit être identiquement nulle à l'extérieur de l'intervalle $(t_{2n}^{(k)}, t_{2n+1}^{(k)})$. Supposons que la forme de l'impulsion soit donnée par une fonction déterministe du temps $u(t)$, identiquement nulle à l'extérieur de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. Les impulsions d'une réalisation quelconque du processus aléatoire considéré peuvent être

grand T_N dans une des réalisations du processus aléatoire impulsionnel il y ait $2N + 1$ impulsions. On a alors

$$T_N = (2N+1)\,T + k\sigma_T \sqrt{2N+1} = (2N+1)\,T\left(1 + \frac{k\sigma_T}{\sqrt{2N+1}}\right)$$

tendant asymptotiquement vers

$$T_N \sim (2N+1)\,T.$$

obtenues à partir de u (t) en multipliant ses valeurs par la grandeur $\xi_n^{(k)}$, en déplaçant le résultat de $t_{2n}^{(k)}$ suivant l'axe du temps et en le divisant par $\tau_n^{(k)} = t_{2n+1}^{(k)} - t_{2n}^{(k)}$. Ainsi

$$\zeta_n^{(k)}(t - t_{2n}^{(k)},\ t_{2n+1}^{(k)}) = \xi_n^{(k)} u\left(\frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\tau_n^{(k)}}\right).$$

La suite des $2N + 1$ impulsions de la k-ième réalisation du processus peut s'écrire sous la forme de la somme suivante:

$$\sum_{n=-N}^{N} \xi_n^{(k)} u\left(\frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\tau_n^{(k)}}\right).$$

Désignons par g (ω) la densité spectrale (transformée de Fourier) de la fonction u (t):

$$g(\omega) = \int_0^1 u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

La densité spectrale pour $\zeta_n^{(k)}(t - t_{2n}^{(k)},\ t_{2n+1}^{(k)})$ est alors égale à

$$F_n^{(k)}(\omega;\ t_{2n}^{(k)},\ \tau_n^{(k)}) = \xi_n^{(k)} \int_{t_{2n}^{(k)}}^{t_{2n+1}^{(k)}} u\left(\frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\tau_n^{(k)}}\right) e^{i-\omega t} dt =$$

$$= \xi_n^{(k)} \tau_n^{(k)} \int_0^1 u(x)\, e^{-i\omega\,[\tau_n^{(k)} x + t_{2n}^{(k)}]}\, dx$$

ou

$$F_n^{(k)}(\omega;\ t_{2n}^{(k)},\ \tau_n^{(k)}) = \xi_n^{(k)} \tau_n^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)})\, e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}}. \qquad (11.2)$$

Ecrivons la densité spectrale $Z_N^{(k)}(\omega)$ (transformée de Fourier) de la suite de $2N + 1$ impulsions de la k-ième réalisation du processus. Compte tenu de (11.2) on trouve

$$Z_N^{(k)}(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} \xi_n^{(k)} \tau_n^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)})\, e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}}. \qquad (11.3)$$

Pour calculer le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel portons (11.3) dans la formule générale (11.1). Il vient:

$$F(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{(2N+1)T} \times$$

$$\times\, m_1 \left\{ \left| \sum_{n=-N}^{N} \xi_n^{(k)} \tau_n^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)})\, e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}} \right|^2 \right\}. \qquad (11.4)$$

La grandeur T est ici égale à la valeur moyenne de la durée des intervalles de temps séparant les impulsions successives (voir la note de la page 470). En mettant en facteur dans (11.4) la grandeur constante, on obtient:

$$F(\omega)=\frac{2}{T}\lim_{N\to\infty}\frac{2}{2N+1}\times$$
$$\times m_1\left\{\left|\sum_{n=-N}^{N}\xi_n^{(k)}\tau_n^{(k)}g(\omega\tau_n^{(k)})\,e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}}\right|^2\right\}. \qquad (11.5)$$

On voit de (11.5) que pour déterminer $F(\omega)$ il faut d'abord trouver la moyenne de $|Z_N^{(k)}(\omega)|^2$ sur l'ensemble de réalisations (c'est-à-dire sur l'indice k). Comme

$$|Z_N^{(k)}(\omega)|^2=Z_N^{(k)}(\omega)\,\overline{Z_N^{(k)}(\omega)},$$

on a

$$|Z_N^{(k)}(\omega)|^2=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{j=-N}^{N}\xi_n^{(k)}\xi_j^{(k)}\tau_n^{(k)}\tau_j^{(k)}\times$$
$$\times g(\omega\tau_n^{(k)})\,\overline{g(\omega\tau_j^{(k)})}\,e^{-i\omega[t_{2n}^{(k)}-t_{2j}^{(k)}]}, \qquad (11.6)$$

où le trait au-dessus de g indique qu'il s'agit de la grandeur imaginaire conjuguée. En prenant dans la somme double les termes correspondant à $n=j$ et ayant en vue que la moyenne de la somme est toujours égale à la somme des moyennes des composantes, on trouve

$$m_1\{|Z_N^{(k)}(\omega)|^2\}=\sum_{n=-N}^{N}m_1\{[\xi_n^{(k)}\tau_n^{(k)}]^2|g(\omega\tau_n^{(k)})|^2\}+$$
$$+\sum_{n=-N}^{N}\sum_{\substack{j=-N\\ n\neq j}}^{N}m_1\{\xi_n^{(k)}\xi_j^{(k)}\tau_n^{(k)}\tau_j^{(k)}\times$$
$$\times g(\omega\tau_n^{(k)})\,\overline{g(\omega\tau_j^{(k)})}\,e^{-i\omega\left[t_{2n}^{(k)}-t_{2j}^{(k)}\right]}\}. \qquad (11.7)$$

Nous nous limitons aux processus impulsionnels, dont les caractéristiques probabilistes des impulsions ne dépendent pas de leurs numéros d'ordre, et les caractéristiques probabilistes de l'ensemble des impulsions dépendent seulement de la position relative des impulsions. Sous cette réserve la grandeur

$$K(\omega)=m_1\{[\xi_n^{(k)}\tau_n^{(k)}]^2\,|g(\omega\tau_n^{(k)})|^2\} \qquad (11.8)$$

ne dépend pas du numéro n de l'impulsion, quant à la grandeur

$$h_{n-j}(\omega)=m_1\{\xi_n^{(k)}\xi_j^{(k)}\tau_n^{(k)}\tau_j^{(k)}\times$$
$$\times g(\omega\tau_n^{(k)})\,\overline{g(\omega\tau_j^{(k)})}\,e^{-i\omega[t_{2n}^{(k)}-t_{2j}^{(k)}]}\}, \qquad (11.9)$$

elle dépend seulement de la différence $n - j$ des numéros des deux impulsions.

On a alors

$$\sum_{n=-N}^{N} m_1\{[\xi_n^{(k)}\tau_n^{(k)}]^2\,|g(\omega\tau_n^{(k)})|^2\} = (2N+1)\,K(\omega), \qquad (11.10)$$

et la somme double peut s'écrire, après transformations simples, sous la forme suivante:

$$\sum_{n=-N}^{N}\sum_{j=-N}^{N} m_1\{\xi_n^{(k)}\xi_j^{(k)}\tau_n^{(k)}\tau_j^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)})\times$$
$$\times\,\overline{g(\omega\tau_j^{(k)})}\,e^{-i\omega[t_{2n}^{(k)}-t_{2j}^{(k)}]}\} =$$
$$= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N} h_{n-j}(\omega) = \sum_{p=1}^{2N}(2N+1-p)\,[h_p(\omega)+h_p(-\omega)]. \qquad (11.11)$$

En portant (11.10) et (11.11) dans (11.7) et compte tenu de (11.5), on obtient la formule générale du spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel:

$$F(\omega) = \frac{2}{T}\left\{K(\omega) + \lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)[h_p(\omega)+h_p(-\omega)]\right\}. \qquad (11.12)$$

Si $\sum_{p=1}^{\infty} h_p(\omega)$ est convergente, on a

$$F(\omega) = \frac{2}{T}\left\{K(\omega) + \sum_{p=1}^{\infty}[h_p(\omega)+h_p(-\omega)]\right\} \qquad (11.13)$$

ou encore

$$F(\omega) = \frac{2}{T}\left\{K(\omega) + 2\sum_{p=1}^{\infty}\operatorname{Re} h_p(\omega)\right\}. \qquad (11.13')$$

Parfois la limite dans (11.12) peut exister même si $\sum_{p=1}^{\infty} h_p(\omega)$ est divergente.

La formule (11.12) donne l'expression la plus générale du spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel, compte tenu de la corrélation mutuelle de ses paramètres aléatoires tels que l'amplitude, la durée et l'instant d'apparition des impulsions.

Supposons que les paramètres aléatoires mentionnés soient mutuellement indépendants, mais qu'il existe une corrélation entre les paramètres correspondants d'impulsions différentes. Introduisons maintenant les caractéristiques probabilistes des paramètres d'un processus aléatoire impulsionnel. Soient a^2 la moyenne et σ^2 la

variance des amplitudes aléatoires; R_p le coefficient de corrélation des amplitudes des impulsions n-ième et j-ième $(n - j = p)$; $w_{1\tau}(x)$, $w_{2\tau}(x, y; p)$ les densités de probabilité uni- et bidimensionnelle de la durée des impulsions; τ_0, σ_τ^2 la durée moyenne et la variance de la durée des impulsions et $R_{\tau,p}$ le coefficient de corrélation de la durée des impulsions n-ième et j-ième. En vertu de (11.8) et (11.9) on a

$$K(\omega) = (a^2 + \sigma^2) K_0(\omega), \tag{11.14}$$

où

$$K_0(\omega) = \int_0^\infty x^2 \, | g(\omega x) |^2 \, w_{1\tau}(x) \, dx; \tag{11.15}$$

$$h_p(\omega) = (\sigma^2 R_p + a^2) K_p(\omega) H_p(\omega); \tag{11.16}$$

$$K_p(\omega) = \int_0^\infty \int_0^\infty xyg(\omega x) \overline{g(\omega y)} \, w_{2\tau}(x, y; p) \, dx \, dy; \tag{11.17}$$

$$H_p(\omega) = m_1 \{ e^{-i\omega [t_{2n}^{(k)} - t_{2j}^{(k)}]} \}, \quad p = n - j. \tag{11.18}$$

On peut maintenant trouver à partir de (11.13) l'expression générale du spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel, soit:

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left\{ (a^2 + \sigma^2) K_0(\omega) + \lim_{N \to \infty} 2 \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1} \right) \times \right.$$
$$\left. \times (\sigma^2 R_p + a^2) \operatorname{Re} [K_p(\omega) H_p(\omega)] \right\}. \tag{11.19}$$

Dans la formule (11.19) la fonction $H_p(\omega)$ dépend seulement de la distribution conjointe des instants d'apparition des impulsions, et la fonction $K_p(\omega)$ seulement de la densité de probabilité bidimensionnelle de la durée des impulsions. Cette formule montre également que le spectre énergétique du processus aléatoire impulsionnel dépend seulement de la fonction de corrélation $B(t) = a^2 + \sigma^2 R(t)$ des amplitudes aléatoires et ne dépend pas de la forme de la fonction de distribution de ces amplitudes. Notons également que

$$K_0(\omega) = \lim_{p \to 0} K_p(\omega) = \lim_{p \to 0} \frac{h_p(\omega)}{a^2 + \sigma^2}.$$

Les formules obtenues peuvent facilement être appliquées au cas particulier où la suite se compose des impulsions dont l'amplitude et les instants d'apparition sont aléatoires et les durées sont illimitées. La formule (11.13) reste sans changement, mais les

fonctions $K(\omega)$ et $h_p(\omega)$ prennent la forme suivante:

$$K(\omega) = m_1 \{[\xi_n^{(k)}]^2\} \mid g(\omega) \mid^2, \tag{11.20}$$

$$h_p(\omega) = m_1 \{\xi_n^{(k)} \xi_j^{(k)} e^{-i\omega [t_{2n}^{(k)} - t_{2j}^{(k)}]}\} \mid g(\omega) \mid^2, \tag{11.21}$$

$$p = n - j,$$

$$g(\omega) = \int_0^\infty u(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{11.22}$$

et la formule (11.19) se simplifie, on a

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \mid g(\omega) \mid^2 \Big[a^2 + \sigma^2 + \\ + \lim_{N\to\infty} 2 \sum_{p=1}^{2N} \Big(1 - \frac{p}{2N+1}\Big) (\sigma^2 R_p + a^2) \operatorname{Re} H_p(\omega) \Big]. \tag{11.23}$$

Jusqu'à présent nous n'avons introduit d'une façon explicite que les caractéristiques des amplitudes et des durées des impulsions. Suivant les caractéristiques probabilistes des instants d'apparition des impulsions, les processus impulsionnels considérés peuvent être divisés en deux groupes.

Dans l'un de ces groupes figurent les processus aléatoires dont les impulsions de paramètres aléatoires apparaissent sur des intervalles de temps déterministes. Ces processus aléatoires peuvent ne pas être stationnaires. En effet les valeurs d'un processus aléatoire impulsionnel lors du passage de l'impulsion et pendant la pause sont indépendantes. Les valeurs d'un processus aléatoire impulsionnel peuvent devenir statistiquement indépendantes si l'on considère deux instants correspondants au passage d'un couple arbitraire d'impulsions. Enfin, la valeur d'un processus aléatoire est déterminée d'une manière univoque pour les pauses séparant les impulsions. Ainsi, le coefficient de corrélation d'un processus aléatoire impulsionnel, considéré pour deux instants séparés par un intervalle de durée donnée, peut prendre n'importe quelle valeur de zéro à l'unité.

La valeur moyenne d'un processus aléatoire impulsionnel dépend également du temps. Dans les pauses séparant les impulsions elle est nulle, alors qu'aux instants correspondant au passage des impulsions, la valeur moyenne peut différer de zéro et varier suivant les impulsions. Les processus aléatoires de ce premier groupe peuvent être représentés sous la forme d'une porteuse qui est d'une suite périodique d'impulsions dont les paramètres sont modulés par une fonction aléatoire stationnaire à temps discret. En d'autres termes, ces processus aléatoires impulsionnels sont la superposition d'une

suite aléatoire stationnaire de paramètres des impulsions sur une suite *déterministe* d'intervalles de cadence *).

Dans un autre groupe on classe les processus aléatoires impulsionnels n'ayant aucun intervalle de cadence. A la différence des processus du premier groupe, pour lesquels la différence entre les débuts de deux impulsions successives ne peut être supérieure au double de l'intervalle de cadence, pour les processus du second groupe cette différence peut être arbitraire. On peut dire que le déplacement d'une impulsion quelconque provoque le déplacement de toutes les impulsions suivantes. Ceci signifie qu'il n'y a aucune périodicité dans de tels processus. Avec certaines limitations supplémentaires imposées à la distribution des probabilités des intervalles entre les instants d'apparition des impulsions, ces processus aléatoires impulsionnels sont stationnaires. Dans ce groupe de processus aléatoires impulsionnels, on trouve les signaux aléatoires télégraphiques, les signaux écrêtés obtenus à partir d'un signal continu par limitation. les suites d'impulsions normalisées formées à partir des signaux écrêtés, etc.

Voyons quelle forme prend l'expression générale (11.19) du spectre énergétique pour les groupes mentionnés de processus aléatoires impulsionnels. On comprend facilement que ces deux groupes de processus diffèrent par la fonction $H_p(\omega)$.

11.1.2. Processus aléatoires impulsionnels à intervalles de cadence déterministes. Pour les processus aléatoires impulsionnels à intervalle de cadence déterministe l'instant $t_{2n}^{(k)}$ d'apparition de la n-ième impulsion de la réalisation du processus peut s'écrire de la manière suivante:

$$t_{2n}^{(k)} = nT + \nu_n^{(k)}, \tag{11.24}$$

où T est la longueur de l'intervalle de cadence et ν_n une variable aléatoire de moyenne nulle.

Comme dans le cas qui nous intéresse une seule impulsion apparaît dans un intervalle de cadence, ν_n est inférieure en valeur absolue à $\frac{T}{2}$. Supposons que l'on connaisse les fonctions caractéristiques $\theta_{1\nu}(\omega)$ et $\theta_{2\nu}(\omega_1, \omega_2, pT)$ des variables aléatoires ν_n.

Pour le groupe considéré de processus aléatoires la fonction $H_p(\omega)$ donnée par la formule (11.18) est

$$H_p(\omega) = e^{-i\omega pT}\, m_1\{e^{-i\omega[\nu_n^{(k)} - \nu_j^{(k)}]}\}.$$
$$p = n - j$$

ou encore

$$H_p(\omega) = \theta_{2\nu}(\omega, -\omega, pT)\, e^{-i\omega pT}. \tag{11.25}$$

*) Dans les termes de l'ouvrage [4] un tel processus aléatoire impulsionnel est dit *sans accumulation*. tandis qu'un processus non rythmé est dit *avec accumulation*.

Dans le cas où les paramètres homonymes des différentes impulsions sont mutuellement indépendants on a

$$R_p = 0, \quad H_p(\omega) = |\theta_{1\nu}(\omega)|^2 e^{-i\omega pT},$$

$$K_p(\omega) = \left| \int_0^\infty xg(\omega x)\, w_{1\tau}(x)\, dx \right|^2 = K_\infty(\omega). \qquad (11.26)$$

Introduisons la notation

$$\psi(\omega) = \lim_{N\to\infty} 2 \sum_{p=1}^{2N} \Big(1 - \frac{p}{2N+1}\Big) \{\sigma^2 R_p \operatorname{Re}[K_p(\omega) \times \theta_{2\nu}(\omega, -\omega, pT)\, e^{-i\omega pT}] + a^2 \operatorname{Re}([K_p(\omega)\,\theta_{2\nu} \times (\omega, -\omega, pT) - K_\infty(\omega)\,|\theta_{1\nu}(\omega)|^2]\, e^{-i\omega pT})\}. \qquad (11.27)$$

Il est facile de voir que si les impulsions sont mutuellement indépendantes il vient en vertu de (11.26) et (11.27) que $\psi(\omega) = 0$.

En utilisant (11.19) et (11.27) on peut écrire l'expression générale pour le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel d'intervalle de cadence déterministe, soit:

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \Big\{ (a^2 + \sigma^2) K_0(\omega) - a^2 |\theta_{1\nu}(\omega)|^2 K_\infty(\omega) + \psi(\omega) + a^2 |\theta_{1\nu}(\omega)|^2 K_\infty(\omega) \times \lim_{N\to\infty} \Big[1 + 2 \sum_{p=1}^{2N} \Big(1 - \frac{p}{2N+1}\Big) \cos p\omega T \Big] \Big\}. \qquad (11.28)$$

Remarquant que

$$\Lambda_N(\omega) = 1 + 2 \sum_{p=1}^{2N} \Big(1 - \frac{p}{2N+1}\Big) \cos p\omega T = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} e^{-i(n-j)\omega T} = \frac{1}{2N+1} \left\{ \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega T}{2}\right]}{\sin\frac{\omega T}{2}} \right\}^2, \qquad (11.29)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \left\{ \frac{\sin\left[(2N+1)\frac{\omega T}{2}\right]}{\sin\frac{\omega T}{2}} \right\}^2 = \begin{cases} 0, & \omega T \neq 2\pi r \\ \infty, & \omega T = 2\pi r, \end{cases} \qquad (11.30)$$

($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), on trouve

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_N(\omega) = c\delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right), \tag{11.30'}$$

où r est un nombre entier quelconque (y compris zéro).

Pour le calcul de la constante inconnue c prenons l'intégrale des deux membres de la dernière égalité de $\frac{2\pi}{T}\left(r-\frac{1}{2}\right)$ à $\frac{2\pi}{T}\left(r+\frac{1}{2}\right)$. On a alors

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{T}\left(r-\frac{1}{2}\right)}^{\frac{2\pi}{T}\left(r+\frac{1}{2}\right)} c\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right) d\omega = c =$$

$$= \int\limits_{\frac{2\pi}{T}\left(r-\frac{1}{2}\right)}^{\frac{2\pi}{T}\left(r+\frac{1}{2}\right)} \left[1+2\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\cos p\omega T\right] d\omega =$$

$$= \frac{2\pi}{T} + 4\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\frac{\cos rp\pi \sin p\pi}{pT} = \frac{2\pi}{T}.$$

Définitivement

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_N(\omega) = \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right). \tag{11.31}$$

En portant (11.31) dans (11.28) on obtient l'expression générale suivante pour le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel d'intervalle de cadence déterministe:

$$F(\omega) = \frac{2}{T}\left\{(a^2+\sigma^2)K_0(\omega) - a^2|\theta_{1v}(\omega)|^2 K_\infty(\omega) + \right.$$
$$\left. + \psi(\omega) + a^2|\theta_{1v}(\omega)|^2 K_\infty(\omega)\frac{2\pi}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \tag{11.32}$$

Si les impulsions sont mutuellement indépendantes, dans (11.32) on doit poser $\psi(\omega) = 0$.

L'expression générale (11.32) donnant le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel contient une partie continue

$$F_c(\omega) = \frac{2}{T}\{(a^2+\sigma^2)K_0(\omega) - a^2|\theta_{1v}(\omega)|^2 K_\infty(\omega) + \psi(\omega)\} \tag{11.33}$$

et une partie discrète

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2}{T^2}|\theta_{1v}(\omega)|^2 K_\infty(\omega)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right), \tag{11.34}$$

se composant de raies discrètes aux fréquences multiples de la fréquence $\frac{2\pi}{T}$ de répétition des impulsions. Notons que *seule* la partie continue du spectre énergétique est influencée par la corrélation des impulsions.

En vertu de (11.33) et (11.34) pour $\omega = 0$ les densités spectrales pour les parties continue et discrète du spectre sont respectivement

$$F_c(0) = \frac{2g^2(0)}{T}\Big[\sigma^2\sigma_\tau^2 + a^2\sigma_\tau^2 + \tau_0^2\sigma^2 + 2\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)(\sigma^2\sigma_\tau^2 R_p R_{\tau,\,p} + a^2\sigma_\tau^2 R_{\tau,\,p} + \tau_0^2\sigma^2 R_p)\Big], \qquad (11.35)$$

$$F_d(0) = \frac{4\pi a^2\tau_0^2}{T^2} g^2(0)\,\delta(\omega). \qquad (11.36)$$

Les expressions ci-dessus montrent que la densité spectrale pour $\omega = 0$ pour le type examiné de processus aléatoires impulsionnels dépend seulement des fonctions de corrélation des amplitudes et des durées aléatoires et ne dépend pas des caractéristiques probabilistes de la position des impulsions.

Le rapport de la puissance totale des composantes du spectre continu à la puissance totale des composantes du spectre discret est égal à

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}[(a^2+\sigma^2)K_0(\omega) - a^2|\theta_{1\nu}(\omega)|^2 K_\infty(\omega) + \psi(\omega)]\,d\omega}{\frac{2\pi a^2}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left|\theta_{1\nu}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)\right|^2 K_\infty\left(\frac{2\pi r}{T}\right)}. \qquad (11.37)$$

Il est facile de voir que si les paramètres des impulsions sont constants on a $\theta_{1\nu}(\omega) \equiv 1$, $\psi(\omega) \equiv 0$, $K_0(\omega) = K_\infty(\omega) = |\tau_0 g(\omega\tau_0)|^2$. La partie continue du spectre disparaît alors, et la partie discrète coïncide avec le spectre de puissance d'une suite périodique d'impulsions non modulées. C'est pourquoi dans les cas où les déformations des impulsions sont dues aux bruits, on peut identifier la partie continue du spectre (11.33) avec le spectre des bruits, et la partie discrète (11.34) avec le spectre du signal utile. Dans ce cas le rapport μ, calculé d'après (11.37), donne le rapport de la puissance des bruits à la puissance du signal. Dans d'autres problèmes où la modulation d'une suite d'impulsions a un caractère statistique, la partie continue du spectre contient une information utile.

Si les paramètres des impulsions sont, en plus des déformations purement aléatoires, modulés par une fonction périodique donnée

du temps, la partie discrète de l'expression (11.28) du spectre énergétique doit être complétée par des termes contenant des fonctions delta aux fréquences correspondant aux composantes du développement en série de Fourier de cette fonction périodique.

Nous étudierons au § 11.2 certains cas particuliers de processus aléatoires impulsionnels d'intervalle de cadence déterministe, pour lesquels l'un des paramètres des impulsions est une variable aléatoire. La formule (11.32) permet d'étudier des cas plus généraux, lorsque les déformations aléatoires de plusieurs paramètres des impulsions interviennent simultanément.

11.1.3. Processus aléatoires impulsionnels apériodiques. Considérons maintenant les processus aléatoires impulsionnels sans intervalle de cadence déterministe. Supposons que les intervalles séparant les impulsions successives soient mutuellement indépendants. Désignons par

$$\mu_n^{(k)} = t_{2n+2}^{(k)} - t_{2n}^{(k)} \tag{11.38}$$

l'intervalle séparant les instants d'apparition de deux impulsions successives d'une réalisation. Soit $\Theta_{1\mu}(\omega)$ la fonction caractéristique de la variable aléatoire μ_n et supposons que cette fonction ne dépend pas de n, donc ne dépend pas de la position de l'intervalle μ_n sur l'axe du temps. On peut montrer que, en vertu de l'hypothèse faite, le processus impulsionnel sera stationnaire (au sens général).

Pour l'étude du spectre énergétique du processus aléatoire impulsionnel considéré nous reprenons la formule (11.12). Supposant toujours que les amplitudes des impulsions sont statistiquement indépendantes de leur durée, la fonction $K(\omega)$ est alors donnée par les formules (11.14) et (11.15). Pour déterminer $h_p(\omega)$ on ne peut utiliser (11.16), car cette relation a été obtenue dans l'hypothèse que les intervalles de temps séparant les instants d'apparition des impulsions ne dépendent pas de leur durée. Il y a lieu maintenant de renoncer à cette hypothèse. En effet, l'intervalle de temps μ_n entre les instants d'apparition de deux impulsions successives est égal à la somme de deux variables aléatoires: de la durée τ_n de l'impulsion et de la durée de la pause τ_n^* séparant les impulsions. Par conséquent, dans le cas général les variables aléatoires μ_n et τ_n sont liées. Désignons par $\Theta_{1\tau}(\omega)$ et $\Theta_{1\tau^*}(\omega)$ les fonctions caractéristiques des variables aléatoires τ_n et τ_n^*. Dans la suite nous nous limitons au cas où les durées de l'impulsion et de la pause sont indépendantes. On a alors

$$\Theta_{1\mu}(\omega) = \Theta_{1\tau}(\omega)\,\Theta_{1\tau^*}(\omega). \tag{11.39}$$

Comme pour $n \neq j$

$$t_{2n}^{(k)} - t_{2j}^{(k)} = \tau_j^{(k)} + \tau_j^{*(k)} + \sum_{r=j+1}^{n-1} \mu_r^{(k)},$$

on a en vertu de (11.9) pour les amplitudes non corrélées

$$h_{n-j}(\omega) = a^2 m_1 \{\tau_n^{(k)}\tau_j^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)}) \overline{g(\omega\tau_j^{(k)})} \times$$

$$\times \exp[-i\omega\tau_j^{(k)} - i\omega\tau_j^{*(k)} - i\omega \sum_{r=j+1}^{n-1} \mu_r^{(k)}]\},$$

où a est la moyenne des amplitudes.

Les variables aléatoires

$$\tau_j,\ \tau_j^*,\ \tau_n,\ \tau_n^*,\ t_{2n} - t_{2j+2} = \sum_{r=j+1}^{n-1} \mu_r,$$

étant indépendantes et $\Theta_{1\mu}(\omega)$ ne dépendant pas du numéro de l'intervalle, on a

$$h_{n-j}(\omega) = a^2\Theta_{1\mu}^{n-j-1}(-\omega)\,\Theta_{1\tau*}(-\omega) \times$$

$$\times\, m_1\{\tau_n^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)})\}\, m_1\{\tau_j^{(k)} \overline{g(\omega\tau_j^{(k)})}\, e^{-i\omega\tau_j^{(k)}}\}.$$

Compte tenu de

$$\overline{g(\omega\tau_j^{(k)})}\, e^{-i\omega\tau_j^{(k)}} = \int_0^1 u(t)\, e^{i\omega\tau_j^{(k)}(t-1)}\, dt =$$

$$= \int_0^1 u(1-x)\, e^{-i\omega x\tau_j^{(k)}}\, dx,$$

et en introduisant les désignations suivantes

$$g_1(\omega) = \int_0^1 u(1-x)\, e^{-i\omega x}\, dx = g(-\omega)\, e^{-i\omega}, \tag{11.40}$$

$$Q(\omega) = m_1\{\tau_n^{(k)} g(\omega\tau_n^{(k)})\} = \int_0^\infty xg(\omega x)\, w_{1\tau}(x)\, dx, \tag{11.41}$$

$$Q_1(\omega) = m_1\{\tau_j^{(k)} g_1(\omega\tau_j^{(k)})\} = \int_0^\infty xg_1(\omega x)\, w_{1\tau}(x)\, dx, \tag{11.42}$$

on obtient

$$h_p(\omega) = a^2 Q(\omega)\, Q_1(\omega)\, \Theta_{1\tau*}(-\omega)\, \Theta_{1\mu}^{p-1}(-\omega). \tag{11.43}$$

Remarquons que $Q(0) = Q_1(0) = \tau_0\, g(0)$ en vertu de

$$\int_0^1 u(x)\, dx = \int_0^1 u(1-x)\, dx.$$

En portant (11.14) et (11.43) dans (11.12) on trouve

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \Big\{(a^2+\sigma^2) K_0(\omega) + 2a^2 \operatorname{Re}\Big[Q(-\omega) \times$$

$$\times Q_1(-\omega)\,\Theta_{1\tau*}(\omega)\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\Theta_{1\mu}^{p-1}(\omega)\Big]\Big\}. \qquad (11.44)$$

Pour $\omega \neq 0$ on a

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{p-1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\Theta_{1\mu}^{p-1}(\omega)=\frac{1}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)},$$

et pour $\omega = 0$ la somme ci-dessus est divergente et peut être représentée sous la forme d'une fonction delta.

On obtient l'expression analytique suivante pour le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel apériodique:

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{T}\left\{\left[1+\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2\right]K_0(\omega)+\right.$$
$$\left.+2\,\mathrm{Re}\left[\frac{Q(-\omega)\,Q_1(-\omega)\,\Theta_{1\tau*}(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)}\right]+\frac{g^2(0)\,\tau_0^2}{T}\,\delta(\omega)\right\}. \qquad (11.45)$$

La formule (11.45) montre la différence importante existant entre le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel apériodique et celui d'un processus aléatoire impulsionnel d'intervalle de cadence déterministe. Le spectre (11.45) ne contient pas de partie discrète, présente dans le spectre d'un processus d'intervalle de cadence déterministe (mise à part la composante discrète correspondant à la composante constante du processus).

Pour les processus aléatoires impulsionnels sans intervalle de cadence déterministe, il est intéressant, du point de vue pratique. de calculer le nombre moyen d'impulsions $M(t)$ apparaissant durant l'intervalle de temps t. Il est facile d'établir la correspondance entre la grandeur $M(t)$ et la fonction caractéristique des intervalles successifs séparant les débuts des impulsions. Si l'on considère le nombre d'impulsions dans un intervalle de temps t donné comme une variable aléatoire ν, la probabilité pour que durant ce temps t il apparaisse exactement n impulsions est égale à

$$P\{\nu = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t),$$

où

$$F_n(t)=\int_0^t\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Theta_{1\mu}(\omega)]^n e^{-i\omega t}\,d\omega\right]dt.$$

La moyenne de $\nu(t)$ est égale à

$$M(t)=m_1\{\nu(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}nP\{\nu=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Theta_{1\mu}(ip)}{1-\Theta_{1\mu}(ip)}\,\frac{e^{pt}}{p}\,dp. \qquad (11.46)$$

Notons que (11.46) permet d'exprimer la fonction caractéristique $\Theta_{1\mu}(\omega)$ de la longueur de l'intervalle entre les impulsions en fonction du nombre moyen $M(t)$ d'apparitions des impulsions pendant le temps t, soit:

$$\Theta_{1\mu}(ip) = \frac{p\mu(p)}{1+p\mu(p)}, \tag{11.47}$$

où

$$\mu(p) = \int_0^\infty M(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

On peut trouver à partir de (11.46) la fréquence d'apparition des impulsions, c'est-à-dire le nombre moyen d'impulsions par unité de temps $\lambda(t) = \frac{M(t)}{t}$, en utilisant la règle bien connue du calcul opérationnel de transformation de l'image lors de la division de l'original par t, soit:

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_p^\infty \frac{\Theta_{1\mu}(iv)\,e^{pt}}{1-\Theta_{1\mu}iv}\,\frac{dv}{v}\,dp. \tag{11.48}$$

La grandeur $\lambda(t)\,dt$ est la probabilité a priori de l'apparition d'une impulsion sur l'intervalle $(t, t+dt)$. On peut montrer que la probabilité a posteriori $m(t)\,dt$ pour que l'impulsion (quel que soit son numéro d'ordre) apparaisse sur l'intervalle $(t, t+dt)$, sachant qu'une impulsion ait apparu pour $t = 0$, est égale à

$$m(t)\,dt = M'(t)\,dt.$$

En vertu de (11.46), il vient

$$m(t) = M'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Theta_{1\mu}(ip)}{1-\Theta_{1\mu}(ip)}\,e^{pt}\,dp. \tag{11.49}$$

En utilisant le théorème de Taüber pour des transformations de Laplace unilatérales *), on trouve les valeurs asymptotiques pour $\lambda(t)$ et $m(t)$, soit:

$$\lambda(t) \sim \lim_{p\to 0} p^2 \frac{\Theta_{1\mu}(ip)}{p[1-\Theta_{1\mu}(ip)]} = \frac{1}{T}, \tag{11.50}$$

$$m(t) \sim \lim_{p\to 0} p \frac{\Theta_{1\mu}(ip)}{1-\Theta_{1\mu}(ip)} = \frac{1}{T}. \tag{11.50'}$$

---

*) B. Van der Pol and H. Bremmer. *Operation calculs based on the two-sided Laplace integral.* Cambrige, 1950.

11.1.4. Processus aléatoires impulsionnels du type mixte. Nous avons déjà vu des processus aléatoires impulsionnels de deux types qui se distinguent par les propriétés probabilistes des instants d'apparition des impulsions. Pour l'un de ces types chaque impulsion apparaît sur un intervalle de temps déterministe, pour l'autre il n'y a aucune périodicité. Cependant, dans certains problèmes de la technique d'impulsions on rencontre des processus du type mixte où les paramètres des impulsions ainsi que le nombre d'impulsions sur les intervalles de cadence sont en général aléatoires. C'est par exemple, le cas des processus aléatoires impulsionnels se déroulant dans les systèmes multiplex à modulation d'impulsions codées, dans les systèmes utilisant le multiplexage statistique [8], etc.

Considérons un processus aléatoire impulsionnel mixte satisfaisant aux conditions suivantes:

— toutes les impulsions sont de la même forme donnée par la fonction normée d'amplitude unité $u(t)$, qui est identiquement nulle à l'extérieur de l'intervalle $(0, 1)$;

— il n'y a pas de corrélation intercadence;

— il n'y a pas de relation statistique entre les variations des différents paramètres des impulsions (amplitude, durée, instant d'apparition);

— dans un même intervalle de cadence les durées des impulsions et des pauses sont statistiquement indépendantes;

— les caractéristiques probabilistes des impulsions et des pauses ne dépendent ni de leur position à l'intérieur de l'intervalle de cadence ni du numéro d'ordre de l'intervalle de cadence et sont données par les grandeurs suivantes: la moyenne a et la variance σ^2 de l'amplitude de l'impulsion, la densité de probabilité $w_{1\tau}(x)$ de la durée de l'impulsion, les fonctions caractéristiques $\Theta_{1\tau*}(\omega)$ et $\Theta_{1\mu}(\omega)$ de la pause et de l'intervalle entre les débuts de deux impulsions successives à l'intérieur d'un intervalle de cadence.

De plus, désignons par p_r la probabilité pour que dans un intervalle de cadence de durée T il y ait exactement r impulsions $\left(\sum_{r=0}^{\infty} p_r = 1\right)$.

En appliquant la méthode du § 11.12 (voir également § 3.3.6) on obtient pour le spectre énergétique l'expression sous la forme de la somme d'une partie continue $F_c(\omega)$ et d'une partie discrète $F_d(\omega)$

$$F(\omega) = F_c(\omega) + F_d(\omega), \tag{11.51}$$

avec

$$F_c(\omega) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r \frac{2}{T} \left\{ r(a^2+\sigma^2) K_0(\omega) - a^2 K_\infty(\omega) \, |\Theta_{1\tau*}(\omega)|^2 \left| \frac{1-\Theta_{1\mu}^r(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} \right|^2 + \right.$$
$$\left. + 2a^2 \operatorname{Re}\left[\frac{Q(-\omega)\, Q_1(-\omega)\, \Theta_{1\mu*}(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} \left(r - \frac{1-\Theta_{1\mu}^r(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} \right) \right] \right\}, \tag{11.52}$$

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2}{T^2} K_\infty(\omega) \, |\Theta_{1\tau*}(\omega)|^2 \times$$
$$\times \sum_{r=0}^{\infty} p_r \left| \frac{1-\Theta_{1\mu}^r(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} \right|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \tag{11.53}$$

Ici, tout comme dans les §§ 11.1.2 et 11.1.3, on a

$$K_0(\omega) = \int_0^{\infty} x^2 \, |g(\omega x)|^2 \, w_{1\tau}(x)\, dx, \tag{11.54}$$

$$K_\infty(\omega) = \left| \int_0^\infty xg(\omega x)\, w_{1\tau}(x)\, dx \right|^2, \tag{11.55}$$

$$Q(\omega) = \int_0^\infty xg(\omega x)\, w_{1\tau}(x)\, dx, \tag{11.56}$$

$$Q_1(\omega) = \int_0^\infty xg(-\omega x)\, e^{-i\omega x} w_{1\tau}(x)\, dx, \tag{11.57}$$

$$g(\omega) = \int_0^1 u(t)\, e^{-i\omega t} dt. \tag{11.58}$$

Le spectre au voisinage de la pulsation $\omega = 0$ est dans le cas général

$$F_c(0) = \frac{2\lambda_1}{T} g^2(0)\,(a^2\sigma_\tau^2 + \sigma^2\sigma_\tau^2 + \sigma^2\tau_0^2), \tag{11.59}$$

$$F_d(0) = \frac{4\pi a^2\tau_0^2\lambda_2}{T^2} g^2(0)\,\delta(\omega), \tag{11.59'}$$

où τ_0, σ_τ^2 sont la moyenne et la variance de la durée des impulsions; λ_1, λ_2 le nombre moyen et le second moment du nombre d'impulsions sur l'intervalle de cadence T.

Pour les processus aléatoires impulsionnels d'intervalle de cadence déterministe on a $p_1 = 1$, $p_r = 0$ pour $r \neq 1$ et on peut obtenir la formule (11.32), comme un cas particulier, à partir de (11.51) à (11.53) (dans ce cas l'instant d'apparition de l'impulsion détermine la durée de la pause ν comptée à partir du début de l'intervalle de cadence).

Pour les processus impulsionnels apériodiques $p_r \to 0$ pour toutes les valeurs finies de r et $T = T_0 r \to \infty$ pour un intervalle moyen T_0 donné de valeur finie entre les impulsions. Dans ces conditions le second terme dans l'accolade de (11.52) s'annule, et après avoir levé l'indétermination on trouve pour (11.53) l'expression $\frac{2a^2}{T_0^2} K_\infty(0)\,\delta(\omega)$. Ainsi pour les processus apériodiques on obtient (11.45) à partir de (11.51) à (11.53).

11.2. CAS PARTICULIERS DE PROCESSUS ALÉATOIRES IMPULSIONNELS À INTERVALLES DE CADENCE DÉTERMINISTES

11.2.1. Modulation d'amplitude. Considérons une suite d'impulsions équidistantes de forme donnée, d'égale durée et d'amplitude aléatoire. Désignons par τ_0 et T la durée et la période de répétition des impulsions (fig. 11.2). Comme dans ce cas $w_{1\tau}(t) = \delta(t - \tau_0)$, on en déduit

$$K_0(\omega) = K_p(\omega) = \tau_0^2\, |g(\omega\tau_0)|^2. \tag{11.60}$$

Comme de plus $\Theta_{1\nu}(\omega) \equiv 1$, on trouve à partir de la formule générale (11.32)

$$F(\omega) = \frac{2\tau_0^2}{T} |g(\omega\tau_0)|^2 \times$$
$$\times \left\{\sigma^2 [1 + \psi_1(\omega)] + \frac{2\pi}{T} a^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right)\right\}, \quad (11.61)$$

où

$$\psi_1(\omega) = 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) R_p \cos p\omega T. \quad (11.62)$$

Pour $\omega = 0$ en vertu de (11.35) et (11.36) on a

$$F(0) = \frac{2\tau_0^2 g^2(0)}{T} \times$$
$$\times \left[\sigma^2 + 2\sigma^2 \lim_{N\to\infty} \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) R_p + \frac{2\pi}{T} a^2\delta(\omega)\right]. \quad (11.63)$$

Si les amplitudes aléatoires d'un couple quelconque d'impulsions d'une suite ne sont pas corrélées ($R_p \equiv 0$, $p \neq 0$), on a $\psi_1(\omega) \equiv 0$ et à partir de (11.61) on obtient alors

$$F(\omega) = \frac{2\tau_0^2}{T} |g(\omega\tau_0)|^2 \left\{\sigma^2 + \frac{2\pi}{T} a^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \quad (11.64)$$

On peut négliger la corrélation des impulsions si le temps de corrélation est tel que $\tau_{cor} \ll T$. Si, par exemple, on étudie à la sortie d'un récepteur la suite des impulsions vidéo déformées par des bruits de fluctuation, on peut admettre que ces impulsions ne sont pas corrélées si la largeur de la bande passante est $\Delta_c \gg \frac{2\pi}{T}$.

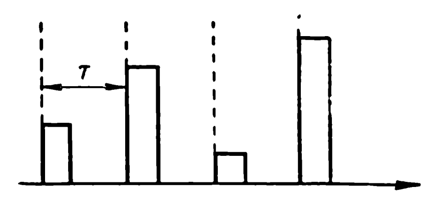


Fig. 11.2. Suite d'impulsions équidistantes de même durée et d'amplitude aléatoire

La partie continue du spectre énergétique (11.64) a a même forme que le spectre d'une impulsion unique, et son intensité est proportionnelle à la variance σ^2. La partie discrète de ce spectre correspond à une suite périodique d'impulsions de même forme, mais d'amplitude constante égale à la moyenne a. Ainsi, lorsque la forme des impulsions est donnée, le spectre considéré n'est déterminé que par deux caractéristiques numériques des amplitudes aléatoires : leur moyenne a et leur variance σ^2.

L'énergie correspondant à la partie continue du spectre est

$$\frac{2\sigma^2\tau_0^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\omega\tau_0)|^2\,d\omega,$$

et celle qui correspond à la partie discrète est

$$\frac{2a^2\tau_0^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}|g(\omega\tau_0)|^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)d\omega=$$

$$=\frac{2a^2\tau_0^2}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left|g\left(2\pi r\,\frac{\tau_0}{T}\right)\right|^2\frac{2\pi}{T}\approx\frac{2a^2\tau_0^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\omega\tau_0)|^2\,d\omega.$$

Le rapport des énergies correspondant aux parties continue et discrète du spectre est

$$\mu=\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2, \tag{11.65}$$

c'est-à-dire qu'il est égal au carré du rapport de la moyenne quadratique à la moyenne de l'amplitude aléatoire de l'impulsion.

Revenons au cas général où la fonction $\psi_1(\omega)$ n'est pas nulle. Si $\sum_{p=1}^{\infty}|R_p|$ est convergente, la limite du second membre de (11.62) existe et $\psi_1(\omega)$ est donnée par la formule suivante *)

$$\psi_1(\omega)=2\sum_{p=1}^{\infty}R_p\cos p\omega T. \tag{11.66}$$

Désignons par $\varphi(\omega)$ la transformée de Fourier du coefficient de corrélation $R(\tau)$, soit

$$\varphi(\omega)=4\int_0^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau. \tag{11.67}$$

La fonction $\varphi(\omega)$ correspond au spectre énergétique du processus aléatoire modulant l'amplitude des impulsions.

Soit 2Δ la largeur finie du spectre $\varphi(\omega)$, donc $\varphi(\omega)\equiv 0$ pour $|\omega|\geqslant\Delta$. Supposons tout d'abord que

$$\Delta\leqslant\frac{\pi}{T}. \tag{11.68}$$

En vertu de (11.66), $1+\psi_1(\omega)$ est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{T}$, qui dans l'intervalle de $-\frac{\pi}{T}$ à $\frac{\pi}{T}$ coïncide avec $\varphi(\omega)$. Si l'inégalité (11.68) n'est pas vérifiée mais $\Delta\leqslant\frac{2\pi}{T}$, en écrivant Δ

*) Si $\zeta(kT)$ est un processus stationnaire à temps discret, représentant une suite d'amplitudes aléatoires, $\psi_1(\omega)$ est la densité spectrale de ce processus.

sous la forme de la somme de deux termes

$$\Delta = \frac{\pi}{T} + \Delta_1, \quad \Delta_1 \leqslant \frac{\pi}{T}, \qquad (11.69)$$

on obtient à partir de (11.67)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} \varphi(\omega) \cos\omega\tau \, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{T}}^{\Delta} \varphi(\omega) \cos\omega\tau \, d\omega =$$
$$= R_1(\tau) + R_2(\tau). \qquad (11.70)$$

On peut alors écrire la série (11.66) comme la somme de deux séries:

$$\psi_1(\omega) = \psi_{11}(\omega) + \psi_{12}(\omega), \qquad (11.71)$$

où

$$\psi_{11}(\omega) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_{1,\,p} \cos p\omega T; \qquad (11.72)$$

$$\psi_{12}(\omega) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_{2,\,p} \cos p\omega T. \qquad (11.73)$$

Les fonctions $\psi_{11}(\omega)$ et $\psi_{12}(\omega)$ sont des fonctions périodiques égales (à la constante unité près) à la fonction $\varphi(\omega)$: la première dans l'intervalle jusqu'à $\frac{\pi}{T}$, la seconde dans l'intervalle de $\frac{\pi}{T}$ à Δ, la seconde fonction périodique étant déplacée par rapport à la première d'une demi-période $\frac{\pi}{T}$. La fonction de corrélation correspondant à cette partie du spectre est une somme de fonctions delta $\delta(\tau - pT)$ d'intensité décroissant au fur et à mesure de l'augmentation du numéro p.

Pour Δ arbitraire on procède d'une façon analogue, en écrivant le coefficient de corrélation comme la somme correspondant à la partition de l'intervalle d'intégration dans (11.70) en intervalles multiples de $\frac{\pi}{T}$.

11.2.2. Suite d'impulsions rectangulaires. Considérons à titre d'exemple le spectre énergétique d'une suite d'impulsions rectangulaires équidistantes, non corrélées, de durée τ_0. Comme dans ce cas

$$|g(\omega\tau_0)|^2 = \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2}}{\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)^2}, \qquad (11.74)$$

on a en vertu de (11.64)

$$F(\omega)=\frac{2\tau_0^2}{T}\frac{\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}}{\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)^2}\left[\sigma^2+\frac{2\pi}{T}a^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right]. \quad (11.75)$$

La forme du spectre énergétique (11.75) est donnée sur la figure 11.3.

Par transformation de Fourier inverse on peut facilement trouver à partir de (11.75) la fonction de corrélation d'une suite d'impulsions rectangulaires non corrélées d'amplitude aléatoire (fig. 11.4).

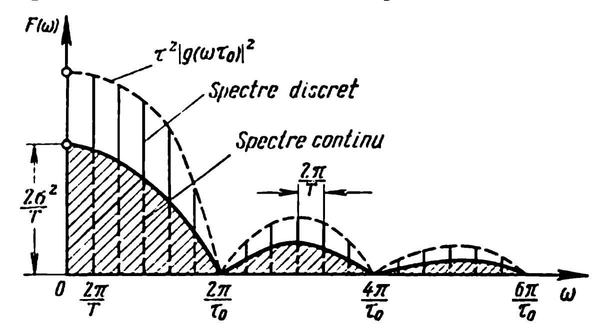


Fig. 11.3. Spectre énergétique d'une suite d'impulsions rectangulaires mutuellement indépendantes d'amplitude aléatoire

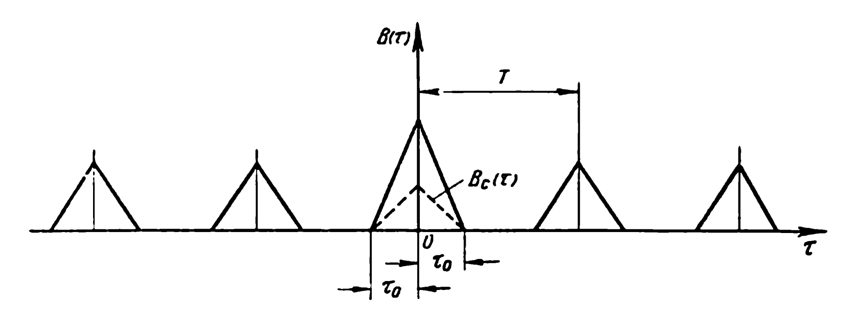


Fig. 11.4. Fonction de corrélation d'une suite d'impulsions rectangulaires mutuellement indépendantes d'amplitude aléatoire

La partie discrète du spectre se transforme alors en une suite périodique de triangles:

$$B_d(\tau)=\begin{cases}\frac{a^2}{T}(\tau_0-|\tau-rT|), & |\tau-rT|\leqslant\tau_0,\\ 0, & |\tau-rT|\geqslant\tau_0,\\ & r=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\end{cases} \quad (11.76)$$

La partie continue du spectre énergétique se ramène à un triangle disposé symétriquement par rapport au point $\tau = 0$ (pointillé sur la figure 11.4), soit:

$$B_c(\tau) = \frac{\sigma^2 \tau_0^2}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2 e^{i\omega\tau} \, d\omega = \frac{\sigma^2}{T} (\tau_0 - |\tau|), \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{11.76'}$$

Supposons maintenant que les impulsions soient corrélées, le coefficient de corrélation des amplitudes aléatoires de tout couple d'impulsions dont les numéros sont distants de p étant égal à

$$R_p = \frac{\sin pT\Delta}{pT\Delta}. \tag{11.77}$$

Si la largeur de la bande Δ satisfait à l'inégalité (11.68), le spectre énergétique d'une suite d'impulsions rectangulaires corrélées sera une suite de bandes de largeur 2Δ se retrouvant périodiquement aux pulsations multiples de $\frac{2\pi}{T}$ (qui est la pulsation de répétition des impulsions), limitées en bas par l'axe des abscisses et en haut par la courbe $\left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2$ (fig. 11.5). La largeur de ces bandes augmente avec Δ et pour $\Delta = \frac{\pi}{T}$ les espaces entre les bandes disparaissent. Dans ce cas le spectre énergétique ne diffère pas d'un spectre infiniment large (fig. 11.3). En général, lorsque la largeur de bande Δ est un multiple de la moitié de la fréquence de répétition des impulsions, comme le montre (11.77), le coefficient de corrélation s'annule ($p \neq 0$) et par conséquent $\psi_1(\omega) = 0$, c'est-à-dire que le spectre énergétique coïncide avec un spectre correspondant à une bande infinie. Il vient de (11.77) qu'au fur et à mesure de l'élargissement de la bande, les maxima de la grandeur R_p pour un p donné décroissent en raison inverse de Δ, par conséquent la déformation de l'enveloppe du spectre continu pour $T\Delta \gg 1$ devient moins apparente.

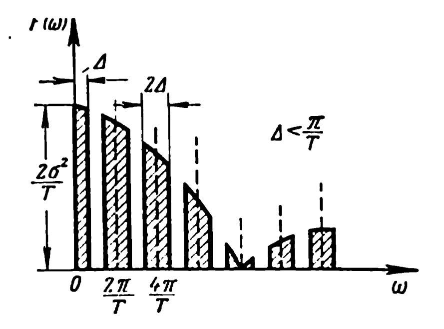


Fig. 11.5. Partie continue du spectre énergétique d'une suite d'impulsions rectangulaires corrélées

11.2.3. Suite d'impulsions exponentielles se recouvrant. Légèrement modifiée, la formule (11.61) peut être utilisée pour calculer

le spectre énergétique d'une suite d'impulsions se recouvrant, de durée infinie. En vertu de (11.23) il suffit de remplacer dans (11.61) le facteur $\tau_0^2 \mid g(\omega\tau_0) \mid^2$ par $\mid g(\omega) \mid^2$, $g(\omega)$ étant donné par (11.22). Soit à titre d'exemple une impulsion exponentielle

$$u(t) = e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad t > 0,$$

apparaissant périodiquement au début de l'intervalle de cadence. L'amplitude des impulsions est aléatoire, de moyenne a et de variance σ^2. Soit

$$R_p = e^{-p\beta T}, \qquad p > 0, \quad \beta > 0$$

le coefficient de corrélation des amplitudes. En vertu de (11.62) on a alors

$$\psi_1(\omega) = 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) e^{-p\beta T} \cos p\omega T =$$

$$= 2 \sum_{p=1}^{\infty} e^{-p\beta T} \cos p\omega T = \frac{\operatorname{sh} \beta T}{\operatorname{ch} \beta T - \cos \omega T} - 1.$$

A partir de (11.22) on trouve également

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} \, dt = \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

A partir de (11.61), compte tenu de la remarque faite ci-dessus, on obtient alors

$$F(\omega) = \frac{2}{T(\alpha^2+\omega^2)} \times$$

$$\times \left\{\sigma^2 \frac{\operatorname{sh} \beta T}{\operatorname{ch} \beta T - \cos \omega T} + \frac{2\pi}{T} a^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \quad (11.78)$$

Pour $\beta T \to \infty$ la relation (11.78) donne l'expression du spectre énergétique des impulsions exponentielles non corrélées se recouvrant, soit:

$$F(\omega) = \frac{2}{T(\alpha^2+\omega^2)} \left[\sigma^2 + \frac{2\pi a^2}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right)\right]. \quad (11.78')$$

On a représenté sur la figure 11.6 la partie continue du spectre énergétique des impulsions exponentielles corrélées.

11.2.4. Modulation de position des impulsions. Considérons une suite d'impulsions de forme donnée, de mêmes amplitude a et durée τ_0, dont l'instant d'apparition sur intervalle de cadence de durée T est aléatoire (fig. 11.7).

Comme dans ce cas $\sigma = 0$, $w_{1\tau}(t) = \delta(t - \tau_0)$, compte tenu de (11.60), la formule générale (11.32) donne

$$F(\omega) = \frac{2\tau_0^2 a^2}{T} |g(\omega\tau_0)|^2 \left\{1 - |\Theta_{1\nu}(\omega)|^2 + \right.$$
$$\left. + \psi_2(\omega) + \frac{2\pi}{T} |\Theta_{1\nu}(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right)\right\}, \qquad (11.79)$$

où

$$\psi_2(\omega) = \lim_{N\to\infty} 2 \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) \times$$
$$\times \operatorname{Re}\{[\Theta_{2\nu}(\omega, -\omega, pT) - |\Theta_{1\nu}(\omega)|^2] e^{-i\omega pT}\}. \qquad (11.80)$$

Remarquons qu'en vertu de (11.35) et (11.36) pour $\omega = 0$ on a

$$F_c(0) = 0, \quad F_d(0) = \frac{4\pi a^2 \tau_0^2}{T^2} \delta(\omega). \qquad (11.81)$$

Notons encore que les égalités (11.81) sont toujours vérifiées (même si l'on tient compte de la dépendance statistique des déplacements temporels des impulsions).

À la différence du spectre (11.61) qui ne dépend pas de la densité de probabilité du paramètre aléatoire, le spectre énergétique (11.79) dépend des deux premières fonctions caractéristiques des écarts aléatoires par rapport à nT des instants d'apparition des impulsions, le carré du module de la densité spectrale de l'impulsion étant tout comme dans (11.61) un facteur de proportionnalité.

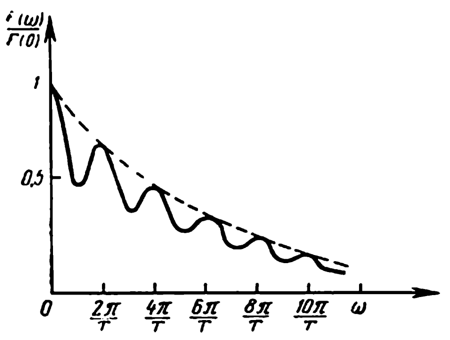


Fig. 11.6. Partie continue du spectre énergétique d'une suite d'impulsions enchevêtrées d'amplitude aléatoire

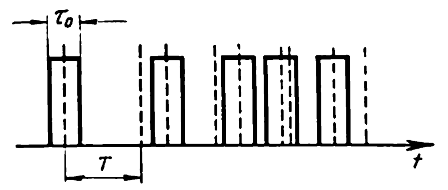


Fig. 11.7. Impulsions d'égale amplitude et d'égale durée apparaissant à des instants aléatoires

Lorsque les instants aléatoires d'apparition d'un couple quelconque d'impulsions sont indépendants, on a

$$\Theta_{2\nu}(\omega, -\omega, pT) = |\Theta_{1\nu}(\omega)|^2,$$

et en vertu de (11.80) $\psi_2(\omega) \equiv 0$.

On a alors dans ce cas

$$F(\omega)=\frac{2\tau_0^2a^2}{T}\,|g(\omega\tau_0)|^2\times$$

$$\times\left\{1-|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2+\frac{2\pi}{T}|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \quad (11.82)$$

La relation (11.82) montre que les intensités de la partie discrète du spectre sont proportionnelles à $|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2$, et les intensités de la partie continue du spectre le sont à $1-|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2$. La somme de ces intensités est égale au carré du module de la densité spectrale de l'impulsion (puissance d'une impulsion isolée). Comme $\Theta_{1\nu}(0)=1$, pour $\omega\to 0$ la densité spectrale de la partie continue du spectre tend vers zéro [voir (11.81)].

La puissance correspondant à la partie continue du spectre est

$$\frac{2\tau_0^2a^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\omega\tau_0)|^2[1-|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2]\,d\omega,$$

celle qui correspond à la partie discrète est à peu près égale à

$$\frac{2\tau_0^2a^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\omega\tau_0)|^2|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\,d\omega.$$

Notons que la formule (11.79) peut également être utilisée dans le cas des impulsions de durée infinie se recouvrant. Pour cela il y a lieu de remplacer le facteur $\tau_0^2\,|g(\omega\tau_0)|^2$ par $|g(\omega)|^2$.

11.2.5. Modulation unilatérale des impulsions en durée. Un cas très important de processus impulsionnels aléatoires d'intervalle de cadence déterministe est une suite d'impulsions équidistantes de forme donnée, de même amplitude et de durée aléatoire (fig. 11.8) obtenue par déplacement aléatoire du flanc arrière de l'impulsion. Comme ici $\sigma=0$, $\Theta_{1\nu}(\omega)\equiv 1$, l'expression générale (11.32) donne:

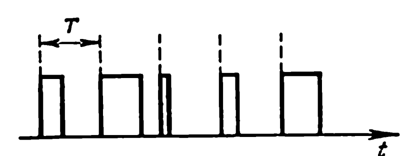


Fig. 11.8. Impulsions d'égale amplitude et de durée aléatoire apparaissant à des instants fixes équidistants

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{T}\left\{K_0(\omega)-K_\infty(\omega)+\right.$$

$$\left.+\psi_3(\omega)+\frac{2\pi}{T}K_\infty(\omega)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}, \quad (11.83)$$

où

$$\psi_3(\omega)=\lim_{N\to\infty}2\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\operatorname{Re}\{[K_p(\omega)-K_\infty(\omega)]\,e^{-i\omega pT}\}. \quad (11.84)$$

La fonction $K_p(\omega)$ est donnée par la formule (11.17):

$$K_p(\omega)=\int_0^\infty\int_0^\infty xyg(\omega x)\,\overline{g(\omega y)}\,w_{2\tau}(x,\,y,\,pT)\,dx\,dy.$$

Les fonctions $K_0(\omega)$ et $K_\infty(\omega)$ peuvent être obtenues à partir de $K_p(\omega)$ par un passage à la limite pour $p\to 0$ et $p\to\infty$. Pour $\omega=0$ on obtient [voir (11.35) et (11.36)]:

$$F(0)=\frac{2a^2g^2(0)}{T}\times$$

$$\times\left[\sigma_\tau^2+2\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\sigma_\tau^2R_{\tau,\,p}+\frac{2\pi\tau_0^2}{T}\,\delta(\omega)\right]. \quad (11.85)$$

A la différence des spectres (11.61) et (11.79) dans le spectre énergétique (11.83) on ne peut séparer les caractéristiques probabilistes du processus et la densité spectrale d'une impulsion isolée, elles font partie de $K_p(\omega)$.

Si les durées aléatoires de tout couple d'impulsions sont indépendantes, on a $K_p(\omega)\equiv K_\infty(\omega)$, et en vertu de (11.84) on a $\psi_3(\omega)\equiv 0$. On obtient alors à partir de (11.83)

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{T}\left[K_0(\omega)-K_\infty(\omega)+\frac{2\pi}{T}K_\infty(\omega)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right].$$

(11.86)

Pour des variances σ_τ^2 très petites des durées des impulsions aléatoires, la structure du spectre énergétique (11.83) est la même que celle d'une suite d'impulsions équidistantes d'amplitude aléatoire. En effet pour $\sigma_\tau\ll T$ on a:

$$K_p(\omega)\approx|g(\omega\tau_0)|^2\int_0^\infty\int_0^\infty xyw_{2\tau}(x,\,y,\,pT)\,dx\,dy=$$

$$=|g(\omega\tau_0)|^2B_\tau(pT), \quad (11.87)$$

où $B_\tau(t)$ est la fonction de corrélation des durées aléatoires des impulsions.

En vertu de (11.87) on a également

$$K_0(\omega)=|g(\omega\tau_0)|^2B_\tau(0)=(\sigma_\tau^2+\tau_0^2)\,|g(\omega\tau_0)|^2, \quad (11.88)$$

$$K_\infty(\omega)=|g(\omega\tau_0)|^2B_\tau(\infty)=\tau_0^2\,|g(\omega\tau_0)|^2. \quad (11.89)$$

En portant (11.87) à (11.89) dans (11.83) on trouve

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{T}\,|g(\omega\tau_0)|^2\left\{\sigma_\tau^2+2\sigma_\tau^2\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times R_{\tau p}\cos p\omega T+\frac{2\pi}{T}\tau_0^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}, \qquad (11.90)$$

où

$$R_{\tau p}=\frac{B_\tau(pT)-\tau_0^2}{\sigma_\tau^2}. \qquad (11.91)$$

En comparant (11.90) et (11.61) on voit que le spectre énergétique des suites d'impulsions modulées en durée par des bruits, pour une faible déviation temporelle, est le même que dans le cas de la modulation d'amplitude.

Etudions plus en détail la modulation unilatérale en durée des impulsions rectangulaires. Pour les impulsions rectangulaires on a

$$xg(\omega x)=\int_0^1 xe^{-i\omega tx}\,dt=\int_0^x e^{-i\omega u}\,du=\frac{1-e^{-i\omega x}}{i\omega},$$

et par conséquent

$$K_p(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\int_0^\infty\int_0^\infty(1-e^{-i\omega x})(1-e^{i\omega y})\,w_{2\tau}(x,\,y,\,pT)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{\omega^2}\,[1+\Theta_{2\tau}(-\omega,\,\omega,\,pT)-e^{i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(\omega)-e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(-\omega)], \qquad (11.92)$$

où $\Theta_{2\tau}$, $\Theta_{1\tau}$ sont les fonctions caractéristiques bi- et unidimensionnelles des écarts aléatoires des durées des impulsions par rapport à la durée moyenne τ_0.

Passant à la limite pour $p\to 0$ et $p\to\infty$ on obtient à partir de (11.92)

$$K_0(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\,[2-e^{i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(\omega)-e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(-\omega)], \qquad (11.93)$$

$$K_\infty(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\,[1+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2-e^{i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(\omega)-e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(-\omega)] \qquad (11.93')$$

et

$$K_0(\omega)-K_\infty=\frac{1}{\omega^2}\,[1-|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2]. \qquad (11.94)$$

Lorsque les impulsions sont indépendantes, l'expression (11.83) donne pour la partie continue du spectre

$$F_c(\omega)=\frac{2a^2}{\omega^2T}\,[1-|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2], \qquad (11.95)$$

et pour la partie discrète

$$F_d(\omega)=\frac{4\pi a^2}{\omega^2 T^2}[1+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2-e^{i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(\omega)-$$
$$-e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau}(-\omega)]\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right). \quad (11.96)$$

11.2.6. Modulation bilatérale des impulsions en durée. Soit une suite d'impulsions rectangulaires modulées en durée. Supposons maintenant qu'en plus du flanc arrière (cas du paragraphe précédent), le flanc avant subisse aussi un déplacement aléatoire. Toute impulsion de la suite peut alors s'écrire de la manière suivante (voir page 472) :

$$a\left\{u\left[\frac{t-nT}{0{,}5\tau_0-\tau_{n1}^{(k)}}\right]+u\left[\frac{t-nT}{-0{,}5\tau_0-\tau_{n2}^{(k)}}\right]\right\},$$

où τ_{n1}, τ_{n2} sont des déplacements aléatoires des flancs par rapport à leur position en l'absence de modulation et $u(t)\equiv 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Les fonctions $K_{n-j}(\omega)$ sont dans ce cas égales à

$$K_{n-j}(\omega)=m_1\left\{\frac{1}{i\omega}\left[1-e^{\frac{-i\omega\tau_0}{2}}e^{-i\omega\tau_{n1}^{(k)}}-1+e^{\frac{i\omega\tau_0}{2}}e^{i\omega\tau_{n2}^{(k)}}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{-i\omega}\left[1-e^{\frac{i\omega\tau_0}{2}}e^{i\omega\tau_{j1}^{(k)}}-1+e^{-\frac{i\omega\tau_0}{2}}e^{-i\omega\tau_{j2}^{(k)}}\right]\right\},$$

ou encore

$$K_{n-j}(\omega)=\frac{1}{\omega^2}m_1\left\{e^{-i\omega[\tau_{n1}^{(k)}-\tau_{j1}^{(k)}]}-e^{-i\omega\tau_0}e^{-i\omega[\tau_{n1}^{(k)}+\tau_{j2}^{(k)}]}-\right.$$
$$\left.-e^{i\omega\tau_0}e^{i\omega[\tau_{j1}^{(k)}+\tau_{n2}^{(k)}]}+e^{i\omega[\tau_{n2}^{(k)}-\tau_{j2}^{(k)}]}\right\}. \quad (11.97)$$

Supposons maintenant que les deux flancs de l'impulsion soient déplacés d'une même grandeur, mais dans des sens opposés (modulation bilatérale symétrique des impulsions en durée).

Comme dans ce cas $\tau_{n1}=|\tau_{n2}|=\tau_n$, la relation (11.97) donne alors

$$K_p(\omega)=\frac{1}{\omega^2}[\Theta_{2\tau}(\omega,\ -\omega,\ pT)+\Theta_{2\tau}(-\omega,\ \omega,\ pT)-$$
$$-e^{i\omega\tau_0}\Theta_{2\tau}(\omega,\ \omega,\ pT)-e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{2\tau}(-\omega,\ -\omega,\ pT)], \quad (11.98)$$

où $\Theta_{2\tau}$ est la fonction caractéristique bidimensionnelle des déplacements aléatoires des flancs par rapport à leur position en l'absence de modulation.

En vertu de (11.98) on a

$$K_\infty(\omega)=\frac{1}{\omega^2}[2|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2-\Theta_{1\tau}^2(\omega)e^{i\omega\tau_0}-\Theta_{1\tau}^2(-\omega)e^{-i\omega\tau_0}], \quad (11.99)$$

$$K_0(\omega)=\frac{1}{\omega^2}[2-\Theta_{1\tau}(2\omega)e^{i\omega\tau_0}-\Theta_{1\tau}(-2\omega)e^{-i\omega\tau_0}]. \quad (11.99')$$

Lorsque les impulsions sont mutuellement indépendantes on trouve pour la partie continue du spectre

$$F_c(\omega) = \frac{2a^2}{T}[K_0(\omega) - K_\infty(\omega)] = \frac{2a^2}{\omega^2 T}\{2[1 - |\Theta_{1\tau}(\omega)|^2] + [\Theta_{1\tau}^2(\omega) - \\ - \Theta_{1\tau}(2\omega)]e^{i\omega\tau_0} + [\Theta_{1\tau}^2(-\omega) - \Theta_{1\tau}(-2\omega)]e^{-i\omega\tau_0}\}, \quad (11.100)$$

et pour sa partie discrète

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2}{\omega^2 T^2}[2|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2 - \Theta_{1\tau}^2(\omega)e^{i\omega\tau_0} - \\ - \Theta_{1\tau}^2(-\omega)e^{-i\omega\tau_0}] \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right). \quad (11.101)$$

Si la fonction caractéristique est paire, les relations (11.100) et (11.101) entraînent

$$F_c(\omega) = \frac{4a^2}{\omega^2 T}\{1 - |\Theta_{1\tau}(\omega)|^2 + [\Theta_{1\tau}^2(\omega) - \Theta_{1\tau}(2\omega)]\cos\omega\tau_0\}, \quad (11.102)$$

$$F_d(\omega) = \frac{8\pi a^2}{\omega^2 T^2}\{|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2 - \Theta_{1\tau}^2(\omega)\cos\omega\tau_0\} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right). \quad (11.103)$$

En comparant (11.102) et (11.95) on voit que le spectre continu dans le cas d'une modulation bilatérale symétrique en durée diffère du spectre continu dans le cas d'une modulation unilatérale par le terme supplémentaire

$$\frac{4a^2}{\omega^2 T}[\Theta_{1\tau}^2(\omega) - \Theta_{1\tau}(2\omega)]\cos\omega\tau_0.$$

La modulation des impulsions rectangulaires en position est parfois considérée comme un cas particulier de la modulation bilatérale en durée, lorsque les deux flancs de l'impulsion sont déplacés dans un même sens de $\tau_{n1} - \tau_{n2} = \tau_0$ (l'indice « 1 » se rapporte au flanc avant et l'indice « 2 » au flanc arrière de l'impulsion). Raisonnant comme pour une modulation bilatérale en durée, on pourrait arriver, dans le cas de la modulation en position, aux résultats du § 11.2.4.

Remarquons que si les flancs avant et arrière de l'impulsion se déplacent indépendamment l'un de l'autre et si de plus deux impulsions quelconques d'une suite sont également indépendantes, on a en vertu de (11.97) :

$$K_\infty(\omega) = \frac{1}{\omega^2}[|\Theta_{1\tau_1}(\omega)|^2 - e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau_1}(-\omega)\Theta_{1\tau_2}(-\omega) - \\ - e^{i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau_1}(\omega)\Theta_{1\tau_2}(\omega) + |\Theta_{1\tau_2}(\omega)|^2],$$

$$K_0(\omega) = \frac{1}{\omega^2}[2 - e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau_1}(-\omega)\Theta_{1\tau_2}(-\omega) - e^{i\omega\tau_0}\Theta_{1\tau_1}(\omega)\Theta_{1\tau_2}(\omega)];$$

par conséquent, dans notre cas la partie continue du spectre énergétique est

$$F_c(\omega)=\frac{2a^2}{\omega^2 T}[2-|\Theta_{1\tau_1}(\omega)|^2-|\Theta_{1\tau_2}(\omega)|^2. \qquad (11.104)$$

Nous avons désigné ici par $\Theta_{1\tau_1}$ et $\Theta_{1\tau_2}$ les fonctions caractéristiques des déplacements aléatoires des flancs avant et arrière de l'impulsion.

Si les caractéristiques probabilistes des déplacements des flancs avant et arrière sont les mêmes, en comparant (11.104) et (11.95) on voit que dans le cas envisagé les parties continues des spectres énergétiques et les parties apériodiques des fonctions de corrélation ne différeront des spectres et fonctions de corrélation correspondants en cas de modulation unilatérale que par le facteur constant 2.

Mentionnons qu'en vertu de (11.97) posant $\tau_{n1}=\nu_n+\tau_n-\tau_0$ et $\nu_n=-\tau_{n2}$ et ayant en vue que les impulsions sont mutuellement indépendantes, on a

$$K_\infty(\omega)=|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2[1-2\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)]^2, \qquad (11.105)$$

$$K_0(\omega)=2[1-\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)], \qquad (11.106)$$

puis on obtient le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel d'intervalle de cadence déterministe avec modulation simultanée (mais indépendante) des impulsions en position et en durée

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{T\omega^2}\Big\{2[1-\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)]-|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\times$$
$$\times[1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2]+|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\times$$
$$\times[1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2]\frac{2\pi}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\Big\}. \qquad (11.107)$$

Il est évident que l'on peut obtenir (11.107) directement à partir de (11.32).

Les relations (11.82) pour des impulsions de durée constante $\tau=\tau_0$ et (11.95), (11.96) pour des impulsions de position invariable dans l'intervalle de cadence $\nu=0$ sont des cas particuliers de (11.107).

11.3. CAS PARTICULIERS DE PROCESSUS ALÉATOIRES IMPULSIONNELS APÉRIODIQUES

11.3.1. Impulsions de durée constante, apparaissant à des instants aléatoires. Soit une suite d'impulsions de durée constante τ_0, apparaissant à des instants aléatoires indépendants (fig. 11.9).

Comme dans le cas qui nous intéresse $w_{1\tau}(x)=\delta(x-\tau_0)$ on a

$$Q(\omega)=\tau_0\,g(\omega\tau_0),\quad Q_1(\omega)=\tau_0 g_1(\omega\tau_0). \qquad (11.108)$$

En vertu de (11.15) on trouve également

$$K_0(\omega) = \tau_0^2 \, | g(\omega\tau_0) |^2. \tag{11.109}$$

La fonction caractéristique $\Theta_{1\tau}(\omega)$ pour des impulsions de durée constante est égale à $e^{i\omega\tau_0}$ et, par conséquent, en vertu de (11.39)

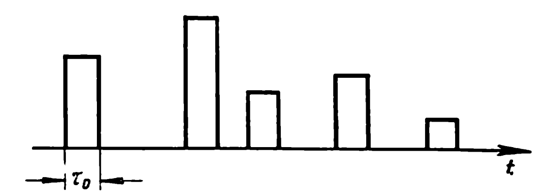


Fig. 11.9. Impulsions d'égale durée apparaissant à des instants aléatoires

on a

$$\Theta_{1\mu}(\omega) = \Theta_{1\tau^*}(\omega)\, e^{i\omega\tau_0}. \tag{11.110}$$

En portant (11.108) à (11.110) dans (11.45) on obtient pour $a \neq 0$

$$F(\omega) = \frac{2a^2\tau_0^2}{T} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 | g(\omega\tau_0) |^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\,\mathrm{Re}\, \frac{g(-\omega\tau_0)\, g_1(-\omega\tau_0)\, e^{-i\omega\tau_0}\Theta_{1\mu}(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} + \frac{g^2(0)}{T}\,\delta(\omega)\right\}.$$

Compte tenu de

$$g_1(-\omega\tau_0)\, e^{-i\omega\tau_0} = \int_0^1 u(1-x)\, e^{-i\omega\tau_0(1-x)}\, dx =$$
$$= \int_0^1 u(x)\, e^{-i\omega\tau_0 x}\, dx = g(\omega\tau_0)$$

et de

$$g(-\omega\tau_0)\, g(\omega\tau_0) = | g(\omega\tau_0) |^2,$$

on trouve

$$F(\omega) = \frac{2a^2\tau_0^2}{T} | g(\omega\tau_0) |^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}\, \frac{\Theta_{1\mu}(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} + \frac{1}{T}\,\delta(\omega)\right].$$

Après des transformations simples il vient finalement:

$$F(\omega) = \frac{2a^2\tau_0^2}{T} | g(\omega\tau_0) |^2 \left[\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1-|\Theta_{1\mu}(\omega)|^2}{1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\mu}(\omega) + |\Theta_{1\mu}(\omega)|^2} + \frac{1}{T}\,\delta(\omega)\right]. \tag{11.111}$$

Si $a = 0$, on a

$$F(\omega) = \frac{2\sigma^2\tau_0^2}{T} | g(\omega\tau_0) |^2 \frac{1-|\Theta_{1\mu}(\omega)|^2}{1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\mu}(\omega) + |\Theta_{1\mu}(\omega)|^2}. \tag{11.111'}$$

Notons que (11.111) correspond au spectre énergétique d'une suite d'impulsions de durée constante et d'amplitude aléatoire. Ce spectre dépend seulement de la variance σ^2 et de la moyenne a des amplitudes et non de leur densité de probabilité.

Nous allons étudier quelques cas particuliers des suites d'impulsions de durée constante τ_0 apparaissant à des instants aléatoires.

11.3.2. Distribution exponentielle des pauses. Supposons que les pauses entre les impulsions successives aient une distribution exponentielle

$$w_{1\tau*}(t)=\frac{1}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}},$$
$$T_1 = T - \tau_0, \quad t > 0.$$

On a alors

$$\Theta_{1\tau*}(\omega)=\frac{1}{1-i\omega T_1}, \quad \Theta_{1\mu}(\omega)=\frac{e^{i\omega\tau_0}}{1-i\omega T_1}$$

et à partir de (11.111) on obtient

$$F(\omega)=\frac{2a^2\tau_0^2}{T}|g(\omega\tau_0)|^2\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2+\frac{1}{1+2\frac{\sin\omega\tau_0}{\omega T_1}+\left(\frac{\sin\frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega T_1}{2}}\right)^2}+\frac{1}{T}\delta(\omega)\right]. \quad (11.112)$$

Pour $\tau_0 \ll T_1$ (11.112) devient

$$F(\omega)\approx\frac{2a^2\tau_0^2}{T}|g(\omega\tau_0)|^2\left[1+\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2+\frac{1}{T}\delta(\omega)\right]. \quad (11.112')$$

Dans cette approximation le spectre continu coïncide, à un facteur constant près, avec le spectre d'une impulsion isolée.

La figure 11.10 donne le spectre énergétique continu d'une suite d'impulsions rectangulaires de durée constante $\tau_0 = \frac{T}{2}$ et d'amplitude constante a pour une distribution exponentielle des pauses. Dans ce cas

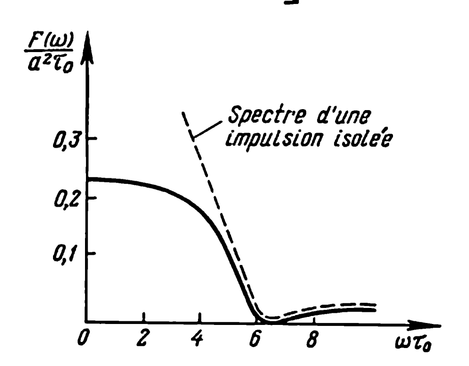


Fig. 11.10. Spectre énergétique d'une suite d'impulsions rectangulaires de durée constante pour une distribution exponentielle de la durée des pauses

$$|g(\omega\tau_0)|^2=\left(\frac{\sin\frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}}\right)^2$$

et

$$F(\omega) = \frac{8a^2}{T\omega^2} \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2}}{1 + 2\frac{\sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0} + \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}}\right)^2} + \frac{2a^2\tau_0^2}{T^2} \delta(\omega). \qquad (11.113)$$

11.3.3. Distribution normale des pauses. Considérons maintenant le cas où les pauses entre les impulsions suivent une loi normale de moyenne $T_1 = T - \tau_0$ et de variance σ_μ^2. On a alors

$$\Theta_{1\tau*}(\omega) = \exp\left(i\omega T_1 - \frac{\sigma_\mu^2\omega^2}{2}\right),$$

$$\Theta_{1\mu}(\omega) = \exp\left(i\omega T - \frac{\sigma_\mu^2\omega^2}{2}\right)$$

et en vertu de (11.111) *)

$$F(\omega) = \frac{2a^2\tau_0^2}{T^2} |g(\omega\tau_0)|^2 \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 + \frac{1 - e^{-\sigma_\mu^2\omega^2}}{1 - 2e^{-\frac{\sigma_\mu^2\omega^2}{2}} \cos \omega T + e^{-\sigma_\mu^2\omega^2}} + \frac{1}{T}\delta(\omega)\right]. \qquad (11.114)$$

Pour des impulsions rectangulaires d'amplitude constante ($\sigma = 0$) on a en vertu de (11.114)

$$F_c(\omega) = \frac{8a^2}{T\omega^2} \frac{\left(1 - e^{-\sigma_\mu^2\omega^2}\right) \sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2}}{1 - 2e^{-\frac{\sigma_\mu^2\omega^2}{2}} \cos \omega T + e^{-\sigma_\mu^2\omega^2}}. \qquad (11.115)$$

Pour $\tau_0 \ll T$ le spectre (11.115) a des maxima aux pulsations $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, les densités spectrales pour ces pulsations étant égales à

$$F_c(\omega_n) = \frac{2a^2\tau_0^2}{T} \left(\frac{\sin \frac{n\pi\tau_0}{T}}{\frac{n\pi\tau_0}{T}}\right)^2 \frac{1 + e^{-\frac{2\pi^2 n^2 \sigma_\mu^2}{T^2}}}{1 - e^{-\frac{2\pi^2 n^2 \sigma_\mu^2}{T^2}}}. \qquad (11.115')$$

Calculons la largeur $\Delta\omega_n$ du rebondissement du spectre énergétique au voisinage de l'harmonique numéro n de la pulsation de cadence $\frac{2\pi}{T}$ au niveau où ce rebondissement coupe le spectre d'une impulsion

*) En toute rigueur, la pause entre les impulsions ne peut être normalement distribuée, car c'est une grandeur essentiellement positive. Cependant si $\sigma_\mu \ll T$ l'exemple envisagé présente un intérêt pratique.

isolée. Les points d'intersection, comme le montre (11.115), sont les racines de l'équation transcendante

$$\cos \omega T = e^{-\frac{\sigma_\mu^2 \omega^2}{2}}.$$

La valeur approchée de ces racines est donnée par l'équation

$$\left(\frac{\sigma_\mu}{T}\right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2.$$

Posant $\omega = \omega_n + \frac{\Delta\omega_n}{2}$ on obtient l'estimation

$$\Delta\omega_n \approx \frac{4\pi\sigma_\mu n}{T^2}.$$

Pour $\sigma_\mu \to 0$ la largeur du rebondissement tend vers zéro, l'intensité $F(\omega_n)$ augmente indéfiniment et le spectre devient un spectre de raies d'une suite périodique d'impulsions, se succédant à la pulsation de cadence $\frac{2\pi}{T}$.

11.3.4. Signal écrêté. Un signal écrêté est une suite d'impulsions rectangulaires de hauteur a et de durée aléatoire, apparaissant à des instants aléatoires (fig. 11.11). Un tel signal apparaît à la sortie

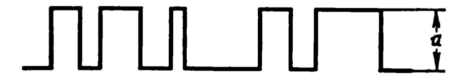


Fig. 11.11. Signal écrêté

d'un limiteur parfait, lorsqu'un signal aléatoire est appliqué à son entrée (voir § 7.2.4). Supposons que la durée de l'impulsion et la durée de la pause, qui sont des variables aléatoires, ont même loi de distribution, et que $\Theta_{1\tau}(\omega)$ est la fonction caractéristique correspondant à cette loi. On a alors

$$g(\omega) = g_1(\omega) = \int_0^1 e^{-i\omega x} dx = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}$$

et

$$|g(\omega x)|^2 = \left(\frac{\sin \frac{\omega x}{2}}{\frac{\omega x}{2}}\right)^2. \qquad (11.116)$$

En vertu de (11.41) et (11.42) on a

$$Q(-\omega)=Q_1(-\omega)=-\frac{1-\Theta_{1\tau}(\omega)}{i\omega}. \qquad (11.117)$$

En portant (11.116) dans (11.15) on trouve

$$K_0(\omega)=\frac{2}{\omega^2}[1-\operatorname{Re}\Theta_{1\tau}(\omega)]. \qquad (11.118)$$

De plus, comme dans le cas envisagé

$$\Theta_{1\mu}(\omega)=\Theta_{1\tau}^2(\omega), \quad \tau_0=\frac{T}{2},$$

(ceci en vertu de l'hypothèse que les durées des impulsions et des pauses sont indépendantes et ont même loi de distribution), on

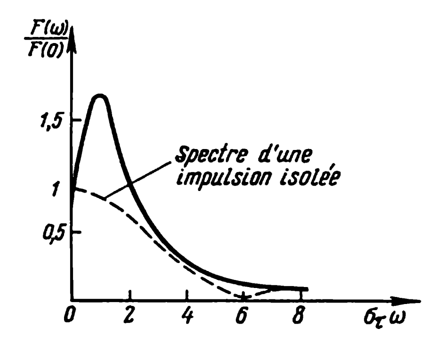


Fig. 11.12. Spectre énergétique d'un signal écrêté pour une distribution normale de la durée des impulsions et des pauses

obtient pour $\sigma=0$ à partir de (11.45)

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{T\omega^2}\left\{1-\operatorname{Re}\Theta_{1\tau}(\omega)-\operatorname{Re}\left[\frac{\Theta_{1\tau}(\omega)[1-\Theta_{1\tau}(\omega)]^2}{1-\Theta_{1\tau}^2(\omega)}\right]\right\}+\frac{a^2}{2}\delta(\omega)$$

et finalement, après des transformations simples,

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{T\omega^2}\operatorname{Re}\frac{1-\Theta_{1\tau}(\omega)}{1+\Theta_{1\tau}(\omega)}+\frac{a^2}{2}\delta(\omega)=$$

$$=\frac{4a^2}{T\omega^2}\,\frac{1-|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2}{1-2\operatorname{Re}\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2}+\frac{a^2}{2}\delta(\omega). \qquad (11.119)$$

Pour $\omega=0$ la partie continue du spectre (11.119) est

$$F(0)=\frac{a^2}{T}M_2\{\tau\}, \qquad (11.120)$$

où $M_2\{\tau\}$ est la variance de la durée de l'impulsion égale à la variance de la durée de la pause.

Si les durées des impulsions et des pauses du signal écrêté sont normalement distribuées, on a

$$\Theta_{1\tau}(\omega)=\exp\left(i\omega\frac{T}{2}-\sigma_\tau^2\frac{\omega^2}{2}\right),\quad \sigma_\tau \ll T,$$

et en vertu de (11.119)

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{T\omega^2}\,\frac{1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}}{1-2e^{-\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}}\cos\frac{\omega T}{2}+e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}}+\frac{a^2}{2}\delta(\omega). \qquad (11.121)$$

Sur la figure 11.12 on a représenté le spectre énergétique correspondant à la distribution normale des durées des impulsions et des pauses d'un signal écrêté pour $\sigma_\tau = 0{,}1T$.

11.4. QUELQUES TYPES DE PROCESSUS ALÉATOIRES IMPULSIONNELS MIXTES

11.4.1. Nombre aléatoire d'impulsions standards de position donnée. Proposons-nous de calculer le spectre énergétique d'un processus dont les réalisations sont des paquets d'impulsions modulées en

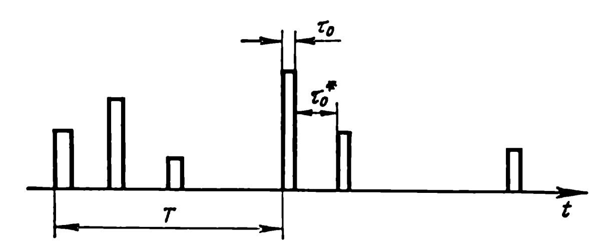


Fig. 11.13. Nombre aléatoire d'impulsions standards dans les positions données

amplitude de durée constante τ_0, séparées par des pauses τ_0^* également constantes, le nombre d'impulsions dans les paquets étant aléatoire (fig. 11.13). Dans le cas envisagé on a

$$K_0(\omega) = K_\infty(\omega) = \tau_0^2\,|g(\omega\tau_0)|^2,$$
$$\Theta_{1\mu}(\omega) = \Theta_{1\tau}(\omega)\,\Theta_{1\tau^*}(\omega) = e^{i\omega(\tau_0+\tau_0^*)},$$
$$Q(\omega) = \tau_0 g(\omega\tau_0),\quad Q_1(\omega) = \tau_0 g(-\omega\tau_0)\,e^{-i\omega\tau_0}.$$

En portant ces valeurs dans (11.52) on trouve l'expression de la partie continue du spectre énergétique

$$F_c(\omega)=\frac{2\tau_0^2\sigma^2}{T}|g(\omega\tau_0)|^2\sum_{r=0}^{\infty} rp_r=\frac{2\lambda_1\tau_0^2\sigma^2}{T}|g(\omega\tau_0)|^2. \qquad (11.122)$$

L'expression (11.122) ne diffère du spectre énergétique continu d'un processus, dans lequel une seule impulsion modulée en amplitude apparaît dans chaque intervalle déterministe, que par le facteur λ_1 égal au nombre moyen d'impulsions dans le paquet. Cette expression montre également qu'en l'absence de modulation ($\sigma = 0$) la partie continue du spectre de la suite de paquets d'impulsions de longueur aléatoire est toujours identiquement nulle.

A partir de (11.53) on trouve l'expression suivante pour la partie discrète du spectre énergétique:

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2\tau_0^2}{T^2} \frac{|g(\omega\tau_0)|^2}{\sin^2\omega(\tau_0+\tau^*)} \times$$
$$\times \sum_{r=0}^{\infty} p_r \sin^2 r\omega(\tau_0+\tau_0^*) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right), \qquad (11.123)$$

qui dépend de la loi de distribution du nombre aléatoire d'impulsions dans un paquet et n'est aucunement influencée par la modulation.

Supposons que les impulsions dans le paquet soient distribuées suivant la loi de Poisson [voir (1.39)]

$$p_r = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \qquad (11.124)$$

où $\lambda = \lambda_1$ est le nombre moyen d'impulsions dans le paquet.

Supposons que $\tau_0^* = \tau_0$ et $\tau_0 \ll T$, on peut alors négliger la probabilité de l'apparition d'un paquet d'impulsions dont la durée soit supérieure à l'intervalle de cadence T. En portant (11.124) dans (11.123) et en prenant la somme, on obtient:

$$F_d(\omega) = \frac{2\pi a^2\tau_0^2}{T^2} |g(\omega\tau_0)|^2 \times$$
$$\times \frac{1 - e^{-2\lambda\sin^2\omega\tau_0}\cos(\lambda\sin 2\omega\tau_0)}{\sin^2\omega\tau_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \qquad (11.125)$$

Remarquons également que pour $p_n = 1$ et $p_r = 0$, $r \neq n$ à partir de (11.122) et (11.123) on obtient l'expression des spectres énergétiques des paquets contenant n impulsions modulées en amplitude:

$$F_c(\omega) = \frac{2n\tau_0^2\sigma^2}{T} |g(\omega\tau_0)|^2, \qquad (11.126)$$

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2\tau_0^2}{T^2} |g(\omega\tau_0)|^2 \frac{\sin^2 n\omega T_0}{\sin^2\omega T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right), \qquad (11.127)$$

où $T_0 = \tau_0 + \tau_0^*$.

Si $T = nT_0$, on arrive à la formule (11.64) donnant le spectre énergétique d'une suite, dans laquelle sur un intervalle déterministe $T_0 = \frac{T}{n}$ apparaît une seule impulsion modulée en amplitude.

11.4.2. Impulsions de durée constante apparaissant à des instants aléatoires. Considérons des paquets d'impulsions de durée constante

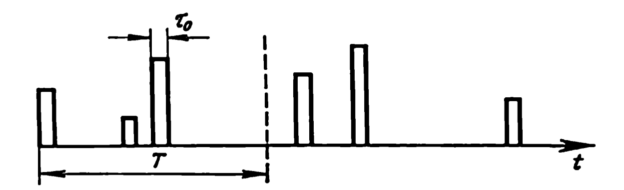


Fig. 11.14. Impulsions de durée constante apparaissant à des instants aléatoires

modulées en amplitude. Ici les instants d'apparition des impulsions dans les paquets sont aléatoires (fig. 11.14). On a alors:

$$\begin{aligned} K_0(\omega) &= K_\infty(\omega) = \tau_0^2 \mid g(\omega\tau_0) \mid^2, \\ Q_1(\omega) &= \tau_0 g(-\omega\tau_0)\, e^{-i\omega\tau_0}, \\ Q(\omega) &= \tau_0 g(\omega\tau_0), \\ Q_{1\mu}(\omega) &= \Theta_{1\tau*}(\omega)\, e^{i\omega\tau_0}. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (11.52) et (11.53) on trouve

$$F_c(\omega) = \frac{2a^2\tau_0^2}{T} \mid g(\omega\tau_0)\mid^2 \sum_{r=0}^{\infty} p_r \left\{ r\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 - \mid \Theta_{1\mu}(\omega)\mid^2 \left| \frac{1-\Theta_{1\mu}^r(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + r\frac{1-\mid\Theta_{1\mu}(\omega)\mid^2}{1-2\operatorname{Re}\Theta_{1\mu}(\omega)+\mid\Theta_{1\mu}(\omega)\mid^2} - 2\operatorname{Re}\frac{\Theta_{1\mu}(\omega)\,[1-\Theta_{1\mu}^r(\omega)]}{[1-\Theta_{1\mu}(\omega)]^2} \right\}, \qquad (11.128)$$

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2\tau_0^2}{T} \mid g(\omega\tau_0)\mid^2 \mid \Theta_{1\mu}(\omega)\mid^2 \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} p_r \left| \frac{1-\Theta_{1\mu}^r(\omega)}{1-\Theta_{1\mu}(\omega)} \right|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \qquad (11.129)$$

Les formules (11.122) et (11.123) sont des cas particuliers de (11.128) et (11.129) pour $\Theta_{1\mu}(\omega) = e^{i\omega(\tau_0+\tau_0^*)}$.

Supposons que les durées des intervalles séparant les impulsions soient normalement distribuées

$$\Theta_{1\mu}(\omega) = \exp\left(i\omega\tau_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\omega^2\right), \qquad \sigma_1 < \tau_0 < \tau_1 \ll T. \qquad (11.130)$$

On a alors en vertu de (11.128) et (11.129)

$$F_c(\omega)=\frac{2a^2\tau_0^2}{T}\,|g(\omega\tau_0)|^2\sum_{r=0}^{\infty}p_r\left\{r\left[\left(\frac{\sigma}{a}\right)^2+\frac{\operatorname{sh}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}\right]-\right.$$

$$-\exp\left[-\frac{(r+1)\,\sigma_1^2\omega^2}{2}\right]\frac{\operatorname{ch}\frac{r\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos r\omega\tau_1}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}+\frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1\right)^2}\times$$

$$\times\left[1-\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}\cos\omega\tau_1-\exp\left(-\frac{r\sigma_1^2\omega^2}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\cos r\omega\tau_1-\cos r\omega\tau_1\cos\omega\tau_1\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}+\sin r\omega\tau_1\sin\omega\tau_1\operatorname{sh}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}\right)\right]\right\},$$

(11.131)

$$F_d(\omega)=\frac{4\pi a^2\tau_0^2}{T^2}\,|g(\omega\tau_0)|^2\sum_{r=0}^{\infty}p_r\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(r+1)\,\sigma_1^2\omega^2}{2}\right]\frac{\operatorname{ch}\frac{r\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos r\omega\tau_1}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right). \qquad (11.132)$$

Supposons que le nombre d'impulsions apparaissant durant le temps T soit distribué suivant la loi de Poisson. En portant (11.124) dans (11.131) et (11.132) et en prenant la somme on obtient

$$F_c(\omega)=\frac{2a^2\tau_0^2}{T}\,|g(\omega\tau_0)|^2\left\{\lambda\left(\frac{\sigma^2}{a^2}+\frac{\operatorname{sh}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\,\frac{1+\exp\left[-\lambda\left(1-e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\right)\right]}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}-$$

$$-\frac{2\exp\left[-\lambda\left(1-e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\cos\omega\tau_1\right)\right]\cos\left(\lambda e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\sin\omega\tau_1\right)}{\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}+$$

$$+\frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1\right)^2}\left[1-\operatorname{ch}\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}\cos\omega\tau_1-\right.$$

$$-\exp\left[-\lambda\left(1-e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\cos\omega\tau_1\right)\right]\left[\cos\left(\lambda e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\sin\omega\tau_1\right)-\right.$$
$$-\cos\omega\tau_1\,\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}\cos\left(\lambda e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\sin\omega\tau_1\right)+$$
$$\left.\left.+\sin\omega\tau_1\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}\sin\left(\lambda e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\sin\omega\tau_1\right)\right]\right\}, \quad (11.133)$$

$$F_d(\omega)=\frac{2\pi a^2\tau_0^2}{T^2}\frac{|g(\omega\tau_0)|^2e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}}{\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_1}\left\{1+\exp\left[-\lambda\left(1-e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-2\exp\left[-\lambda\left(1-e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\cos\omega\tau_1\right)\right]\cos\left(\lambda e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}\sin\omega\tau_1\right)\right\}\times$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right). \quad (11.134)$$

Notons que pour $p_n = 1$, $p_r = 0$, $r \neq n$, on tire de (11.128) et (11.129) l'expression du spectre énergétique des paquets formés de n impulsions modulées en amplitude apparaissant à des instants aléatoires à l'intérieur d'un intervalle de cadence.

11.4.3. Signal écrêté sur des intervalles de cadence déterministes. Considérons un processus aléatoire impulsionnel, représenté par des segments finis du signal écrêté sur des intervalles de cadence déterministes, c'est-à-dire des suites d'impulsions rectangulaires indépendantes de hauteur constante et de durée aléatoire, apparaissant

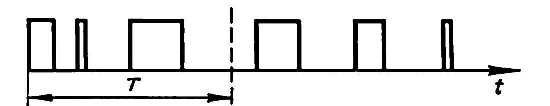


Fig. 11.15. Segments de signal écrêté sur des intervalles de cadence déterministes

à des instants aléatoires (fig. 11.15). Supposons que les durées des impulsions et des pauses suivent une même loi de distribution et soit $\Theta_{1\tau}(\omega)$ la fonction caractéristique correspondant à cette distribution. On a alors

$$g(\omega x)=\frac{1-e^{-i\omega x}}{i\omega x}, \quad \Theta_{1\mu}(\omega)=\Theta_{1\tau}^2(\omega),$$
$$K_0(\omega)=\frac{2}{\omega}\left[1-\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)\right],$$

$$K_\infty(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\,[1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2],$$

$$Q(-\omega)=Q_1(-\omega)=\frac{i}{\omega}\,[1-\Theta_{1\tau}(\omega)].$$

En portant ces valeurs dans (11.52) et (11.53) on obtient

$$F_c(\omega)=\frac{2a^2}{T\omega^2}\sum_{r=0}^{\infty}p_r\Big\{2r\,[1-\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)]-$$
$$-|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2\,[1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2]\left|\frac{1-\Theta_{1\tau}^{2r}(\omega)}{1-\Theta_{1\tau}^{2}(\omega)}\right|^2-$$
$$-2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\Theta_{1\tau}(\omega)\,[1-\Theta_{1\tau}(\omega)]^2}{1-\Theta_{1\tau}^{2}(\omega)}\left(r-\frac{1-\Theta_{1\tau}^{2r}(\omega)}{1-\Theta_{1\tau}^{2}(\omega)}\right)\right]\Big\}, \qquad (11.135)$$

$$F_d(\omega)=\frac{4\pi a^2}{T\omega^2}\,[1-2\,\mathrm{Re}\,\Theta_{1\tau}(\omega)+|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2]\,|\Theta_{1\tau}(\omega)|^2\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{\infty}p_r\left|\frac{1-\Theta_{1\tau}^{2r}(\omega)}{1-\Theta_{1\tau}^{2}(\omega)}\right|^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right). \qquad (11.136)$$

Supposons que les durées des émissions et des pauses soient normalement distribuées. On a alors

$$\Theta_{1\tau}(\omega)=\exp\left\{i\omega\tau_0-\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\right\}, \qquad (11.137)$$
$$\sigma_\tau<\tau_0\ll T.$$

En portant (11.137) dans (11.135) et (11.136) on trouve

$$F_c(\omega)=\frac{4a^2}{T\omega^2}\sum_{r=0}^{\infty}p_r\left\{\frac{r\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}+\cos\omega\tau_0}-\frac{e^{-\frac{2r+1}{2}\sigma_\tau^2\omega^2}}{\mathrm{ch}\,\sigma_\tau^2\omega^2-\cos 2\omega\tau_0}\times\right.$$
$$\times\left(\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_0\right)(\mathrm{ch}\,r\sigma_\tau^2\omega^2-\cos 2r\omega\tau_0)+$$
$$+\frac{1}{2\left(\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}+\cos\omega\tau_0\right)^2}\Big[1+\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\cos\omega\tau_0-e^{-r\sigma_\tau^2\omega^2}(\cos 2r\omega\tau_0+$$
$$\left.+\,\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\cos\omega\tau_0\cos 2r\omega\tau_0-\mathrm{sh}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\sin\omega\tau_0\sin 2r\omega\tau_0)\Big]\right\}. \qquad (11.138)$$

$$F_d(\omega)=\frac{8\pi a^2}{T\omega^2}\,\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}-\cos\omega\tau_0}{\mathrm{ch}\,\sigma_\tau^2\omega^2-\cos 2\omega\tau_0}\sum_{r=0}^{\infty}(\mathrm{ch}\,r\sigma_\tau^2\omega^2-\cos 2r\omega\tau_0)\times$$
$$\times e^{-\frac{2r+1}{2}\sigma_\tau^2\omega^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right). \qquad (11.139)$$

Supposons que le nombre d'impulsions apparaissant durant le temps T soit distribué suivant la loi de Poisson. En portant (11.124) dans (11.138) et (11.139) on obtient après sommation

$$F_c(\omega) = \frac{4a^2}{T\omega^2}\left\{\frac{\lambda\,\mathrm{sh}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2} + \cos\omega\tau_0} - \frac{\mathrm{ch}\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2} - \cos\omega\tau_0}{\mathrm{ch}\,\sigma_\tau^2\omega^2 - \cos 2\omega\tau_0}\,\frac{e^{-\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}}}{2}\times\right.$$

$$\times\left[1 + e^{-\lambda\left(1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\right)} - 2e^{-\lambda\left(1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\cos 2\omega\tau_0\right)}\cos\left(\lambda e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\sin 2\omega\tau_0\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2\left(\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2} + \cos\omega\tau_0\right)^2}\left[1 + \mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\cos\omega\tau_0 -\right.$$

$$- e^{-\lambda\left(1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\cos 2\omega\tau_0\right)}\left[\cos\left(\lambda e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\sin 2\omega\tau_0\right) + \mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\times\right.$$

$$\times\cos\omega\tau_0\cos\left(\lambda e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\sin 2\omega\tau_0\right) -$$

$$\left.\left.\left. - \mathrm{sh}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}\sin\omega\tau_0\sin\left(\lambda e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\sin 2\omega\tau_0\right)\right]\right]\right\}, \quad (11.140)$$

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi a^2}{T\omega^2}\,\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2} - \cos\omega\tau_0}{\mathrm{ch}\,\sigma_\tau^2\omega^2 - \cos 2\omega\tau_0}\,e^{-\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}}\left[1 + e^{-\lambda\left(1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\right)} -\right.$$

$$\left.-2e^{-\lambda\left(1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\cos 2\omega\tau_0\right)}\cos\left(\lambda e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\sin 2\omega\tau_0\right)\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (11.141)$$

Problèmes

11.1. Soit une suite d'impulsions rectangulaires indépendantes d'amplitude constante a et de durée τ_0, d'intervalle de cadence déterministe T, supposons que l'écart ν du temps d'apparition des impulsions par rapport à la valeur moyenne représente un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle et de variance $\sigma_\nu^2 \ll T^2$. Montrer que le spectre énergétique et la fonction de corrélation de ce processus aléatoire impulsionnel sont:

$$F(\omega) = \frac{8a^2}{\omega^2 T}\sin\frac{\omega\tau_0}{2}\left[1 - e^{-\sigma_\nu^2\omega^2} + \frac{2\pi}{T}e^{-\sigma_\nu^2\omega^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right)\right], \quad (1)$$

$$B(\tau) = B_d(\tau) + B_c(\tau), \quad (2)$$

où

$$B_d(\tau) = \frac{2a^2}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}a_r\cos\frac{2\pi r\tau}{T}; \quad (3)$$

$$a_r = \frac{1}{r^2}e^{-4\pi^2 r^2\left(\frac{\sigma_\nu}{T}\right)^2}\sin^2\frac{\pi r\tau_0}{T}, \quad (3')$$

$$B_c(\tau)=\frac{a^2\tau_0}{T}\left\{1-\frac{|\tau|}{\tau_0}+K_1(|\tau|+\tau_0)-K_1(|\tau|-\tau_0)+\right.$$
$$+\frac{|\tau|}{\tau_0}[K_1(|\tau|+\tau_0)-2K_1(|\tau|)+K_1(|\tau|-\tau_0)]+$$
$$\left.+\frac{2\sigma_v^2}{\tau_0^2}[K_2(|\tau|+\tau_0)-2K_2(|\tau|)+K_2(|\tau|-\tau_0)]\right\}; \quad (4)$$

$$K_1(t)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{t}{2\sigma_v}\right); \quad K_2(t)=\frac{1}{2\sigma_v\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_v^2}}, \quad t>0, \quad (4')$$

$\Phi(x)$ est la fonction de Kramp [voir (2.65)].

11.2. Montrer que si dans les conditions du problème 11.1 la distribution de l'instant d'apparition d'une impulsion est uniforme sur l'intervalle de $-aT$ à $aT\left(0<a<\frac{1}{2}-\frac{\tau_0}{T}\right)$, on a alors

$$F(\omega)=\frac{8a^2}{\omega^2T}\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}\left[1-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin^2\alpha\omega T}{\alpha^2\omega^2T^2}+\frac{2\pi}{T}\frac{\sin^2\alpha\omega T}{\alpha^2\omega^2T^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right], \quad (5)$$

si la distribution mentionnée est

$$w_{1v}(x)=\frac{1}{\pi\alpha T}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2T^2}}}, \quad |x|\leqslant\alpha T,$$

on a

$$F(\omega)=\frac{8a^2}{\omega^2T}\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}\left[1-J_0^2(\alpha\omega T)+\frac{2\pi}{T}J_0^2(\alpha\omega T)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right]. \quad (6)$$

11.3. Considérons dans les conditions du problème 11.1 le processus dont les instants d'apparition des impulsions sont corrélés. Sachant les densités de probabilité uni- et bidimensionnelles des instants aléatoires d'apparition des impulsions par rapport au début de l'intervalle de cadence, soit:

$$w_{1v}(t)=\frac{1}{2\sigma_v}e^{-\frac{t}{2\sigma_v}}, \quad (7)$$

$$W_{2v}(t_1, t_2, \tau)=\frac{1}{4\sigma_v^2[1-R_v^2(\tau)]}I_0\left[\frac{R_v(\tau)\sqrt{t_1t_2}}{\sigma_v[1-R_v^2(\tau)]}\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{t_1+t_2}{2\sigma_v^2[1-R_v^2(\tau)]}\right\}, \quad (7')$$

$$t_1>0, \quad t_2>0, \quad \sigma_v\gg T,$$

montrer que le spectre énergétique du processus aléatoire impulsionnel considéré est

$$F(\omega)=\frac{2a^2\tau_0^2}{T}\left(\frac{\sin\frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}}\right)^2\times$$
$$\times\left\{\frac{4\sigma_v^2\omega^2}{1+4\sigma_v^2\omega^2}\left[1+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{R_v^2(pT)\cos p\omega T}{1+4\sigma_v^2\omega^2[1-R_v^2(pT)]}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{2\pi}{T}\frac{1}{1+4\sigma_v^2\omega^2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \quad (8)$$

11.4. Soit une suite d'impulsions rectangulaires indépendantes d'amplitude constante, apparaissant à des instants fixes sur l'intervalle de cadence déterministe T. Supposons que la position du front arrière varie de telle sorte que la durée des impulsions soit une variable aléatoire de moyenne τ_0 et de variance $\sigma_\tau^2 \ll T^2$. Montrer que le spectre énergétique de ce processus aléatoire impulsionnel est

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{\omega^2T}\left[1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}+\frac{2\pi}{T}\left(1-2e^{-\frac{\sigma_\tau^2\omega^2}{2}}\cos\omega\tau_0+e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right]. \quad (9)$$

11.5. Montrer que si dans les conditions du problème 11.4 la distribution de la durée des impulsions est uniforme sur l'intervalle

$$\tau_0\pm\alpha T\left(0<\alpha<\frac{1}{2}-\frac{\tau_0}{T}\right).$$

on a

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{\omega^2T}\left[1-\frac{\sin^2\alpha\omega T}{\alpha^2\omega^2T^2}+\frac{2\pi}{T}\left(1-2\frac{\sin\alpha\omega T}{\alpha\omega T}\cos\omega\tau_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sin^2\alpha\omega T}{\alpha^2\omega^2T^2}\right)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(1-\frac{2\pi r}{T}\right)\right]. \quad (10)$$

Si la distribution mentionnée est exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma_\tau}\gg\frac{1}{T}$, on a

$$F(\omega)=\frac{8a^2\tau_0^2}{(1+4\sigma_\tau^2\omega^2)T}\left[\left(\frac{\sigma_\tau}{\tau_0}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{T}\left(\frac{\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}}{\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)^2}+\frac{2\sigma_\tau}{\tau_0}\frac{\sin\omega\tau_0}{\omega\tau_0}+\frac{2\sigma_\tau^2}{\tau_0^2}\right)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right], \quad (11)$$

et si la distribution de l'écart de la durée par rapport à la valeur moyenne coïncide avec la loi d'une sinusoïde de phase aléatoire, on a

$$F(\omega)=\frac{2a^2}{\omega^2 T}\left\{1-J_0^2(\alpha\omega T)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\pi}{T}\left[1-2J_0(\alpha\omega T)\cos\omega\tau_0+J_0^2(\alpha\omega T)\right]\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \quad (12)$$

11.6. Montrer que dans le cas d'une modulation bilatérale en durée les spectres énergétiques des processus impulsionnels considérés dans les problèmes 11.3 et 11.4 sont:

pour la distribution normale:

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{\omega^2 T}\left[\left(1+e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\cos\omega\tau_0\right)\left(1-e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{4\pi}{T}e^{-\sigma_\tau^2\omega^2}\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right], \quad (13)$$

pour la distribution uniforme:

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{\omega^2 T}\left[1-\frac{\sin^2\alpha\omega T}{\alpha^2\omega^2T^2}+\left(\frac{\sin^2\alpha\omega T}{\alpha^2\omega^2T^2}-\frac{\sin 2\alpha\omega T}{2\alpha\omega T}\right)\cos\omega\tau_0+\right.$$
$$\left.+\frac{4\pi}{T}\left(\frac{\sin\alpha\omega T\sin\frac{\omega\tau_0}{2}}{\alpha\omega T}\right)^2\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right], \quad (14)$$

pour la loi d'une sinusoïde de phase aléatoire

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{\omega^2 T}\left\{1-J_0^2(\alpha\omega T)+\left[J_0^2(\alpha\omega T)-J_0(2\alpha\omega T)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\cos\omega\tau_0+\frac{4\pi}{T}J_0^2(\alpha\omega T)\sin^2\frac{\omega\tau_0}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}. \quad (15)$$

11.7. Obtenir l'expression suivante pour le spectre énergétique d'un processus aléatoire impulsionnel d'intervalle de cadence déterministe, représentant une suite d'impulsions de durée constante τ_0, l'amplitude et l'instant d'apparition de ces impulsions étant des variables aléatoires et indépendantes:

$$F(\omega)=\frac{2\tau_0^2}{T}\,|g(\omega\tau_0)|^2\left\{\sigma^2+a^2\left[1-|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\right]+\right.$$
$$\left.+\psi(\omega)+a^2|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\frac{2\pi}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right\}, \quad (16)$$

où

$$\psi(\omega)=2\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\mathrm{Re}\left\{\sigma^2R_p\Theta_{2\nu}(\omega,\,-\omega,\,pT)\,e^{-i\omega pT}+\right.$$
$$\left.+a^2\left[\Theta_{2\nu}(\omega,\,-\omega,\,pT)-|\Theta_{1\nu}(\omega)|^2\right]e^{-i\omega pT}\right\}. \quad (17)$$

Notons que si l'on remplace $\tau_0\,|g(\omega\tau_0)|$ par $|g(\omega)|$ la formule (16) devient valable pour des impulsions de durée infinie se recouvrant.

11.8. Obtenir l'expression suivante pour le spectre énergétique d'un processus aléatoire d'intervalle de cadence déterministe représentant une suite d'impulsions apparaissant au début de l'intervalle de cadence, dont les amplitudes et les durées sont des variables aléatoires indépendantes:

$$F(\omega)=\frac{2}{T}\Big[(a^2+\sigma^2)K_0(\omega)-a^2K_\infty(\omega)+\psi(\omega)+$$
$$+a^2K_\infty(\omega)\frac{2\pi}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\Big], \quad (18)$$

où

$$\psi(\omega)=2\lim_{N\to\infty}\sum_{p=1}^{2N}\left(1-\frac{p}{2N+1}\right)\mathrm{Re}\,\{\sigma^2R_pK_p(\omega)+$$
$$+a^2[K_p(\omega)-K_\infty(\omega)]\,e^{-i\omega pT}\}. \quad (19)$$

11.9. Montrer que le spectre énergétique d'une suite d'impulsions rectangulaires indépendantes, apparaissant au début de l'intervalle de cadence déter-

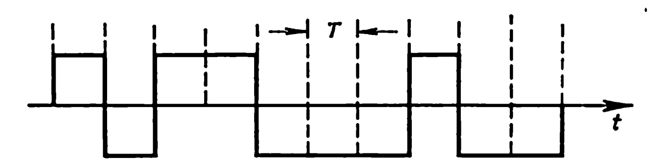


Fig. 11.16. Nombre aléatoire d'impulsions de polarité donnée

ministe $T = 4\tau_0$, et dont les amplitudes et les durées ont les distibutions discrètes respectives:

$$w_{1\xi}(x)=\frac{1}{2}[\delta(x-A_0)+\delta(x-2A_0)],$$
$$w_{1\tau}(y)=\frac{1}{2}[\delta(y-\tau_0)+\delta(y-2\tau_0)],$$

a la forme suivante:

$$F(\omega)=\frac{A_0^2\tau_0}{32}\left(\frac{\sin\frac{\omega\tau_0}{2}}{\frac{\omega\tau_0}{2}}\right)^2\Big[11+8\cos^2\frac{\omega\tau_0}{2}+$$
$$+9\left(1+8\cos^2\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\frac{\pi}{2\tau_0}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi r}{2\tau_0}\right)\Big]. \quad (20)$$

Pour $\omega = 0$ les densités spectrales sont [comparer avec (11.35) et (11.36)]

$$F_c(0)=\frac{19}{32}A_0^2\tau_0, \qquad F_d(0)=\frac{81}{64}A_0^2\delta(\omega). \quad (21)$$

11.10. Supposons que sur des intervalles déterministes T on voit apparaître avec la même probabilité des impulsions rectangulaires de durée T, d'amplitude $+1$ ou -1 (fig. 11.16). Montrer que le spectre énergétique et la fonction de

corrélation de ce processus aléatoire impulsionnel sont:

$$F(\omega)=2T\,\frac{\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}, \tag{22}$$

$$R(\tau)=1-\frac{|\tau|}{T}, \qquad |\tau|\leqslant T. \tag{23}$$

Conseil: obtenir (22) de deux manières différentes: à partir de (11.61) et de (11.119). Dans le second cas tenir compte de

$$\Theta_{1\tau}(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,e^{-in\omega T}=\frac{e^{-i\omega T}}{2-e^{-i\omega T}}.$$

11.11. Soient les durées des impulsions et des pauses d'un signal écrêté distribuées suivant la loi du χ^2:

$$w_{1\tau}(t)=\frac{2}{T}\,\frac{1}{m!}\left(\frac{2t}{T}\right)^m e^{-\frac{2t}{T}}. \tag{24}$$

Montrer que le spectre énergétique de ce signal est

$$F(\omega)=\frac{4a^2}{T\omega^2}\,\frac{1-\left(1+\frac{\omega^2T^2}{4}\right)^{-(m+1)}}{1+\left(1+\frac{\omega^2T^2}{4}\right)^{-(m+1)}\left[1+2\,\mathrm{Re}\left(1+\frac{i\omega T}{2}\right)^{m+1}\right]}+\frac{a^2}{2}\,\delta(\omega). \tag{25}$$

Considérer le cas particulier de la distribution exponentielle (cas d'un signal télégraphique aléatoire, voir § 4.2.10) pour $m=0$

$$F(\omega)=\frac{\frac{a^2T}{4}}{1+\left(\frac{\omega T}{4}\right)^2}+\frac{a^2}{2}\,\delta(\omega) \tag{26}$$

et comparer la formule (26) avec (4.119).

CHAPITRE 12

CARACTÉRISTIQUES ÉNERGÉTIQUES DE LA MODULATION PAR PROCESSUS ALÉATOIRES

12.1. FONCTION DE CORRÉLATION D'UNE PORTEUSE MODULÉE PAR PROCESSUS ALÉATOIRES

12.1.1. Méthodes de modulation, porteuse et processus de modulation. En radiotechnique, pour transmettre une information on fait agir les signaux basse fréquence recelant l'information utile (*processus de modulation*) sur un ou plusieurs paramètres de l'oscillation haute fréquence (*porteuse*). C'est ce qu'on appelle généralement *modulation*. Les différents procédés de modulation sont soit des transformations linéaires des processus de modulation dans les systèmes *linéaires* à paramètres variant dans le temps, soit des transformations *non linéaires* des processus de modulation et de la porteuse.

La modulation linéaire d'amplitude est réalisée dans des multiplicateurs (voir §§ 5.2.5, 5.4.3). Un multiplicateur, qui est un dispositif linéaire à paramètres commandés par le processus de modulation, peut également être considéré comme un système linéaire non inertiel (amplificateur) faisant varier l'amplitude de la porteuse suivant une certaine loi, fonction du processus de modulation et de la caractéristique de l'amplificateur. Dans une autre méthode non linéaire de modulation d'amplitude on applique la somme d'une oscillation porteuse et du processus de modulation à l'entrée d'un système non linéaire non inertiel (mélangeur). Le processus de sortie contient également une composante proportionnelle au produit des processus d'entrée. Ce procédé se trouve à la base d'une opération plus générale appelée en radiotechnique *changement de fréquence*.

Lorsque le processus de modulation agit sur le paramètre angulaire de la porteuse c'est la phase instantanée qui varie. Suivant le mode d'action du processus de modulation sur la phase on distingue la modulation *de phase* où la phase est proportionnelle aux valeurs du processus de modulation, et la modulation *de fréquence* où c'est la dérivée de la phase instantanée (fréquence) qui est proportionnelle aux valeurs du processus de modulation.

Les méthodes linéaires de modulation du paramètre angulaire peuvent être utilisées dans des lignes introduisant un retard variable dans le temps (voir §§ 5.2.5 et 5.4.2).

On utilise couramment les systèmes de rayonnement continu à modulation d'amplitude, de fréquence ou de phase pour la trans-

mission de l'information. Le signal porteur peut être non seulement une onde harmonique haute fréquence (comme dans les réseaux de transmission actuels), mais également un bruit représentant un processus aléatoire stationnaire à bande étroite (intéressant, par exemple, dans les systèmes optiques de transmission). La résolution d'un bon nombre de problèmes pratiques dans ces domaines de la technique exige l'étude des spectres énergétiques des signaux modulés auxquels est consacré le présent chapitre.

Dans ce qui suit nous convenons que le bruit porteur est un processus aléatoire $\xi(t)$ normal, stationnaire, à bande étroite, de moyenne nulle et de spectre énergétique $F_\xi(\omega)$ disposé au voisinage de la pulsation ω_0, et que les processus $\eta_a(t)$ et $\eta_\varphi(t)$ modulant l'amplitude et la phase de la porteuse sont des processus aléatoires normaux stationnaires (et, en général, stationnairement liés). Les processus aléatoires de modulation peuvent être tant à large bande qu'à bande étroite. Supposons que leurs moyennes soient nulles, et soient σ_a^2, σ_φ^2, $R_a(\tau)$, $R_\varphi(\tau)$ les variances, les coefficients de corrélation et le coefficient de corrélation mutuel des processus $\eta_a(t)$ et $\eta_\varphi(t)$ respectivement. Supposons également que le bruit porteur et les processus modulant soient statistiquement indépendants. Notons que nous pouvons considérer la porteuse comme un bruit sans perdre de généralité, car une porteuse harmonique en est un cas particulier.

12.1.2. Expression générale de la fonction de corrélation. Ecrivons un processus aléatoire à bande étroite [voir (6.42)] sous la forme

$$\xi(t) = E_\xi(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_\xi(t)], \tag{12.1}$$

le bruit porteur modulé (modulation mixte) sera alors

$$\zeta(t) = E_\xi(t)\, E(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_\xi(t) + \psi(t)], \tag{12.2}$$

où $E(t)$ et $\psi(t)$ sont des processus aléatoires fonctionnellement liés aux processus de modulation $\eta_a(t)$ et $\eta_\varphi(t)$ suivant les caractéristiques des modulateurs d'amplitude et de phase. Il faut noter que le processus $\zeta(t)$ n'est pas stationnaire même si les processus modulant le sont.

Calculons la fonction de corrélation (puis sa moyenne prise sur le temps) du bruit porteur modulé (12.2), soit:

$$B_\zeta(t, \tau) = m_1\{\zeta(t)\,\zeta(t+\tau)\} = m_1\{E_\xi(t)\, E_\xi(t+\tau) \times \\ \times E(t)\, E(t+\tau) \cos[\omega_0 t + \varphi_\xi(t) + \psi(t)] \cos[\omega_0(t+\tau) + \\ + \varphi_\xi(t+\tau) + \psi(t+\tau)]\}.$$

En écrivant le produit des cosinus sous la forme d'une somme, on obtient

$$B_\zeta(t, \tau) = \frac{1}{2} m_1 \{E_\xi(t)\, E_\xi(t+\tau)\, E(t)\, E(t+\tau) \times \\ \times \cos[\omega_0\tau + \varphi_\xi(t+\tau) - \varphi_\xi(t) + \psi(t+\tau) - \psi(t)]\} +$$

$$+\frac{1}{2} m_1 \{E_\xi(t) E_\xi(t+\tau) E(t) E(t+\tau) \times$$
$$\times \cos[2\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_\xi(t) + \varphi_\xi(t+\tau) +$$
$$+ \psi(t) + \psi(t+\tau)]\}. \qquad (12.3)$$

En vertu des limitations mentionnées plus haut le premier terme du second membre de (12.3) ne dépend pas du temps t, mais seulement de la différence τ. Lorsque l'on prend la moyenne de $B_\xi(t, \tau)$ sur la variable t le second terme de (12.3) s'annule. Par conséquent la fonction de corrélation moyenne dans le temps est égale à

$$B^*(\tau) = \langle B_\xi(t, \tau)\rangle = \frac{1}{2} m_1 \{E_\xi(t) E_\xi(t+\tau) E(t) E(t+\tau) \times$$
$$\times \cos[\omega_0\tau + \varphi_\xi(t+\tau) - \varphi_\xi(t) + \psi(t+\tau) - \psi(t)]\}, \qquad (12.4)$$

ou, tenant compte de ce que la porteuse ne dépend pas des processus de modulation on a

$$B^*(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[e^{-i\omega_0\tau} m_1 \{E_\xi(t) E_\xi(t+\tau) e^{-i[\varphi_\xi(t+\tau) - \varphi_\xi(t)]}\} \times$$
$$\times m_1 \{E(t) E(t+\tau) e^{-i[\psi(t+\tau) - \psi(t)]}\}]. \qquad (12.5)$$

Notons que dans la formule (12.5) les deux premiers facteurs entre crochets se rapportent au bruit porteur, et le troisième aux processus de modulation. Pour une porteuse harmonique d'amplitude constante A_0 et de pulsation ω_0 (ou pour une porteuse quasi déterministe d'amplitude et de fréquence constantes, mais de phase aléatoire φ_0) on a

$$m_1 \{E_\xi(t) E_\xi(t+\tau) e^{-i[\varphi_\xi(t+\tau) - \varphi_\xi(t)]}\} = A_0^2. \qquad (12.6)$$

A partir de (12.5) on peut trouver comme cas particulier l'expression de la fonction de corrélation moyenne d'une oscillation harmonique modulée en amplitude et en phase (fréquence) par des processus aléatoires cohérents, soit:

$$B^*(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \operatorname{Re}[e^{-i\omega_0\tau} m_1 \{E(t) E(t+\tau) e^{-i[\psi(t+\tau) - \psi(t)]}\}]. \qquad (12.7)$$

12.1.3. Porteuse et processus de modulation à distribution normale. Prenons maintenant la moyenne de chacun des deux facteurs figurant dans (12.5) en supposant que la porteuse et les processus de modulation soient normalement distribués.

Compte tenu de l'expression (8.16) de la distribution conjointe, à deux instants, de l'enveloppe et de la phase d'un processus aléatoire normal stationnaire, on trouve

$$m_1 \{E_\xi(t) E_\xi(t+\tau) e^{-i[\varphi_\xi(t+\tau) - \varphi_\xi(t)]}\} =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r_1 r_2 e^{-i(\vartheta_2 - \vartheta_1)} W_4(r_1, r_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \tau)\, d\vartheta_1\, d\vartheta_2\, dr_1\, dr_2 =$$

$$= \frac{\sigma_\xi^2}{1-R_0^2} \int_0^\infty \int_0^\infty z_1^2 z_2^2 e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1-R_0^2)}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\vartheta_2-\vartheta_1)+\frac{R_0 z_1 z_2}{1-R_0^2}\cos(\vartheta_2-\vartheta_1-\vartheta_0)} d\vartheta_1\, d\vartheta_2 \right] dz_1\, dz_2.$$

Comme l'intégrale intérieure (sur ϑ_1 et ϑ_2) est égale à une fonction de Bessel de premier ordre de l'argument imaginaire on a

$$m_1 \{E_\xi(t)\, E_\xi(t+\tau)\, e^{-i[\varphi_\xi(t+\tau)-\varphi_\xi(t)]}\} =$$

$$= \frac{\sigma_\xi^2}{1-R_0^2} \int_0^\infty \int_0^\infty z_1^2 z_2^2 I_1\left(\frac{R_0 z_1 z_2}{1-R_0^2}\right) e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1-R_0^2)}} dz_1\, dz_2 =$$

$$= \sigma_\xi^2 R_0(\tau) \int_0^\infty z_1^3 e^{-\frac{z_1^2}{2}} dz_1 = 2\sigma_\xi^2 R_0(\tau), \qquad (12.8)$$

où $R_0(\tau)$ est le coefficient de corrélation du bruit porteur *).

Passons à l'étude de la moyenne du facteur contenant les fonctions de modulation. A cet effet il y a lieu d'établir tout d'abord la relation fonctionnelle entre les processus aléatoires $E(t)$, $\psi(t)$ d'une part et $\eta_a(t)$, $\eta_\varphi(t)$ de l'autre, en utilisant pour cela les caractéristiques des modulateurs d'amplitude et de phase.

Pour une caractéristique *linéaire par morceaux* d'un modulateur d'amplitude la relation entre $E(t)$ et $\eta_a(t)$ est donnée sous la forme suivante:

$$E(t) = \begin{cases} 1+\frac{\eta_a t}{k_a}, & \eta_a(t) \geqslant -k_a, \\ 0, & \eta_a(t) < -k_a. \end{cases} \qquad (12.9)$$

La grandeur $m = \frac{|\eta_{a\,max}|}{k_a}$ est appelée taux de modulation d'amplitude.

Si on représente la caractéristique linéaire par morceaux du modulateur par une intégrale curviligne (voir § 7.2.3), on peut écrire la fonction $E(t)$ de la manière suivante

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{1}{(iu)^2} e^{iu\left[1+\frac{\eta_a(t)}{k_a}\right]} du, \qquad (12.10)$$

où c est le contour représenté sur la figure 7.3.

*) Dans le cas d'une porteuse harmonique (quasi déterministe) $R_0(\tau) = 1$, $\sigma_\xi^2 = \frac{A_0^2}{2}$ et (12.8) devient (12.6).

Comme les valeurs instantanées d'un processus aléatoire normal peuvent être en valeur absolue aussi grandes que l'on veut, on peut en principe toujours s'attendre à une surmodulation ($m > 1$). Cependant si la variance de η_a est petite par rapport à k_a, on peut pratiquement négliger la surmodulation. Le temps relatif ν_m de surmodulation est donné par l'égalité suivante

$$\nu_m = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-k_a} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_a^2}} dx = 1 - F\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right).$$

Pour $\sigma_a \ll k_a$, en utilisant le développement asymptotique (2.64) on obtient

$$\nu_m \sim \frac{1}{k_a \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right)^2}.$$

Au contraire, si $\sigma_a \gg k_a$ (forte surmodulation), en développant la fonction de Laplace en série de puissances [voir (2.63)] on trouve

$$\nu_m \approx \frac{1}{2} - \frac{k_a}{\sigma_a \sqrt{2\pi}}.$$

Supposons que la caractéristique du modulateur de phase soit linéaire. Dans ce cas la relation existant entre les fonctions aléatoires $\psi(t)$ et $\eta_\varphi(t)$ est très simple

$$\psi(t) = k_\varphi \eta_\varphi(t). \tag{12.11}$$

Avec les notations

$$\eta_1 = \frac{\eta_a(t)}{k_a}, \qquad \eta_2 = \frac{\eta_a(t+\tau)}{k_a},$$

$$\eta_3 = k_\varphi \eta_\varphi(t), \qquad \eta_4 = k_\varphi \eta_\varphi(t+\tau)$$

et compte tenu de (12.10), on obtient

$$m_1\{E(t)\,E(t+\tau)\,e^{-i[\psi(t+\tau)-\psi(t)]}\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{c_1} \int_{c_2} m_1\{e^{i\eta_1 u_1 + i\eta_2 u_2 + i\eta_3 - i\eta_4}\}\, e^{i(u_1+u_2)} \frac{du_1\, du_2}{u_1^2 u_2^2}. \tag{12.12}$$

Introduisons la fonction caractéristique quadridimensionnelle de quatre grandeurs η_1, η_2, η_3, η_4 corrélées, normalement distribuées (dont les moyennes sont par hypothèse nulles), soit:

$$\Theta_4(u_1, u_2, u_3, u_4, \tau) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{4} \sigma_k \sigma_n R_{kn}(\tau)\, u_k u_n\right\}, \tag{12.13}$$

où σ_k^2 et σ_n^2 sont les variances de la k-ième et de la n-ième variables aléatoires; R_{kn} est leur coefficient de corrélation mutuel. Par conséquent, pour $k = n$ la grandeur $R_{kn} = 1$, les autres étant données

par les caractéristiques probabilistes des processus de modulation:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_a}{k_a}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = k_\varphi \sigma_\varphi$$
$$R_{12}(\tau) = R_{21}(\tau) = R_a(\tau),$$
$$R_{34}(\tau) = R_{43}(\tau) = R_\varphi(\tau),$$
$$R_{14}(\tau) = R_{41}(\tau) = R_{a\varphi}(\tau),$$
$$R_{13} = R_{31} = R_{a\varphi}(0),$$
$$R_{23}(\tau) = R_{32}(\tau) = R_{\varphi a}(\tau),$$
$$R_{24} = R_{42} = R_{\varphi a}(0).$$

En vertu de (12.13) on a

$$m_1\{e^{i\eta_1 u_1 + i\eta_2 u_2 + i\eta_3 - i\eta_4}\} = \Theta_4(u_1, u_2, 1, -1, \tau)$$

ou

$$m_1\{e^{i\eta_1 u_1 + i\eta_2 u_2 + i\eta_3 - i\eta_4}\} = \exp\left\{-\frac{\sigma_a^2}{2k_a^2}[u_1^2 + 2R_a(\tau) u_1 u_2 + u_2^2]\right\} \times$$
$$\times \exp\{-k_\varphi^2 \sigma_\varphi^2 [1 - R_\varphi(\tau)]\} \exp\left\{-\frac{k_\varphi \sigma_\varphi \sigma_a}{k_a} \times\right.$$
$$\left.\times ([R_{a\varphi}(0) - R_{a\varphi}(\tau)] u_1 - [R_{\varphi a}(0) - R_{\varphi a}(\tau)] u_2)\right\}. \quad (12.14)$$

Dans le second membre de la formule (12.14) le premier facteur correspond à la fonction caractéristique bidimensionnelle du processus $\frac{\eta_a(t)}{k}$, le second à la fonction caractéristique (lorsque l'argument est égal à l'unité) de la différence $k_\varphi [\eta_\varphi(t+\tau) - \eta_\varphi(t)]$ *), le dernier facteur tient compte de la corrélation entre les processus aléatoires $\eta_a(t)$ et $\eta_\varphi(t)$.

En portant (12.14) dans (12.12) on trouve

$$m_1\{E(t) E(t+\tau) e^{-i[\psi(t+\tau) - \psi(\tau)]}\} =$$
$$= e^{-k_\varphi^2 \sigma_\varphi^2 [1 - R_\varphi(\tau)]} \frac{1}{4\pi^2} \int_{c_1}\int_{c_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_a}{k_a}\right)^2 [u_1^2 + 2R_a(\tau) u_1 u_2 + u_2^2)]\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{k_\varphi \sigma_a \sigma_\varphi}{k_a}([R_{a\varphi}(0) - R_{a\varphi}(\tau)] u_1 - [R_{\varphi a}(0) - R_{\varphi a}(\tau)] u_2)\right\} \times$$
$$\times e^{i(u_1+u_2)} \frac{du_1\, du_2}{u_1^2 u_2^2}. \quad (12.15)$$

En réunissant (12.5), (12.8) et (12.15) on obtient l'expression générale de la moyenne prise sur le temps de la fonction de corrélation du bruit porteur, modulé en amplitude et en phase par des

*) Voir (4.126) pour $\tau = 0$.

processus aléatoires normaux stationnaires cohérents, soit:

$$B^*(\tau)=\sigma_\xi^2 R_0(\tau)\, e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2[1-R_\varphi(\tau)]}\times$$
$$\times \operatorname{Re}\Big[e^{-i\omega_0\tau}\frac{1}{4\pi^2}\int_c\int_c \exp\Big\{-\frac{\sigma_a^2}{2k_a^2}[u_1^2+2R_a(\tau)u_1u_2+u_2^2]\Big\}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{k_\varphi\sigma_\varphi\sigma_a}{k_a}([R_{a\varphi}(0)-R_{a\varphi}(\tau)]u_1-[R_{\varphi a}(0)-R_{\varphi a}(\tau)]u_2)\Big\}\times$$
$$\times e^{i(u_1+u_2)}\frac{du_1\,du_2}{u_1^2u_2^2}\Big]. \qquad (12.16)$$

Si les processus de modulation $\eta_a(t)$ et $\eta_\varphi(t)$ ne sont pas cohérents, on a $R_{a\varphi}(\tau)=R_{\varphi a}(\tau)\equiv 0$, l'expression (12.16) se simplifie alors et peut s'écrire comme le produit des fonctions de corrélation:

$$B^*(\tau)=\sigma_\xi^2 R_0(\tau)\,B_E(\tau)\,B_\psi(\tau)\cos\omega_0\tau \qquad (12.17)$$

ou encore

$$B^*(\tau)=B_\xi(\tau)\,B_E(\tau)\,B_\psi(\tau), \qquad (12.17')$$

où

$$B_E(\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{c_1}\int_{c_2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{\sigma_a}{k_a}\Big)^2(u_1^2+2R_a u_1u_2+u_2^2)\Big]\times$$
$$\times e^{i(u_1+u_2)}\frac{du_1\,du_2}{u_1^2u_2^2}, \qquad (12.18)$$

$$B_\psi(\tau)=e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2[1-R_\varphi(\tau)]}. \qquad (12.19)$$

Si $\sigma_\varphi=0$ on a $B_\psi(\tau)\equiv 1$ et (12.17) donne alors l'expression de la fonction de corrélation du bruit porteur, modulé seulement en amplitude; si $\sigma_a=0$ on a $B_E(\tau)\equiv 1$ et la formule (12.17) donne la fonction de corrélation du bruit porteur, modulé seulement en phase. Si dans la formule (12.17) on pose $R_0(\tau)\equiv 1$ et $\sigma_\xi^2=\frac{A_0^2}{2}$, on est ramené au cas d'une porteuse harmonique.

Les spectres énergétiques des signaux modulés par des processus aléatoires peuvent être obtenus à partir de (12.17) par transformation inverse de Fourier.

12.2. MODULATION D'AMPLITUDE

12.2.1. Porteuse harmonique. La fonction de corrélation d'une oscillation harmonique modulée en amplitude par un processus aléatoire normal stationnaire, pour une caractéristique du modulateur d'amplitude linéaire par morceaux, est donnée par (12.17) pour $\sigma_\xi^2=\frac{A_0^2}{2}$, $R_0(\tau)\equiv 1$ et $B_\psi(\tau)\equiv 1$, c'est-à-dire que l'on a:

$$B_{MA}^*(\tau)=\frac{A_0^2}{2}B_E(\tau)\cos\omega_0\tau, \qquad (12.20)$$

où $B_E(\tau)$ s'obtient par la formule (12.18).

Supposons que le spectre énergétique de la fonction de modulation $\eta_a(t)$ se trouve dans le domaine des fréquences basses, et la fréquence la plus basse du spectre dont on doit tenir compte est inférieure à la fréquence porteuse.

Pour le calcul de l'intégrale double dans le second membre de (12.18) il suffit d'utiliser le développement (7.73), les variables d'intégration se séparent alors et l'expression pour $B^*_{MA}(\tau)$ devient

$$B^*_{MA}(\tau)=\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sigma_a^{2r}R_a^r(\tau)}{k_a^{2r}r!}h_r^2, \tag{12.21}$$

où

$$h_r=\frac{i^r}{2\pi}\int\limits_C u^{r-2}e^{iu-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_a}{k_a}\right)^2u^2}du, \tag{12.22}$$

qui, compte tenu de (7.85), s'écrit

$$h_r=\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right)^{r-1}\varphi^{(r-2)}\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right), \tag{12.23}$$

avec

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$\varphi^{(r)}(x)$ est la dérivée r-ième de $\varphi(x)$, $r\geqslant 0$

$$\varphi^{(-1)}(x)=F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz;$$

$$\varphi^{(-2)}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}F(z)\,dz.$$

En portant (12.23) dans (12.21) on trouve

$$B^*_{MA}(\tau)=\frac{A_0^2\sigma_a^2}{2k_a^2}\cos\omega_0\tau\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left[\varphi^{(r-2)}\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right)\right]^2R_a^r(\tau). \tag{12.24}$$

Considérons d'abord le cas $\sigma_a\ll k_a$ où l'on peut négliger la surmodulation. On a

$$\varphi^{(-2)}\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right)\sim\frac{k_a}{\sigma_a},\quad \varphi^{(-1)}\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right)\sim 1,$$

en négligeant les autres termes de (12.24) (pour $r\geqslant 2$). Ainsi

$$B^*_{MA}(\tau)=\frac{A_0^2\sigma_a^2}{2k_a^2}\left[\frac{k_a^2}{\sigma_a^2}+R_a(\tau)\right]\cos\omega_0\tau=$$

$$=\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau+\frac{A_0^2\sigma_a^2}{2k_a^2}R_a(\tau)\cos\omega_0\tau. \tag{12.25}$$

Le spectre énergétique correspondant à $B^*_{MA}(\tau)$ est

$$F_{MA}(\omega) = 2A_0^2 \int_0^\infty \cos\omega_0\tau \cos\omega\tau \, d\tau +$$

$$+ \frac{2A_0^2\sigma_a^2}{k_a^2} \int_0^\infty R_a(\tau) \cos\omega_0\tau \cos\omega\tau \, d\tau = \pi A_0^2 \delta(\omega - \omega_0) +$$

$$+ \frac{A_0^2\sigma_a^2}{k_a^2} \int_0^\infty R_a(\tau) \cos(\omega_0 - \omega)\tau \, d\tau + \frac{A_0^2\sigma_a^2}{k_a^2} \int_0^\infty R_a(\tau) \cos(\omega_0 + \omega)\tau \, d\tau. \tag{12.26}$$

En supposant que la largeur du spectre énergétique $F_a(\omega)$ du processus aléatoire de modulation est bien inférieure à ω_0, on peut négliger le dernier terme dans le second membre de (12.26) et écrire le spectre de l'oscillation modulée en amplitude sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2\pi} F_{MA}(\omega) = \frac{A_0^2}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A_0\sigma_a}{2k_a}\right)^2 F_a(\omega_0 - \omega). \tag{12.27}$$

L'expression (12.26) montre alors que pour $\sigma_a \ll k_a$ le spectre d'une oscillation modulée en amplitude est la superposition sur sa raie spectrale discrète pour $\omega = \omega_0$ du spectre continu du processus de modulation, de plus ce spectre est multiplié par le coefficient constant $\left(\frac{A_0\sigma_a}{2k_a}\right)^2$ et se trouve déplacé de ω_0 dans le domaine des hautes fréquences. Cette relation linéaire entre les spectres de l'oscillation modulée et du processus de modulation est caractéristique pour le cas d'une très faible modulation [comparer également (12.27) et (5.129)].

L'autre cas limite correspond à $\sigma_a \gg k_a$, c'est-à-dire à une forte surmodulation (temps relatif de surmodulation voisin de $1/2$). Dans ce cas, en utilisant la formule (8) de l'annexe V, il serait utile d'écrire les coefficients h_r comme suit:

$$h_r = \frac{1}{2} \left(\frac{k_a\sqrt{2}}{\sigma_a}\right)^{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right)^m}{m!\,\Gamma\left(1 - \frac{r+m-1}{2}\right)} \tag{12.28}$$

et se limiter dans la somme sur m au premier terme. A partir de (12.21) et (12.28) on trouve alors

$$B^*_{MA}(\tau) = \frac{A_0^2\sigma_a^2}{2k_a^2} \cos\omega_0\tau \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^{r-3}}{r!\,\Gamma^2\left(1 - \frac{r-1}{2}\right)} R_a^r. \tag{12.29}$$

Comme

$$\Gamma\left(1-\frac{(r-1)}{2}\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, & r=0,\\ 1, & r=1,\\ \infty, & r=2n+1,\\ (-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}\sqrt{\pi}}{(2n-3)\,!!}, & r=2n,\ n=1,2,\ldots,\end{cases} \qquad (12.29')$$

on a

$$B^*_{MA}(\tau)=\frac{A_0^2\sigma_a^2}{2k_a^2}\cos\omega_0\tau\left\{\frac{1}{2\pi}+\frac{R_a(\tau)}{4}+\frac{R_a^2(\tau)}{4\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(2n-3)\,!!]^2}{2(n)\,!}R_a^{2n}(\tau)\right\}. \qquad (12.30)$$

L'expression (12.30) ne diffère de (7.31) que par le facteur se trouvant devant l'accolade, alors, compte tenu de (7.32), on peut l'écrire sous la forme suivante:

$$B^*_{MA}(\tau)=\frac{A_0^2\sigma_a^2}{4\pi k_a^2}\left\{\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin R_a(\tau)\right]R_a(\tau)+\sqrt{1-R_a^2(\tau)}\right\}\cos\omega_0\tau. \qquad (12.31)$$

En comparant (12.31) et (7.32) on voit que pour une forte surmodulation le spectre d'une oscillation modulée en amplitude coïncide avec le spectre du processus aléatoire de modulation ayant traversé un détecteur linéaire, ce spectre se trouve multiplié par la constante $\frac{A_0^2}{2k_a^2}$ et déplacé de ω_0 dans le domaine des hautes fréquences. A la différence du cas d'une surmodulation faible la modulation est ici une transformation essentiellement non linéaire faisant apparaître dans le spectre de l'oscillation modulée des harmoniques combinatoires. Par conséquent le spectre de la porteuse modulée est un peu plus large que celui du processus de modulation.

Notons que de la même manière on peut obtenir des formules analogues aux formules (12.26) et (12.31), mais donnant les expressions de la fonction de corrélation d'une porteuse modulée en amplitude pour le cas où le processus de modulation est un processus aléatoire normal stationnaire *à bande étroite*, dont le spectre se trouve concentré au voisinage de la pulsation ω_m, la largeur du spectre étant telle que $\Delta \ll \omega_m$. Lorsque la surmodulation est négligeable on a

$$B^*_{MA}(\tau)=\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau+\frac{A_0^2\sigma_a^2}{4k_a^2}R_{a0}(\tau)\cos(\omega_0+\omega_m)\tau+$$

$$+\frac{A_0^2\sigma_a^2}{4k_a^2}R_{a0}(\tau)\cos(\omega_0-\omega_m)\tau, \qquad (12.32)$$

où $R_{a0}(\tau)$ est l'enveloppe du coefficient de corrélation du processus de modulation.

L'expression (12.32) montre que le spectre énergétique du processus de modulation se trouve transposé intact (multiplié par le facteur constant $\frac{A_0^2}{2k_a^2}$) aux pulsations $\omega_0 + \omega_m$ et $\omega_0 - \omega_m$. En cas de forte surmodulation, le spectre énergétique de l'oscillation modulée, considéré dans la bande Δ_1 au voisinage de la porteuse ω_0, cette bande satisfaisant aux inégalités $\Delta < \Delta_1 \ll \omega_0 - \omega_m$, peut être obtenu par transformation de Fourier d'une fonction de corrélation de la forme [voir (7.36)]

$$B^*_{MA}(\tau) = \frac{A_0^2\sigma_a^2}{k_a^2}\{2E[R_{a0}(\tau)] - [1 - R_{a0}^2(\tau)]K[R_{a0}(\tau)]\}\cos\omega_0\tau. \quad (12.32')$$

12.2.2. Bruit porteur. Revenons au cas général, lorsque la porteuse $\xi(t)$ est un processus normal stationnaire à bande étroite. En vertu de (12.17) et (12.17') la fonction de corrélation du bruit porteur modulé en amplitude par un processus également normal et stationnaire, pour une caractéristique linéaire par morceaux du modulateur, est

$$B^*_{MA}(\tau) = B_\xi(\tau)\, B_E(\tau) \quad (12.33)$$

ou

$$B^*_{MA}(\tau) = \sigma_\xi^2 R_0(\tau)\, B_E(\tau)\cos\omega_0\tau, \quad (12.33')$$

où $\sigma_\xi^2 R_0(\tau)$ est l'enveloppe de la fonction de corrélation de la porteuse; $B_E(\tau)$ la fonction de corrélation donnée par la formule (12.18) et dépendant de la fonction de corrélation du processus de modulation.

Tout comme dans le paragraphe précédent, nous allons étudier séparément le cas d'une modulation faible et celui d'une forte surmodulation. Dans le premier cas ($\sigma_a \ll k_a$), compte tenu de (12.25), on obtient à partir de (12.33')

$$B^*_{MA}(\tau) = \sigma_\xi^2 R_0(\tau)\cos\omega_0\tau + \frac{\sigma_\xi^2\sigma_a^2}{k_a^2} R_a(\tau) R_0(\tau)\cos\omega_0\tau. \quad (12.34)$$

Le spectre énergétique du processus de modulation s'obtient par transformation de Fourier de l'expression (12.34):

$$F_{MA}(\omega) = 4\sigma_\xi^2 \int_0^\infty R_0(\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\, d\tau +$$

$$+ \frac{4\sigma_\xi^2\sigma_a^2}{k_a^2}\int_0^\infty R_a(\tau) R_0(\tau)\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= F_\xi(\omega) + \frac{2\sigma_\xi^2\sigma_a^2}{k_a^2}\int_0^\infty R_a(\tau)R_0(\tau)\cos(\omega_0-\omega)\tau\,d\tau +$$

$$+ \frac{2\sigma_\xi^2\sigma_a^2}{k_a^2}\int_0^\infty R_a(\tau)R_0(\tau)\cos(\omega_0+\omega)\tau\,d\tau. \qquad (12.35)$$

Si la largeur de bande du spectre énergétique $F_a(\omega)$ du processus de modulation est bien inférieure à ω_0 on peut négliger le dernier terme dans (12.35). En utilisant alors la relation suivante de la théorie des intégrales de Fourier

$$\int_0^\infty B_1(\tau)B_2(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty F_1(u)F_2(\omega-u)\,du \qquad (12.36)$$

et compte tenu de la propriété bien connue de la transformée de Fourier de l'enveloppe de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire à bande étroite (voir § 4.2.4), on peut écrire comme suit le spectre énergétique d'un bruit porteur modulé en amplitude:

$$F_{MA}(\omega) = F_\xi(\omega) + \frac{1}{2\pi k_a^2}\int_{-\infty}^\infty F_a(u)F_\xi(\omega_0-\omega-u)\,du =$$

$$= F_\xi(\omega) + \frac{1}{2\pi k_a^2}\int_{-\infty}^\infty F_a(\omega_0-v)F_\xi(v-\omega)\,dv, \quad \sigma_a \ll k_a \qquad (12.37)$$

Ainsi lorsque la surmodulation est négligeable, le spectre énergétique d'un bruit porteur s'obtient par superposition du spectre de la porteuse et de la convolution (avec un coefficient de proportionnalité égal à k_a^{-2}) de ce spectre avec le spectre du processus de modulation déplacé de ω_0 dans le domaine des hautes fréquences.

En cas de forte surmodulation ($\sigma_a \gg k_a$) compte tenu de (12.31) on obtient à partir de (12.33')

$$B_{MA}^*(\tau) = \frac{\sigma_\xi^2\sigma_a^2}{4\pi k_a^2}R_0(\tau)\left\{\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin R_a(\tau)\right]R_a(\tau) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1-R_a^2(\tau)}\right\}\cos\omega_0\tau. \qquad (12.38)$$

En vertu de (12.38), (12.36) et (7.32), pour une forte surmodulation le spectre énergétique d'un bruit porteur modulé en amplitude s'obtient par convolution du spectre de la porteuse et du spectre du processus de modulation ayant traversé un détecteur linéaire.

On peut également utiliser les formules (12.37) et (12.38) lorsque le processus de modulation est *à bande étroite*. Dans ce cas pour une surmodulation forte (considérant seulement la bande de fréquences se trouvant au voisinage de la fréquence centrale) l'expression

(12.38) s'écrit alors comme suit:

$$B^*_{MA}(\tau) = \frac{\sigma_\xi^2\sigma_a^2}{k_a^2}\{2E[R_{a0}(\tau)] - [1 - R_{a0}^2(\tau)]K[R_{a0}(\tau)]\} R_0(\tau)\cos\omega_0\tau. \tag{12.39}$$

On voit que le spectre énergétique d'un bruit porteur modulé en amplitude s'obtient par convolution du spectre de la porteuse et du spectre de l'enveloppe du processus de modulation.

12.3. MODULATION DU PARAMÈTRE ANGULAIRE

12.3.1. Modulation de phase d'une porteuse harmonique. Soit d'abord une porteuse harmonique. La fonction de corrélation d'une oscillation harmonique modulée en phase par un processus aléatoire normal stationnaire. pour une caractéristique linéaire du modulateur de phase [voir (12.11)], est donnée par la formule (12.17) avec

$$\sigma_\xi^2 = \frac{A_0^2}{2}, \quad R_0(\tau) \equiv 1, \quad B_E(\tau) \equiv 1,$$

c'est-à-dire

$$B^*_{M\varphi}(\tau) \equiv \frac{A_0^2}{2} B_\psi(\tau)\cos\omega_0\tau \equiv \frac{A_0^2}{2} e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2[1-R_\varphi(\tau)]}\cos\omega_0(\tau). \tag{12.40}$$

En comparant (12.40) et (5.125) on voit que les expressions de la fonction de corrélation étudiée et de la fonction de corrélation d'une oscillation harmonique après la traversée d'une ligne à retard aléatoire normalement distribué (après avoir remplacé les indices η par φ pour $k_\varphi = \omega_0$) sont identiques. C'est pourquoi en étudiant le spectre énergétique d'une oscillation modulée en phase par un processus normal on peut utiliser les résultats du § 5.4.2.

Supposons que le spectre énergétique de la fonction de modulation $\eta_\varphi(t)$ soit à basse fréquence et que la largeur de ce spectre soit bien inférieure à la pulsation porteuse ω_0. Alors on déduit directement de (5.127) que le spectre énergétique $F_{M\varphi}(\omega)$ d'une oscillation harmonique modulée en phase s'écrit

$$F_{M\varphi}(\omega) = \pi A_0^2 e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2}\delta(\omega-\omega_0) + \\ + A_0^2 e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2}\int_0^\infty [e^{k_\varphi^2\sigma_\varphi^2 R_\varphi(\tau)} - 1]\cos(\omega-\omega_0)\tau\, d\tau. \tag{12.41}$$

Le premier terme de (12.41) correspond à la raie discrète d'une porteuse non modulée (dont l'intensité est affaiblie de $\exp[-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2]$ fois), et le second à la partie continue du spectre énergétique.

Pour $k_\varphi\sigma_\varphi \gg 1$ l'intensité de la raie discrète de la porteuse est négligeable, et la courbe de la partie continue du spectre énergétique tend asymptotiquement vers la forme gaussienne [voir (5.128)] :

$$F_{M\varphi}(\omega) \sim \frac{A_0^2}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{k_\varphi\sigma_\varphi\omega_{1\varphi}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2k_\varphi^2\sigma_\varphi^2\omega_{1\varphi}^2}}, \qquad (12.42)$$

où $\omega_{1\varphi}^2 = -R''_\varphi(0)$. La largeur de bande de ce spectre est égale à $k_\varphi\sigma_\varphi\omega_{1\varphi}\sqrt{2\pi}$.

Si $k_\varphi\sigma_\varphi \ll 1$, on obtient en vertu de (5.129)

$$F_{M\varphi}(\omega) \approx \pi A_0^2\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A_0^2k_\varphi^2}{2} F_\varphi(\omega-\omega_0), \qquad (12.43)$$

où $F_{M\varphi}(\omega)$ est le spectre énergétique du processus de modulation.

Ainsi pour $k_\varphi\sigma_\varphi \ll 1$ le spectre énergétique d'une oscillation harmonique, modulée en phase par un processus normal, est la superposition du spectre discret de la porteuse et du spectre du processus de modulation déplacé de ω_0 dans le domaine des hautes fréquences.

12.3.2. Modulation de phase d'un bruit porteur. A partir de (12.17) on trouve pour $B_E(\tau) \equiv 1$ l'expression de la fonction de corrélation d'un bruit porteur modulé en phase par un processus aléatoire normal stationnaire, soit :

$$B^*_{M\varphi}(\tau) = \sigma_\xi^2 R_0(\tau)\, e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2[1-R_\varphi(\tau)]} \cos\omega_0\tau. \qquad (12.44)$$

En conservant les hypothèses faites plus haut sur le spectre du processus de modulation $\eta_\varphi(t)$ et compte tenu de ce que $R_0(\tau)$ est une fonction variant lentement par rapport à $\cos\omega_0\tau$, on obtient par transformation de Fourier à partir de (12.44) la formule suivante pour le spectre énergétique d'un bruit porteur modulé en phase :

$$F_{M\varphi}(\omega) = 2\sigma_\xi^2 \int_0^\infty R_0(\tau)\, e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2[1-R_\varphi(\tau)]} \cos(\omega-\omega_0)\tau\, d\tau. \qquad (12.45)$$

Notons qu'à la différence du cas d'une porteuse harmonique, l'intégrale (12.45) est également convergente pour $\omega = \omega_0$ ce qui montre qu'il n'y a pas de composante discrète dans le spectre d'un bruit porteur modulé.

Pour $k_\varphi\sigma_\varphi \gg 1$ on peut développer l'exposant de l'exponentielle dans la fonction sous l'intégrale de (12.45) en série de Taylor. En ne conservant que les deux premiers termes on a

$$F_{M\varphi}(\omega) \sim 2\sigma_\xi^2 \int_0^\infty R_0(\tau)\, e^{-\frac{k_\varphi^2\sigma_\varphi^2\omega_{1\varphi}^2}{2}\tau^2} \cos(\omega-\omega_0)\tau\, d\tau. \qquad (12.46)$$

Si le spectre énergétique d'un bruit porteur est une courbe de Gauss

$$F_\xi(\omega)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\beta}\sigma_\xi^2 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}}, \quad \beta\ll\omega_0,$$

où β ne diffère de la largeur de bande du spectre que par le facteur $\sqrt{\pi}$, on a [voir (5.42′)]

$$R_0(\tau)=e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}.$$

On trouve alors à partir de (12.46)

$$F_{M\varphi}(\omega)\sim 2\sigma_\xi^2\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2}\left(-\frac{1}{2}+k_\varphi^2\sigma_\varphi^2\frac{\omega_{1\varphi}^2}{\beta^2}\right)\tau^2}\cos(\omega-\omega_0)\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{2\sigma_\xi^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+2k_\varphi^2\sigma_\varphi^2\omega_{1\varphi}^2/\beta^2}}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2(1+2k_\varphi\sigma_\varphi^2\omega_{1\varphi}^2/\beta^2)}}. \quad (12.47)$$

Ainsi lorsque le spectre du bruit porteur est gaussien, pour $k_\varphi\sigma_\varphi\gg 1$ le spectre énergétique de la porteuse modulée en phase est également gaussien, indépendamment du spectre du processus de modulation.

Considérons l'autre cas limite lorsque $k_\varphi\sigma_\varphi\ll 1$. En développant l'exponentielle dans la fonction sous l'intégrale de (12.45) en série de Taylor, en ne conservant que les deux premiers termes et en négligeant $k_\varphi^2\sigma_\varphi^2$ par rapport à l'unité, on obtient

$$F_{M\varphi}(\omega)\approx 2\sigma_\xi^2\int_0^\infty R_0(\tau)\,[1+k_\varphi^2\sigma_\varphi^2R_\varphi(\tau)]\cos(\omega-\omega_0)\tau\,d\tau=$$

$$=F_\xi(\omega)+2k_\varphi^2\sigma_\varphi^2\sigma_\xi^2\int_0^\infty R_0(\tau)\,R_\varphi(\tau)\cos(\omega-\omega_0)\tau\,d\tau$$

ou encore, compte tenu de (12.36),

$$F_{M\varphi}(\omega)\approx F_\xi(\omega)+\frac{k_\varphi^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_\varphi(\omega_0-v)\,F_\xi(v-\omega)\,dv. \quad (12.48)$$

Par conséquent, pour $k_\varphi\sigma_\varphi\ll 1$ le spectre énergétique d'un bruit porteur. modulé en phase par un processus aléatoire normal stationnaire est la superposition du spectre de la porteuse et de la convolution (avec le coefficient de proportionnalité k_φ^2) de ce spectre avec le spectre du processus de modulation déplacé de ω_0 dans le domaine des hautes fréquences.

12.3.3. Modulation de fréquence. Considérons le spectre énergétique d'une oscillation harmonique, modulée en fréquence par un processus aléatoire normal stationnaire $\eta_\varphi(t)$. Dans ce cas la phase

$\psi(t)$ est égale à l'intégrale indéfinie de $\eta_\varphi(t)$

$$\psi(t) = k_{MF} \int_0^t \eta_\varphi(t)\, dt$$

et n'est donc pas un processus aléatoire stationnaire. C'est pourquoi les formules obtenues au § 12.1 ne peuvent en toute rigueur être appliquées à l'étude du spectre énergétique d'une oscillation modulée en fréquence. Cependant on peut faire correspondre à $\psi(t)$ un certain processus aléatoire stationnaire dont le spectre énergétique coïncide avec la *moyenne temporelle* du spectre énergétique du processus aléatoire non stationnaire $\psi(t)$, égale en vertu de (4.158) à $\frac{F_\varphi(\omega)}{\omega^2}$ [si $F_\varphi(\omega) = 0(\omega^2)$ pour $\omega \to 0$]. Le spectre énergétique $F_{MF}(\omega)$ d'une oscillation modulée en fréquence par un processus aléatoire normal peut être obtenu à partir de (12.41) en remplaçant k_φ par k_{MF} et $\sigma_\varphi^2 R_\varphi(\tau)$ par $\sigma_{MF}^2 R_{MF}(\tau)$, de plus

$$\sigma_{MF}^2 R_{MF}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{F_\varphi(\omega)}{\omega^2} \cos \omega\tau\, d\omega \qquad (12.49)$$

et

$$\sigma_{MF}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{F_\varphi(\omega)}{\omega^2}\, d\omega < \infty. \qquad (12.49')$$

Comme dans le cas de la modulation de phase, on peut étudier deux cas particuliers. Pour $k_{MF}\,\sigma_{MF} \gg 1$ la courbe du spectre énergétique d'une porteuse harmonique modulée en fréquence tend vers une courbe gaussienne [comparer avec (12.42)] :

$$F_{MF}(\omega) \sim \frac{A_0^2}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{k_{MF}\sigma_\varphi} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2k_{MF}^2\sigma_{MF}^2}}. \qquad (12.50)$$

et pour $k_{MF}\,\sigma_{MF} \ll 1$

$$F_{MF}(\omega) \approx \pi A_0^2 \delta(\omega-\omega_0) + \frac{A_0^2 k_{MF}^2}{2} \frac{F_\varphi(\omega-\omega_0)}{(\omega-\omega_0)^2}. \qquad (12.51)$$

Lorsque $k_{MF} \to 0$ (absence de modulation), il ne reste dans le spectre (12.51) que la raie discrète de la fréquence porteuse.

De même que dans le cas d'une oscillation harmonique modulée en fréquence, le spectre énergétique d'un bruit porteur modulé en fréquence par un processus aléatoire normal stationnaire peut être obtenu à partir de (12.45) en remplaçant k_φ par k_{MF} et $\sigma_\varphi^2 R_\varphi(\tau)$ par $\sigma_{MF}^2 R_{MF}(\tau)$ [voir (12.49)]. Pour les cas limites les formules

(12.46) et (12.48) donnent

$$F_{MF}(\omega) \sim 2\sigma_\xi^2 \int_0^\infty R_0(\tau)\, e^{-\frac{k_{MF}^2\tau^2}{2}} \cos(\omega-\omega_0)\tau\, d\tau, \quad k_{MF}\sigma_{MF} \gg 1, \qquad (12.52)$$

$$F_{MF}(\omega) \approx F_\xi(\omega) + \frac{k_{MF}^2}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varphi(\omega_0 - v)\, F_\xi(v-\omega)\, \frac{dv}{(v-\omega_0)^2},$$

$$k_{MF}\sigma_{MF} \ll 1. \qquad (12.53)$$

12.4. CHANGEMENT DE FRÉQUENCE

12.4.1. Mélangeur. Comme nous l'avons déjà noté au début de ce chapitre, on réalise un changement de fréquence en appliquant la somme de deux processus à un système non linéaire non inertiel, appelé mélangeur. Le processus à la sortie du mélangeur contient une composante proportionnelle à l'un des processus d'entrée dont le spectre se trouve déplacé dans le domaine désiré des fréquences. Dans la modulation d'amplitude, le spectre du processus de modulation se trouve déplacé dans le domaine de la fréquence *porteuse*.

Considérons tout d'abord l'expression générale de la fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un mélangeur de caractéristique $y = f(x)$, lorsqu'à son entrée on applique la somme $\xi(t) + \eta(t)$ de processus stationnaires indépendants de moyenne nulle de variances σ_ξ^2, σ_η^2 et de coefficients de corrélation $R_\xi(\tau)$ et $R_\eta(\tau)$. En utilisant la méthode des intégrales curvilignes (voir § 6.1.3), avec les restrictions ci-dessus on obtient

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1}\int_{C_2} g(iu_1)\, g(iu_2)\, \Theta_{2\xi}(u_1, u_2, \tau) \times$$

$$\times\, \Theta_{2\eta}(u_1, u_2, \tau)\, du_1\, du_2, \qquad (12.54)$$

où $g(iu)$ est une fonction liée à $f(x)$ par l'intégrale curviligne (6.17).

Si de plus on suppose que $\xi(t)$ est une porteuse harmonique d'amplitude constante A_0 et de pulsation ω_0 et que $\eta(t)$ est un processus aléatoire normal de modulation, en vertu de (12.54) on a (voir § 7.2.1)

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \sigma_\eta^{2k}}{k!} R_\eta^k(\tau)\, h_{nk}^2 \cos n\omega_0\tau, \qquad (12.55)$$

où

$$h_{nk} = \frac{i^{n+k}}{2\pi} \int_C g(iu)\, u^k J_n(A_0 u)\, e^{-\frac{\sigma_\eta^2 u^2}{2}}\, du \qquad (12.56)$$

et

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2, \quad n \geqslant 1.$$

Supposons que la largeur du spectre Δ_η du processus de modulation soit bien inférieure à ω_0 et qu'après le mélangeur il y ait un filtre accordé sur la pulsation ω_0 dont la bande passante Δ est telle que $\Delta_\eta < \Delta \ll \omega_0$. Les conditions imposées permettent, lors du calcul du spectre énergétique du processus filtré, de ne prendre la transformée de Fourier que des termes de la somme (12.55) correspondant à $n = 1$. Ainsi on obtient l'expression suivante pour le spectre énergétique d'une porteuse harmonique modulée en amplitude à la sortie du système mélangeur — filtre:

$$F_{\text{MA}}(\omega) = 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_\eta^{2k} h_{1k}^2}{k!} \int_0^{\infty} R_\eta^k(\tau) \cos\omega_0\tau \cos\omega\tau \, d\tau$$

ou, tenant compte du fait que $\Delta_\eta \ll \omega_0$, on a

$$F_{\text{MA}}(\omega) = 4\pi h_{10}^2 \delta(\omega - \omega_0) + h_{11}^2 F_\eta(\omega_0 - \omega) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma_\eta^{2k}}{k!} h_{1k}^2 4 \int_0^{\infty} R_\eta^k(\tau) \cos(\omega_0 - \omega)\tau \, d\tau. \quad (12.57)$$

Dans la formule (12.57) le premier terme correspond à la raie discrète à la fréquence porteuse, le second au déplacement dans le domaine de la pulsation ω_0 du spectre du processus de modulation multiplié par un certain facteur constant, le dernier terme provient des déformations non linéaires dans la bande de fréquences au voisinage de la porteuse.

Si la caractéristique du mélangeur $g(iu) = \frac{1}{(iu)^2}$ est linéaire par morceaux, compte tenu de (12.56) on trouve (voir annexe V)

$$h_{1k} = \frac{i^{k-1}}{2\pi} \int_C u^{k-2} J_1(A_0 u)\, e^{-\frac{\sigma_\eta^2 u^2}{2}} du =$$
$$= \frac{A_0}{2^{\frac{k}{2}+1} \sigma_\eta^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{k}{2}, 2, -\frac{A_0^2}{2\sigma_\eta^2}\right). \quad (12.58)$$

Si le rapport de la puissance de la porteuse à la puissance du processus de modulation est petit, c'est-à-dire si $\frac{A_0^2}{2\sigma_\eta^2} \ll 1$, la fonction hypergéométrique dans (12.58) est voisine de l'unité (aux ter-

mes de l'ordre de $\frac{A_0^2}{2\sigma_\eta^2}$ près), on a alors [voir (12.29')]

$$\sigma_\eta^{2k} h_{1k}^2 \approx \frac{A_0^2}{2^{k+2}\Gamma^2\left(1-\frac{k}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{A_0^2}{4}, & k=0, \\ \frac{A_0^2}{8\pi}, & k=1, \\ 0, & k=2n, \\ \frac{[(2n-1)!!]^2}{2^{4n+3}\pi} A_0^2, & k=2n+1, \\ & n=1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

Ainsi, pour $\frac{A_0^2}{2\sigma_\eta^2} \ll 1$

$$F_{MA}(\omega) = \pi A_0^2 \delta(\omega-\omega_0) + \frac{A_0^2}{8\pi\sigma_\eta^2} F_\eta(\omega-\omega_0) +$$

$$+ \frac{A_0^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2}{2^{4n}(2n+1)!} \int_0^\infty R_\eta^{2n+1}(\tau) \cos(\omega-\omega_0)\tau\, d\tau. \quad (12.59)$$

Si le rapport de la puissance de la porteuse à la puissance du processus de modulation est grand, c'est-à-dire si $A_0^2 \gg \sigma_\eta^2$, en utilisant le développement asymptotique de la fonction hypergéométrique (voir annexe V), on obtient à partir de (12.58) (aux termes de l'ordre de $\frac{\sigma_\eta^2}{A_0^2}$ près)

$$h_{1k}^2 \sim \left[4A_0^{2k-2}\Gamma^2\left(1-\frac{k}{2}\right)\Gamma^2\left(2-\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}.$$

On a alors

$$F_{MA}(\omega) \sim \pi A_0^2 \delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{\pi^2} F_\eta(\omega_0-\omega). \quad (12.60)$$

Considérons maintenant un bruit porteur normalement distribué. En vertu de (12.54) on a [voir (7.75)]

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^2}{k!} [\sigma_\eta^2 R_\eta(\tau) + \sigma_\xi^2 R_\xi(\tau)]^k, \quad (12.61)$$

où

$$h_k = \frac{i^k}{2\pi} \int_C g(iu)\, u^k e^{-\frac{(\sigma_\eta^2+\sigma_\xi^2)u^2}{2}} du. \quad (12.61')$$

Comme $R_\xi(\tau) = R_0(\tau) \cos\omega_0\tau$, on a en vertu de (12.61)

$$B_\zeta(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{h_k^2}{k!} \binom{n}{k} \sigma_\xi^{2n} \sigma_\eta^{2(k-n)} R_0^n(\tau) R_\eta^{k-n}(\tau) \cos^n\omega_0\tau. \quad (12.62)$$

Remplaçons les puissances des cosinus par la somme des cosinus des arcs multiples [voir (7.17) et (7.18)] et réunissons les termes contenant cos $\omega_0\tau$. Désignons par $B_{\zeta 1}(\tau)$ la somme de ces composantes, il vient

$$B_{\zeta 1}(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\frac{h_k^2}{k!}\frac{\binom{2n-1}{k}\binom{2n-1}{n}}{2^{2n-2}}\sigma_\xi^{2(2n-1)}\times$$
$$\times\sigma_\eta^{2(k-2n+1)}R_0^{2n-1}(\tau)R_\eta^{k-2n+1}(\tau)\cos\omega_0\tau. \qquad (12.63)$$

En prenant la transformée de Fourier de $B_{\zeta 1}(\tau)$ on obtient le spectre énergétique $F_{MA}(\omega)$ du processus à la sortie du système mélangeur — filtre (la bande passante Δ du filtre satisfait aux inégalités $\Delta \ll \omega_0$ et $\Delta > \Delta_\eta$, $\Delta > \Delta_\xi$):

$$F_{MA}(\omega)=h_1^2F_\xi(\omega)+\frac{h_1^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_\eta(\omega_0-v)F_\xi(v-\omega_0)\,dv+$$
$$+2\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{n=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\frac{h_k^2}{k!}\frac{\binom{2n-1}{k}\binom{2n-1}{n}}{2^{2n-2}}\times$$
$$\times\sigma_\xi^{2(2n-1)}\sigma_\eta^{2(k-2n+1)}\int_0^{\infty}R_0^{2n-1}(\tau)R_\eta^{k-2n+1}(\tau)\cos(\omega-\omega_0)\tau\,d\tau. \qquad (12.64)$$

Le premier terme dans (12.64) reproduit (à une certaine échelle) le spectre énergétique d'un bruit porteur, le second est proportionnel à la convolution de ce spectre avec le spectre du processus de modulation et le dernier terme provient des déformations non linéaires au voisinage de la porteuse.

Pour une caractéristique du mélangeur $g(iu)=\frac{1}{(iu)^2}$ linéaire par morceaux, on trouve à partir de (12.62) [voir (7.77)]

$$h_1=\frac{1}{2},\qquad h_k=\frac{i^{k-2}}{2\pi}\int_C u^{k-2}e^{-\frac{(\sigma_\eta^2+\sigma_\xi^2)u^2}{2}}du=(\sigma_\eta^2+\sigma_\xi^2)^{-\frac{k-1}{2}}H_{k-2}(0)=$$
$$=\begin{cases}(-1)^{r-1}(2r-3)!!\,(\sigma_\eta^2+\sigma_\xi^2)^{-\frac{2r-1}{2}}, & k=2r,\\ 0, & k=2r+1,\ r\geqslant 1.\end{cases} \qquad (12.65)$$

12.4.2. Modulateur équilibré. Pour diminuer les déformations dues à la non-linéarité dans les mélangeurs on utilise le montage du *modulateur équilibré* représenté sur la figure 12.1. Le processus $\zeta(t)$ à la sortie d'un modulateur équilibré est

$$\zeta(t)=f[\eta(t)+\xi(t)]-f[\eta(t)-\xi(t)]. \qquad (12.66)$$

Supposant toujours $\xi(t)$ et $\eta(t)$ stationnaires et indépendants et utilisant la méthode des intégrales curvilignes on peut écrire comme suit la fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$:

$$B_\zeta(\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{c_1}\int_{c_2} g(iu_1)\,g(iu_2)\,\Theta_{2\eta}(u_1, u_2, \tau)\times$$
$$\times[\Theta_{2\xi}(u_1, u_2, \tau)-\Theta_{2\xi}(-u_1, u_2, \tau)-\Theta_{2\xi}(u_1, -u_2, \tau)+$$
$$-\Theta_{2\xi}(-u_1, -u_2, \tau)]\,du_1\,du_2. \qquad (12.67)$$

Si de plus on suppose que $\xi(t)$ est une porteuse harmonique, et $\eta(t)$ un processus de modulation normalement distribué, on obtient à partir de (12.67) [voir (7.72)]

$$B_\zeta(\tau)=\frac{1}{\pi^2}\int_{c_1}\int_{c_2} g(iu_1)\,g(iu_2)\exp\left\{-\frac{\sigma_\eta^2}{2}[u_1^2-2R_\eta(\tau)\,u_1u_2+u_2^2]\right\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-1]\,J_n(A_0u_1)\,J_n(A_0u_2)\cos n\omega_0\tau\right\}du_1\,du_2,$$

d'où

$$B_\zeta(\tau)=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_\eta^{2k}h_{2n-1,\,k}^2}{k!}R_\eta^k(\tau)\cos(2n-1)\,\omega_0\tau. \qquad (12.68)$$

avec h_{nk} donnés par la formule (12.56).

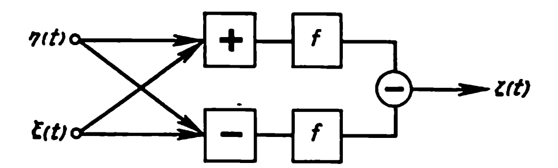


Fig. 12.1. Modulateur équilibré

A la différence de (12.55), l'expression obtenue de la fonction de corrélation est la somme des seuls harmoniques impairs de ω_0, ce qui correspond à l'absence de raies spectrales dans le domaine des vidéofréquences et au voisinage des harmoniques pairs de la porteuse.

Pour un bruit porteur on obtient à partir de (12.67)

$$B_\zeta(\tau)=\frac{1}{\pi^2}\int_{c_1}\int_{c_2} g(iu_1)\,g(iu_2)\,e^{-\frac{\sigma_\xi^2+\sigma_\eta^2}{2}(u_1^2+u_2^2)}\times$$
$$\times\,e^{-B_\eta(\tau)u_1u_2}\,\mathrm{sh}\,[B_\xi(\tau)\,u_1u_2]\,du_1\,du_2,$$

d'où l'on tire

$$B_\zeta(\tau)=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_\eta^k\sigma_\xi^{2n-1}}{k!\,(2n-1)!}h_{2n-1+k}^2R_\xi^{2n-1}(\tau)\,R_\eta^k(\tau) \qquad (12.69)$$

avec h_r donnés par la formule (12.61').

Comme $R_\xi(\tau)=R_0(\tau)\cos\omega_0\tau$ on voit de nouveau qu'au contraire de (12.62) l'expression (12.69) contient seulement des harmoniques impairs de ω_0.

12.4.3. Modulateur en anneau. On peut encore exclure certaines composantes spectrales à la sortie du modulateur en compliquant son schéma. L'une des méthodes possibles consiste à réunir deux modulateurs équilibrés. On arrive ainsi au schéma du modulateur *en anneau*. Le processus $\zeta(t)$ à la sortie de ce modulateur est égal à

$$\zeta(t) = f[\eta(t) + \xi(t)] - f[\eta(t) - \xi(t)] + f[(-\eta(t) - \xi(t)] - \\ - f[\xi(t) - \eta(t)]. \qquad (12.70)$$

D'une manière analogue à (12.67), on peut écrire comme suit la fonction de corrélation du processus $\zeta(t)$

$$B_\zeta(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{c_1} \int\limits_{c_2} g(iu_1) g(iu_2) \sum_{m,\, l,\, n,\, k=0,\, 1} \Theta_{2\xi}[(-1)^m u_1, \ (-1)^l u_2] \times \\ \times \Theta_{2\eta}[(-1)^n u_1, \ (-1)^k u_2] \, du_1 \, du_2. \qquad (12.71)$$

De plus si $\xi(t)$ est une porteuse harmonique, et $\eta(t)$ un processus de modulation normal, on déduit de (12.71)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{c_1} \int\limits_{c_2} g(iu_1) g(iu_2) e^{-\frac{\sigma_\eta^2}{2}(u_1^2+u_2^2)} \operatorname{sh}[B_\eta(\tau) u_1 u_2] \times \\ \times \left\{ \sum_{n=1} [(-1)^n - 1] J_n(A_0 u_1) J_n(A_0 u_2) \cos n\omega_0 \tau \right\} du_1 \, du_2,$$

d'où l'on arrive à

$$B_\zeta(\tau) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_\eta^{2k-1}}{(2k-1)!} h_{2n-1,\, 2k-1} R_\eta^{2k-1}(\tau) \cos(2n-1)\omega_0\tau, \qquad (12.72)$$

h_{nk} sont donnés par les formules (12.56).

A la différence de (12.68), l'expression obtenue pour la fonction de corrélation ne contient que des puissances impaires du coefficient de corrélation du processus de modulation.

Pour un bruit porteur on obtient à partir de (12.71)

$$B_\zeta(\tau) = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{c_1} \int\limits_{c_2} g(iu_1) g(iu_2) e^{-\frac{(\sigma_\xi^2+\sigma_\eta^2)}{2}(u_1^2+u_2^2)} \times \\ \times \operatorname{sh}[B_\xi(\tau) u_1 u_2] \operatorname{sh}[B_\eta(\tau) u_1 u_2] \, du_1 \, du_2.$$

d'où

$$B_\zeta(\tau) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_\xi^{2k-1} \sigma_\eta^{2n-1}}{(2k-1)!\,(2n-1)!} h_{2(n+k-1)}^2 R_\xi^{2k-1}(\tau) R_\eta^{2n-1}(\tau), \qquad (12.73)$$

h_r étant donnés par la formule (12.61').

Contrairement à (12.69), l'expression (12.73) ne contient que les puissances impaires du coefficient de corrélation du processus de modulation.

Problèmes

12.1. Montrer que le spectre énergétique d'une porteuse harmonique, modulée en amplitude par un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne

nulle et de spectre énergétique gaussien

$$F_a(\omega) = \frac{2\sigma_a^2\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}},$$

est égal, dans le cas d'une caractéristique linéaire par morceaux du détecteur d'amplitude, à

$$\frac{1}{2\pi} F_{MA}(\omega) = \frac{A_0^2}{2}\left[F\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right) + \frac{\sigma_a}{2k_a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k_a^2}{2\sigma_a^2}}\right]^2 \delta(\omega-\omega_0) +$$

$$+ \frac{A_0^2\sigma_a^2}{2\sqrt{\pi}\,\beta k_a^2}\left\{F^2\left(\frac{k_a}{\sigma_a}\right) e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}} +\right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!\sqrt{n}}\left[\varphi^{(n-2)}\left(\frac{k_a}{\sigma}\right)\right]^2 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{n\beta^2}}\right\}, \quad (1)$$

où $\varphi^{(r)}(x)$ est la dérivée d'ordre r de $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Montrer qu'en cas de forte surmodulation la puissance de la composante discrète du spectre est $\frac{\sigma_a^2}{\pi k_\varphi^2}$ fois supérieure à la puissance de cette composante en l'absence de surmodulation.

12.2. Soit une porteuse harmonique modulée en phase (pour une caractéristique linéaire du modulateur de phase) par un processus aléatoire normal stationnaire de moyenne nulle et dont la fonction de corrélation est

$$B_\varphi(\tau) = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha(\tau)}.$$

Montrer que le spectre énergétique de l'oscillation modulée est

$$F_\varphi(\omega) = \pi A_0^2 e^{-k_\varphi^2\sigma_\varphi^2}\delta(\omega-\omega_0) +$$

$$+ \frac{A_0^2}{\alpha} e^{-k_\sigma^2\sigma_\varphi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_\varphi^{2n}\sigma_\varphi^{2n}}{(n-1)!} \frac{1}{\left[n^2 + \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\alpha^2}\right]}. \quad (2)$$

12.3. Dans les conditions du problème précédent quant au processus de modulation, montrer que pour une porteuse modulée en fréquence, la formule du spectre énergétique devient

$$F_{MF}(\omega) = \frac{A_0^2}{\alpha} e^{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}(n+\lambda^2)}{n!\left[(n+\lambda^2)^2 + \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\alpha^2}\right]}, \quad (3)$$

où

$$\lambda = \frac{k_{MF}\sigma_\varphi}{\alpha}.$$

12.4. Montrer que pour une loi de distribution arbitraire d'un processus aléatoire stationnaire de modulation, les caractéristiques des modulateurs de phase et de fréquence étant linéaires, la courbe du spectre énergétique de la porteuse harmonique tend asymptotiquement (pour $k_\varphi\sigma_\varphi \to \infty$ ou $k_{MF}\sigma_{MF} \to \infty$) vers la courbe de la densité de probabilité unidimensionnelle du processus de modulation (à un coefficient de proportionnalité constant près).

ANNEXES

ANNEXE I

Loi normale

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

$$\varphi(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$F(x)$	$\varphi(x)$	x	$F(x)$	$\varphi(x)$
0,0	0,50000	0,39894	2,0	0,97725	0,05399
0,1	0,53983	0,39695	2,1	0,98214	0,04398
0,2	0,57926	0,39104	2,2	0,98610	0,03547
0,3	0,61791	0,39139	2,3	0,98928	0,02833
0,4	0,65542	0,36827	2,4	0,99180	0,02239
0,5	0,69146	0,35207	2,5	0,99379	0,01753
0,6	0,72575	0,33322	2,6	0,99534	0,01358
0,7	0,75804	0,31225	2,7	0,99653	0,01042
0,8	0,78814	0,28969	2,8	0,99744	0,00792
0,9	0,81594	0,26609	2,9	0,99813	0,00595
1,0	0,84134	0,24197	3,0	0,99865	0,00443
1,1	0,86433	0,21785	3,1	0,99903	0,00327
1,2	0,88493	0,19419	3,2	0,99931	0,00238
1,3	0,90320	0,17137	3,3	0,99952	0,00172
1,4	0,91924	0,14973	3,4	0,99966	0,00123
1,5	0,93319	0,12952	3,5	0,99977	0,00087
1,6	0,94520	0,11092	3,6	0,99984	0,00061
1,7	0,95543	0,09405	3,7	0,99989	0,00042
1,8	0,96407	0,07895	3,8	0,99993	0,00029
1,9	0,97128	0,06562	3,9	0,99995	0,00020

$$K(r, h) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_h^\infty \int_h^\infty e^{-\frac{u^2+v^2-2ruv}{2(1-r^2)}} du\, dv$$

r \ h	0	0,5	1,0	1,5	2,0
0	0,250000	0,095195	0,025171	0,004463	0,000518
0,1	0,265942	0,107758	0,031320	0,006334	0,000872
0,2	0,282047	0,120715	0,038069	0,008611	0,001370
0,3	0,298493	0,134179	0,045458	0,011330	0,002047
0,4	0,315495	0,148306	0,053563	0,014542	0,002921
0,5	0,333333	0,163320	0,062514	0,018323	0,004053
0,6	0,352416	0,179560	0,075526	0,022794	0,005500
0,7	0,373407	0,197602	0,083979	0,028166	0,007362
0,8	0,397583	0,218566	0,097637	0,034856	0,009825
0,9	0,428214	0,245325	0,115490	0,043948	0,013361
1,0	0,500000	0,308538	0,158655	0,066807	0,022750

ANNEXE II

Calcul des intégrales

Soit une intégrale du type

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y)} dx\, dy, \tag{1}$$

où

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \tag{2}$$

est une forme quadratique définie positive.

L'expression (2) est l'équation d'une surface du second degré, d'un ellipsoïde. Par rotation des axes et translation de l'origine des coordonnées on peut mettre cette équation sous la forme canonique

$$\Phi(u, v) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + c, \tag{3}$$

qui en plus du terme constant ne contient que les carrés des variables u et v.

Avec ce changement de variables l'intégrale (1) s'écrit

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Phi(u, v)} D\, du\, dv,$$

où D est le jacobien de la transformation.

Comme cette transformation des coordonnées se réduit à une translation de l'origine et à une rotation des axes, on a $D = 1$. Ainsi

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + c)} du\, dv = e^{-\frac{c}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_1 u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_2 v^2}{2}} dv.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

on a

$$K = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} e^{-\frac{c}{2}}. \qquad (4)$$

Ainsi le calcul de l'intégrale (1) revient à trouver les grandeurs λ_1, λ_2 et c. Dans la théorie des formes quadratiques on montre que λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0, \qquad (5)$$

dont les coefficients s'expriment en fonction des coefficients de la forme quadratique (2)

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \qquad (6)$$

et la constante c est donnée par la formule

$$c = \frac{I_3}{I_2}, \qquad (7)$$

où

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

La formule (4) ne contient que le produit $\lambda_1 \lambda_2$ des racines de l'équation (5) égal au terme constant I_2. L'intégrale cherchée est donc

$$K = \frac{2\pi}{\sqrt{I_2}} e^{-\frac{I_3}{2I_2}}. \qquad (9)$$

Nous allons utiliser la formule (9) pour le calcul de la fonction caractéristique bidimensionnelle de la loi normale. En faisant préalablement le changement de variables d'intégration $x = \frac{x_1 - a_1}{\sigma_1}$ et $y = \frac{x_2 - a_2}{\sigma_2}$, on peut alors écrire $\Theta_2(v_1, v_2)$ comme suit

$$\Theta_2(v_1, v_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-r^2}} e^{i(a_1 v_1 + a_2 v_2)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)} + iv_1 \sigma_1 x + iv_2 \sigma_2 y\right] dx\, dy. \qquad (10)$$

L'intégrale dans (10) est un cas particulier de (1) pour

$$a_{11}=a_{22}=\frac{1}{1-r^2}, \quad a_{12}=-\frac{r}{1-r^2},$$
$$a_{13}=-i\sigma_1 v_1, \quad a_{23}=-i\sigma_2 v_2, \quad a_{33}=0.$$

On obtient à partir de (6) et (8)

$$J_2=\frac{1}{(1-r^2)^2}-\frac{r^2}{(1-r^2)^2}=\frac{1}{1-r^2},$$
$$J_3=\frac{2r\sigma_1\sigma_2 v_1 v_2+\sigma_1^2 v_1^2+\sigma_2^2 v_2^2}{1-r^2}.$$

On a alors

$$\Theta_2(v_1, v_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}e^{i(a_1v_1+a_2v_2)}\times$$
$$\times 2\pi\sqrt{1-r^2}\exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 v_1^2+2r\sigma_1\sigma_2 v_1 v_2+\sigma_2^2 v_2^2)\right],$$

ce qui en fait ne diffère en rien de (3.123) pour $n = 2$.

Soit maintenant une intégrale du type

$$K_{mn}(\alpha) = \int_0^\infty\int_0^\infty u_1^m u_2^n \exp[-(u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha)]\,du_1\,du_2. \tag{11}$$

Pour $n \geqslant m$ l'intégrale (11) peut être obtenue par dérivation successive par rapport au paramètre de l'intégrale

$$K_{0r}(\alpha) = \int_0^\infty\int_0^\infty u_2^r \exp[-(u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\cos\alpha)]\,du_1\,du_2. \tag{12}$$

Pour le calcul de l'intégrale (12) il faut écrire l'exposant de l'exponentielle sous la forme d'un carré et faire le changement de variables d'intégration

$$v_1 = u_1 + u_2\cos\alpha,$$
$$v_2 = u_2\sin\alpha.$$

On obtient alors

$$K_{0r}(\alpha)=\frac{1}{\sin^{r+1}\alpha}\int_0^\infty\int_{v_2\operatorname{ctg}\alpha}^\infty v_2^r e^{-(v_1^2+v_2^2)}\,dv_1\,dv_2$$

et, en passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$K_{0r}(\alpha)=\frac{1}{\sin^{r+1}\alpha}\int_0^\alpha\int_0^\infty(\rho\sin\vartheta)^r e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\vartheta.$$

Les intégrales sur ρ et ϑ se séparent. Compte tenu de

$$\int_0^\infty \rho^{r+1} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right),$$

on obtient

$$K_{0r}(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}{2\sin^{r+1}\alpha} \int_0^\alpha \sin^r \vartheta \, d\vartheta, \tag{13}$$

En vertu de (13) pour $r = 0$ on a

$$K_{00}(\alpha) = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}, \tag{14}$$

$$K_{11}(\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha} \frac{dK_{00}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1-\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{4\sin^2\alpha}. \tag{15}$$

Pour $h = 0$ l'intégrale (10.86) est

$$q_1(\tau, 0) = \frac{D_{22}\sqrt{1-r^2}}{2\pi\omega_1(1-R^2)^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty v_1 v_2 e^{-(v_1^2+v_2^2-2rv_1v_2)} dv_1 dv_2 =$$

$$= \frac{4D_{22}(1-r^2)^{3/2}}{2\pi\omega_1(1-R^2)^{3/2}} K_{11}(\alpha) = \frac{D_{22}}{2\pi\omega_1}\left(\frac{1-r^2}{1-R^2}\right)^{3/2} \frac{1-\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}, \tag{16}$$

avec

$$\cos\alpha = -r. \tag{17}$$

La substitution de (17) dans (16) conduit à (10.89).

On peut écrire (8.69) sous une forme analogue après les substitutions

$$r_1 = u_1\sigma\sqrt{2(1-R_0^2)}, \qquad r_2 = u_2\sigma\sqrt{2(1-R_0^2)},$$

$$W_2(\vartheta_1, \vartheta_2, r) = \frac{1-R_0^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty u_1 u_2 e^{-(u_1^2+u_2^2-2u_1u_2y)} du_1 du_2 =$$

$$= \frac{1-R_0^2}{\pi^2} K_{11}(\alpha) = \frac{1-R_0^2}{4\pi^2} \frac{1-\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}, \tag{18}$$

avec de plus

$$-\cos\alpha = y = R_c \cos(\vartheta_2-\vartheta_1) + R_s \cos(\vartheta_2-\vartheta_1). \tag{19}$$

En portant (19) dans (18) on arrive à (8.70).

ANNEXE III

Fonction delta

Par définition, la fonction delta $\delta(t - t_0)$ de tout paramètre réel t_0 est nulle pour $t \neq t_0$ et illimitée pour $t = t_0$

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0,\\ \infty, & t=t_0.\end{cases} \tag{1}$$

L'intégrale de cette fonction est égale à

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,dt=\begin{cases}1, & a<t_0<b,\\ \frac{1}{2}, & t_0=a \quad \text{ou} \quad t_0-b,\\ 0, & t_0>a, \quad t_0>b.\end{cases} \tag{2}$$

En toute rigueur la fonction delta peut être obtenue comme la fonction limite d'une famille de fonctions continues uniparamétriques *). On peut donner de nombreux exemples de telles familles. Citons à titre d'exemple une famille de densités de probabilité de la loi normale de moyenne a constante et de moyenne quadratique σ variable.

Soit une autre famille

$$\varphi(t, \lambda)=\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2t^2+1)},$$

qui pour $\lambda \to \infty$ donne la fonction delta. Notre troisième exemple sera un ensemble $s(t, \tau)$ d'impulsions rectangulaires d'aire unité, de durée τ et de hauteur $\frac{1}{\tau}$

$$s(t, \tau)=\begin{cases}\frac{1}{\tau}, & t_0<t<t_0+\tau,\\ 0, & t<t_0, \quad t>t_0+\tau.\end{cases} \tag{3}$$

En faisant tendre vers zéro la durée de l'impulsion, on obtient à la limite une fonction delta

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\tau\to 0} s(t, \tau). \tag{4}$$

La convolution de la fonction delta avec une fonction quelconque $f(t)$, limitée et continue au point t_0, est douée de la propriété

*) La fonction delta est un exemple des fonctions *généralisées*, définies comme les limites des suites de fonctions continues. On peut trouver la théorie de ces fonctions dans l'ouvrage de I. Gelfand et G. Schilov. *Les fonctions généralisées et leurs propriétés*. Physmatguiz, Moscou, 1958.

remarquable suivante:

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} f(t_0), & a<t_0<b, \\ \frac{1}{2} f(t_0), & t_0=a \text{ ou } t_0=b, \\ 0, & t_0<a,\ t_0>b. \end{cases} \tag{5}$$

Si au point $t = t_0$ la fonction $f(t)$ a une discontinuité (de première espèce), on a

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \frac{1}{2}\,[f(t_0+)-f(t_0-)], \tag{5'}$$

$$a<t_0<b,$$

où $f(t_0+)$ et $f(t_0-)$ sont les valeurs de $f(t)$ à droite et à gauche du point de coupure.

La propriété exprimée par la formule (5) peut être appelée propriété de *filtrage* de la fonction delta. En effet, la fonction delta agit comme un filtre; en multipliant une fonction arbitraire $f(t)$ par $\delta(t-t_0)$ et en intégrant sur t on choisit une des valeurs de cette fonction, soit $f(t_0)$, c'est-à-dire la valeur qui correspond au zéro de l'argument de la fonction delta ($t-t_0=0$). Pour démontrer la formule (5) il suffit de substituer sous le signe de l'intégrale à $\delta(t-t_0)$ une fonction quelconque qui en est l'approximation et de passer ensuite à la limite.

Notons que la fonction delta $\delta(x-x_0)$ a la dimension de la grandeur $\frac{1}{x}$.

Cherchons maintenant le spectre (transformée de Fourier) de la fonction delta. En utilisant la propriété de filtrage on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-i\omega t}\,dt = e^{-i\omega t_0}. \tag{6}$$

Si $t_0 = 0$, en vertu de (6) le spectre de $\delta(t)$ est *uniforme pour toutes les fréquences* d'intensité unité. Le spectre de la demi-somme de deux fonctions delta

$$\frac{1}{2}\,[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)]$$

en vertu de (6) est égal à

$$\frac{1}{2}\,(e^{i\omega t_0}+e^{-i\omega t_0}) = \cos \omega t_0.$$

Par transformation de Fourier inverse on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega t\,d\omega=\delta(t), \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\cos\omega t_0\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega t\cos\omega t_0\,d\omega = \frac{1}{2}\left[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)\right]. \tag{7'}$$

Par suite de la symétrie de l'intégrale de Fourier les variables t et ω dans les formules (6) et (7) peuvent être interchangées.

Les dérivées des fonctions delta se définissent comme les limites des dérivées correspondantes des fonctions d'approximation. Ainsi, par exemple, en tant que fonction d'approximation on utilise des densités de probabilité de la loi normale pour $\sigma \to 0$, la n-ième dérivée de la fonction delta se définit comme suit

$$\delta^{(n)}(t)=\lim_{\sigma\to 0}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt^n}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right\}. \tag{8}$$

Tout comme la fonction delta, ses dérivées sont égales à zéro pour $t \neq 0$. L'allure des dérivées pour $t = 0$ est compliquée. Ainsi, par exemple, la dérivée première de la fonction delta

$$\delta'(t)=-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma^3}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

est égale à $+\infty$ lorsqu'on s'approche de l'origine des coordonnées à gauche ($t = 0-$) et à $-\infty$ lorsqu'on s'approche à droite ($t = 0+$). Au voisinage de $t = 0$, $\delta'(t)$ se conduit à peu près comme t^{-1}.

Les dérivées de la fonction delta possèdent également les propriétés de filtrage. La convolution d'une dérivée d'ordre n de la fonction delta avec une fonction quelconque dont la dérivée d'ordre n est continue au point t_0 est égale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt=(-1)^n f^{(n)}(t_0). \tag{9}$$

Si la dérivée $f^{(n)}(t)$ a une discontinuité (de première espèce) au point t_0, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt=\frac{(-1)^n}{2}\left[f^{(n)}(t_0+)+f(t_0-)\right]. \tag{9'}$$

Cherchons maintenant le spectre (transformée de Fourier) de la dérivée d'une fonction delta. En utilisant (9) on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)\, e^{-i\omega t}\, dt = \left(\frac{d^n e^{-i\omega t}}{dt^n}\right)_{t=t_0} = (-i\omega)^n e^{-i\omega t_0}. \qquad (10)$$

Si $t_0 = 0$, en vertu de (10) le spectre de $\delta^{(n)}(t)$ est égal à $(-i\omega)^n$.

ANNEXE IV

Systèmes orthogonaux de fonctions

Deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies sur l'intervalle (a, b) sont dites *orthogonales* par rapport à la fonction de pondération $\varphi(x)$ si l'on a

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) g(x)\, dx = 0. \qquad (1)$$

Le système de fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ est dit *orthogonal* par rapport au poids $\varphi(x)$ si deux fonctions quelconques du système sont orthogonales, c'est-à-dire si

$$\int_a^b \varphi(x) f_i(x) f_j(x)\, dx = 0, \quad i \neq j. \qquad (2)$$

La quantité

$$\int_a^b \varphi(x) f_i^2(x) = a_i \qquad (3)$$

est appelée *norme* de la fonction $f_i(x)$ par rapport au poids $\varphi(x)$. Si pour toute fonction satisfaisant à la condition (2) on a $a_i = 1$, le système de fonctions est dit *orthonormé*.

A titre d'exemple particulièrement simple de fonctions orthogonales on peut citer les fonctions trigonométriques sin nx, cos nx, où n est un nombre entier (y compris $n = 0$ pour cos nx) sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ par rapport au poids $\varphi(x) \equiv 1$.

Dans les applications on rencontre souvent des systèmes de *polynômes* orthogonaux. Ci-dessous nous donnons les propriétés essentielles des polynômes orthogonaux utilisés dans l'ouvrage.

Les *polynômes d'Hermite* $H_n(x)$ sont définis par les relations suivantes *)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

---

*) Parfois on définit les polynômes d'Hermite comme suit

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Il est évident que cette forme s'obtient à partir de (4) en remplaçant x par $x\sqrt{2}$ et en introduisant le facteur $2^{n/2}$.

En intégrant une seconde fois par parties on peut facilement montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} n!\sqrt{2\pi}, & m=n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \tag{5}$$

les polynômes d'Hermite sont donc un système de polynômes orthogonaux par rapport au poids $e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

En vertu de la définition (4) $H_n(x)$ est un polynôme de degré n, contenant pour n pair seulement des puissances paires de x, pour n impair seulement des puissances impaires de x. Trois polynômes d'Hermite successifs quelconques sont liés par la relation de récurrence suivante

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \tag{6}$$

Les cinq premiers polynômes sont

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = x^2 - 1,$$
$$H_3(x) = x^3 - 3x,\ H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

Il est facile d'obtenir l'expression des polynômes d'Hermite de degré plus élevé à l'aide de la formule (6).

En développant en série de Taylor la fonction $e^{-\frac{t^2}{2}+tx}$ on obtient

$$e^{-\frac{t^2}{2}+tx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \tag{7}$$

Pour $x = 0$, on trouve à partir de (7), en développant en série la fonction $e^{-\frac{t^2}{2}}$ et en comparant les coefficients des mêmes puissances de t dans les premier et second membres:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n (2n-1)!!,\quad H_{2n-1}(0) = 0, \tag{8}$$

où $(2n-1)!!$ est le produit des nombres entiers impairs jusqu'à $2n-1$ inclus.

Les *polynômes de Laguerre* $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par les relations suivantes *)

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x}), \tag{9}$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots, \alpha > -1,\ x > 0.$$

*) $L_n^0(x)$ est souvent désigné simplement $L_n(x)$.

En intégrant par parties on obtient

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\,x^\alpha e^{-x}\,dx = \begin{cases} \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1), & m=n, \\ 0, & m\neq n, \end{cases} \tag{10}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction gamma.

En vertu de (10) les polynômes de Laguerre sont un système de polynômes orthogonaux par rapport au poids $x^\alpha e^{-x}$ sur l'intervalle $(0, \infty)$.

Trois polynômes successifs quelconques de Laguerre sont reliés par la fonction de récurrence suivante:

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \\ - (n + \alpha - 1)\,L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad n \geqslant 2.$$

Les quatre premiers polynômes de Laguerre sont

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x,$$
$$2L_2^{(\alpha)}(x) = (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2x(\alpha + 2) + x^2,$$
$$3L_3^{(\alpha)}(x) = (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) - 3x(\alpha + 2)(\alpha + 3) + \\ + 3x^2(\alpha + 3) - x^3,$$

et sous la forme générale

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k-\alpha} \frac{(-x)^k}{k!}. \tag{11}$$

De la même manière qu'en (7) on a le développement

$$(1-t)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\,t^n, \quad |t|<1, \tag{12}$$

qui pour $x = 0$ donne

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{13}$$

Les *polynômes de Tchébychev* (de première espèce) $T_n(x)$ sont donnés par les relations

$$T_n(x) = \cos n \arccos x = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right], \tag{14}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Il est facile de montrer que l'on a

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x)\,T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0,\\ \pi, & m=n=0,\\ 0, & m\neq n.\end{cases} \qquad (15)$$

En vertu de (15) les polynômes de Tchébychev (de première espèce) sont un système de polynômes orthogonaux par rapport au poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $(-1, +1)$.

Trois polynômes successifs quelconques de Tchébychev sont liés par la relation de récurrence suivante

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \geqslant 1. \qquad (16)$$

Les cinq premiers polynômes de Tchébychev sont

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

En vertu de la définition (14), pour n quelconque, on a

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \qquad (17)$$
$$T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0. \qquad (17')$$

ANNEXE V

Fonction hypergéométrique

L'expression générale de la fonction hypergéométrique est donnée par la série suivante

$${}_rF_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_s;\ x) =$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma_1)\ldots\Gamma(\gamma_s)}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_r)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+n)\ldots\Gamma(\alpha_r+n)}{\Gamma(\gamma_1+n)\ldots\Gamma(\gamma_s+n)}\frac{x^n}{n!}. \qquad (1)$$

Pour $r = 2$, $s = 1$ on obtient la série hypergéométrique habituelle

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma;\ x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} +$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (2)$$

Pour $\alpha = \beta = \gamma = 1$ la série (2) devient une progression géométrique de raison x.

Dans cet ouvrage on utilise souvent un autre cas particulier de la fonction (1), la fonction hypergéométrique *dégénérée* (confluente)

pour $r = s = 1$

$$ {}_1F_1(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{3} $$

Pour $x > 0$ cette fonction est liée à sa valeur pour $x < 0$ par la relation

$$ {}_1F_1(\alpha, \gamma; x) = e^x {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma; -x). \tag{4} $$

Pour des grandes valeurs négatives de l'argument x on a le développement asymptotique suivant:

$$ {}_1F_1(\alpha, \gamma; -x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{1}{x^\alpha} \left[1 + \frac{\alpha(\alpha-\gamma+1)}{x} + \right. $$

$$ \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)}{2x^2} + \ldots \right]. \tag{5} $$

Si $\alpha = -n$ (n un entier positif), ${}_1F_1(-n, \gamma; x)$ devient un polynôme de puissance n par rapport à x. Pour $\alpha = n$, $\gamma = m$ (n, m entiers), ${}_1F_1(n, m, x)$ s'exprime par des polynômes et des fonctions exponentielles de l'argument x. Si $\alpha = \frac{n}{2}$, $\gamma = m$, ${}_1F_1\left(\frac{n}{2}, m; x\right)$ se définit par des exponentielles et des fonctions de Bessel de l'argument x. Ainsi, par exemple,

$$ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 1; -x\right) = e^{\frac{x}{2}} I_0\left(\frac{x}{2}\right), \tag{6} $$

$$ {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, 1; -x\right) = e^{-\frac{x}{2}} \left[(1+x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_2\left(\frac{x}{2}\right) \right], \tag{6'} $$

$$ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2; -x\right) = e^{-\frac{x}{2}} \left[I_0\left(\frac{x}{2}\right) + I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right]. \tag{6''} $$

L'intégrale assez répandue du produit de fonctions polynomiale, de Bessel et exponentielle s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique dégénérée

$$ \int_0^\infty t^{\mu-1} J_\nu(\alpha t) e^{-\beta^2 t^2} dt = $$

$$ = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^\nu}{2\beta^\mu \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \nu+1; -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right), \tag{7} $$

$$ \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \mu + \nu > 0. $$

En remplaçant α par $i\alpha$ [compte tenu de (4)] on obtient à partir de (7) l'expression de l'intégrale contenant une fonction de Bessel

de l'argument imaginaire:

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} I_\nu(\alpha t)\, e^{-\beta^2 t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^\nu}{2\beta^\mu \Gamma(\nu+1)} e^{\frac{\alpha^2}{4\beta^2}} {}_1F_1\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1,\ \nu+1;\ -\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right). \quad (7')$$

On peut également exprimer à l'aide de la fonction hypergéométrique les dérivées et l'intégrale de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\varphi^{(n)}(x) = 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1+n}{2},\ \frac{1}{2};\ -\frac{x^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{x\sqrt{2}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{2+n}{2},\ \frac{3}{2};\ -\frac{x^2}{2}\right) \right\}, \quad (8)$$

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ -\frac{x^2}{2}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[2F_L(x)-1], \quad (9)$$

où $F(x)$ est la fonction de Laplace.

ANNEXE VI

Transformation de Hilbert et signal analytique

Soit $S(t)$ une fonction réelle appartenant à la classe $L^p(-\infty, \infty)$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^p\, dt < \infty$. Pour $p \geqslant 1$ on peut définir une fonction $\sigma(t)$ dite *conjuguée* de $S(t)$, ceci à l'aide de la transformation intégrale de Hilbert

$$\sigma(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad (1)$$

avec

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \quad (2)$$

[pour $t = \tau$ on prend les valeurs principales (au sens de Cauchy) des intégrales].

Si $F_s(\omega)$ est le spectre (transformée de Fourier) de la fonction $S(t)$, le spectre $F_\sigma(\omega)$ de la fonction conjuguée est

$$F_\sigma(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\tau-t}\,dt\,d\tau.$$

En remplaçant t par $\tau - u$ les variables d'intégration se séparent. On a alors

$$F_\sigma(\omega)=F_s(\omega)\frac{(-1)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega u}}{u}\,du=-F_s(\omega)\frac{2i}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega u}{u}\,du.$$

Mais comme

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,\omega,$$

où sign ω indique le signe de la variable ω, on a

$$F_\sigma(\omega) = -iF_s(\omega)\,\mathrm{sign}\,\omega. \tag{3}$$

En vertu de (3) on a $|F_\sigma(\omega)| = |F_s(\omega)|$ et $\arg F_\sigma(\omega) = \arg F_s(\omega) \pm \frac{\pi}{2}$. Par exemple, la fonction conjuguée de $S(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est $\sigma(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Formons sur l'axe réel t la fonction complexe $Z(t) = S(t) + i\sigma(t)$. On peut montrer que pour que la fonction complexe $Z(t)$ soit la limite, pour $u \to 0$, de la fonction analytique $Z(t + iu)$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit remplie : 1) les fonctions $S(t)$ et $\sigma(t)$ sont conjuguées ; 2) la transformée de Fourier $F_z(\omega)$ de $Z(t)$ est identiquement nulle pour $\omega < 0$. Si l'une des conditions est remplie, l'autre l'est aussi.

La fonction complexe $Z(t)$ de la variable réelle t satisfaisant à l'une des conditions mentionnées est appelée *signal analytique* correspondant à $S(t)$. Désignons par $a(t)$ et $\Phi(t)$ le module et l'argument d'un signal analytique, c'est-à-dire posons

$$Z(t) = a(t)\,e^{i\Phi(t)}. \tag{4}$$

On a alors

$$S(t) = \mathrm{Re}\,Z(t) = a(t)\cos\Phi(t), \tag{5}$$

$$\sigma(t) = \mathrm{Im}\,Z(t) = a(t)\sin\Phi(t), \tag{6}$$

d'où

$$a(t) = \sqrt{S^2(t) + \sigma^2(t)}, \tag{7}$$

$$\Phi(t) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sigma(t)}{S(t)}. \tag{8}$$

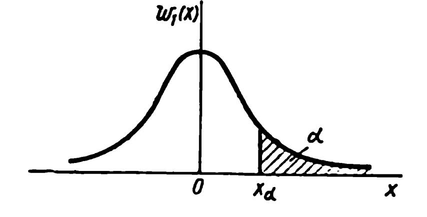
Les fonctions $a(t)$ et $\Phi(t)$ sont appelées *enveloppe* et *phase* de $S(t)$. Comme à une fonction $S(t)$ donnée correspond d'une manière univoque le signal analytique $Z(t)$, et par conséquent, l'enveloppe $a(t) = |Z(t)|$ et la phase $\Phi(t) = \arg Z(t)$, la représentation de la fonction $S(t)$ sous la forme (5), compte tenu de (6) à (8), est *univoque*.

ANNEXE VII

Quantiles de la loi normale

$$w_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

α	0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025	0,0030	0,0035	0,0040	0,0045
x_α	3,29053	3,09023	2,96774	2,87816	2,80703	2,74778	2,69684	2,65207	2,61205
α	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,015	0,020	0,025
x_α	2,57583	2,51214	2,45726	2,40892	2,36562	2,32635	2,17009	2,05375	1,95996
α	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12
x_α	1,88079	1,75069	1,64485	1,55477	1,47579	1,40507	1,34076	1,28155	1,17499
α	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
x_α	1,08032	0,99446	0,91537	0,84162	0,67449	0,52440	0,38532	0,25335	0,12566



$$x_{0,5+\alpha} = -x_{0,5-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 0,5, \quad x_{0,5} = 0.$$

ANNEXE VIII

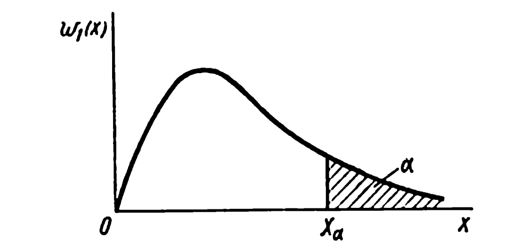
Quantiles de la loi du χ^2

$$w_1(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geqslant 0.$$

n \ α	0,999	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,05157	0,04393	0,03157	0,03628	0,03982	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,455
2	0,00200	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0243	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,0908	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,152	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	6,899	6,393	8,343
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339
16	3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	4,416	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	4,905	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	13,675	14,440	17,338
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	7,529	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337

ANNEXE VIII (suite)

n \ α	0,999	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
24	8,085	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336



n \ α	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517

ANNEXE VIII (suite)

n \ α	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

Nota. Pour $n \gg 1$

$$\chi^2_\alpha \sim \frac{1}{2}(x_\alpha \pm \sqrt{2n-1})^2,$$

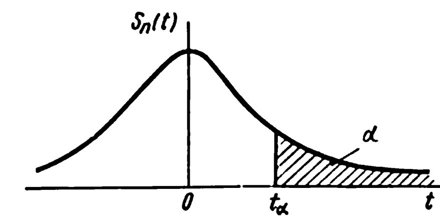
où x_α est le quantile de la loi normale (voir annexe VII).

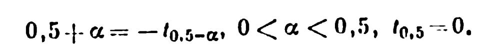
ANNEXE IX

Quantiles de la loi de Student

Les valeurs t_α satisfont à l'égalité $\int_{t_\alpha}^{\infty} s_n(t)\,dt = \alpha$

$n-1$ \ α	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	142	289	445	617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,965	31,598
3	137	277	424	584	765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,181	4,541	5,841	12,941
4	134	271	414	569	741	941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	132	267	408	559	727	920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	131	265	404	553	718	906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	130	263	402	549	711	896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	130	262	399	546	706	889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	129	261	398	543	703	883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	129	260	397	542	700	879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
12	128	259	395	539	695	873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
14	128	258	393	537	692	868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
16	128	258	392	535	690	865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
18	127	257	391	534	688	862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
20	127	257	391	533	687	860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
25	127	256	390	531	684	856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
30	126	256	389	530	683	854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
60	126	254	387	527	679	848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
∞	126	253	385	524	674	842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291





$t_{0,5+\alpha} = -t_{0,5-\alpha}$, $0 < \alpha < 0,5$, $t_{0,5} = 0$.

ANNEXE X

Ellipsoïde de corrélation

Soit un ensemble de n variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Désignons par a_i la valeur moyenne de la variable aléatoire ξ_i et par $r_{ij} = m_1 \{(\xi_i - a_i)(\xi_j - a_j)\}$ la covariation des variables aléatoires ξ_i et ξ_j. La matrice **M** formée par les éléments r_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ représente la matrice corrélationnelle de l'ensemble des variables aléatoires envisagées.

L'ellipsoïde d'équation

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{D_{ij}}{D} (z_i - a_i)(z_j - a_j) = 1, \quad D > 0, \tag{1}$$

est appelé *ellipsoïde de corrélation*. Dans l'équation (1) D_{ij} sont les cofacteurs des éléments a_{ij} dans la matrice **M**, et D son déterminant. Par une transformation linéaire (orthogonale) des variables, la forme quadratique dans le premier membre de (1) devient une somme de carrés, soit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{\lambda_k} = 1. \tag{2}$$

λ_k sont ici les nombres caractéristiques de la matrice de corrélation, déterminés par les racines de l'équation

$$|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0,$$

où **I** est la matrice unité.

L'équation (2) est un ellipsoïde à n dimensions de demi-axes $\sqrt{\lambda_k}$ auquel se ramène l'ellipsoïde (1) par rotation (transformation orthogonale). Le volume de l'ellipsoïde envisagé est égal à

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \sqrt{D}. \tag{3}$$

Ainsi, le carré du volume de l'ellipsoïde est proportionnel à la valeur du déterminant D, souvent appelée *variance généralisée*. Pour $n = 1$ cette grandeur est égale à

$$D = m_1 \{(\xi - a)^2\} = \sigma^2,$$

c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la variance habituelle d'une variable aléatoire, et pour $n = 2$ on a

$$D = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2\sigma_2^2 (1 - r^2),$$

où σ_1^2, σ_2^2 et r sont les variances et le coefficient de corrélation des deux variables aléatoires.

Si l'on étale l'ellipsoïde de corrélation (1) de $\sqrt{n+2}$ fois on obtient l'*ellipsoïde des variances*. Pour un ensemble de variables aléatoires normalement distribuées la densité de probabilité sur l'ellipsoïde des variances est constante. Pour une loi de distribution arbitraire l'ellipsoïde de corrélation a cette particularité que l'ensemble des variables aléatoires *uniformément* réparties dans un domaine de l'espace à n dimensions, limité par cet ellipsoïde, a les mêmes premier et second moments (covariation) que l'ensemble donné des variables aléatoires.

ANNEXE XI

Régression

Soient ξ et η des grandeurs aléatoires liées caractérisées par la densité de probabilité mutuelle conjointe $w_2(x, y)$. La moyenne conditionnelle η pour $\xi = x$ [voir (2.108), t. I] considérée comme une fonction de la variable x détermine la *courbe de régression*, soit

$$z = m_1\{\eta \mid x\} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y w_2(x, y)\, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} w_2(x, y)\, dy} = \int_{-\infty}^{\infty} y w(y \mid x)\, dy. \qquad (1)$$

Il est facile de montrer (voir le problème 2.6, t. I) que parmi toutes les fonctions possibles $g(x)$, l'écart quadratique $m_1\{[\eta - g(\xi)]^2\}$ est minimal pour

$$g(x) = m_1\{\eta \mid x\}. \qquad (2)$$

Dans certains cas on envisage l'approximation de η au moyen de ξ d'après le critère de minimum du carré moyen de l'écart de η par rapport à $f(\xi)$ pour une classe donnée de fonctions $g(x)$, définies à des paramètres inconnus près. Par exemple, si $g(x) = a_1x + a_2$, on cherche des valeurs a_1, a_2 pour lesquelles $m_1\{(\eta - a_1\xi - a_2)^2\}$ sont minimales. La droite $z = a_1x + a_2$ est dans ce cas appelée droite de régression quadratique moyenne. Un cas plus général est celui d'une régression quadratique moyenne polynomiale quand

$$g(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_{n+1}.$$

Dans le cas d'une régression quadratique moyenne linéaire, le minimum de $m_1\{(\eta - a_1\xi - a_2)^2\}$ correspond à

$$a_1 = r\sqrt{\frac{M_2\{\eta\}}{M_2\{\xi\}}}, \quad a_2 = m_1\{\eta\} - a_1 m_1\{\xi\}, \qquad (3)$$

où r est le coefficient de corrélation des grandeurs aléatoires ξ et η. La droite de régression quadratique moyenne est alors donnée par l'équation

$$z = m_1\{\eta\} + [x - m_1\{\xi\}] \frac{M_2\{\xi\eta\}}{M_2\{\xi\}} . \qquad (4)$$

Si ξ et η sont des grandeurs aléatoires normales liées, le second membre de (4) coïncide exactement avec la moyenne conditionnelle de η pour $\xi = x$ (voir t. I, page 78). Par conséquent, la droite de régression quadratique moyenne pour des grandeurs aléatoires normales coïncide avec la courbe de régression. Autrement dit, l'approximation linéaire de η par ξ suivant le critère de minimum du carré moyen de l'erreur est la meilleure.

Les notions introduites ci-dessus peuvent être généralisées à un ensemble fini quelconque de grandeurs aléatoires interdépendantes $\xi_1, \ldots, \xi_n$. La valeur moyenne conditionnelle de ξ_1 pour $\xi_i = x_i$, $i = 2, \ldots, n$ est égale à

$$m_1\{\xi_1 \mid x_2, \ldots, x_n\} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1} . \qquad (5)$$

Le lieu géométrique des points $(m_1\{\cdot\}, x_2, \ldots, x_n)$ pour toutes les valeurs $x_2, \ldots, x_n$ est l'*hypersurface de régression*. On peut définir l'*hyperplan de la régression quadratique moyenne*

$$z_1 = m_1\{\xi_1\} + \sum_{i=2}^{n} \rho_{1i}[x_i - m_1\{\xi_i\}]. \qquad (6)$$

Les grandeurs ρ_{1i} sont données par le système d'équations linéaires

$$\sum_{j=2}^{n} b_{ij}\rho_{1j} = b_{i1}, \quad i = 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

où

$$b_{ij} = m_1\{\xi_i\xi_j\}, \qquad (7')$$

de sorte qu'en désignant par D_{ij} les cofacteurs dans la matrice $\| b_{ij} \|$ on a

$$\rho_{1i} = \frac{D_{1i}}{D_{11}} . \qquad (8)$$

On peut montrer que l'hypersurface de régression pour un ensemble de grandeurs aléatoires *normalement* distribuées coïncide avec l'hyperplan de la régression quadratique moyenne.

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE PREMIER

Monographies et tables

1. E. S. VENTZEL — Théorie des probabilités (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1962, chap. 1 à 4.
2. V. I. GLIVENKO — Cours de théorie des probabilités (en russe). GONTI, 1939, chap. 1, 2, 9 (§ 30).
3. B. V. GNÈDENKO — The theory of probability. Chelsea Publishing Co, N.Y., 1962.
4. W. B. DAVENPORT, W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signals and noise. Mc Graw-Hill, 1958.
5. A. N. KOLMOGOROV — Notions de base de la théorie des probabilités (en russe). ONTI, 1936.
6. M. LOÈVE — Probability theory. Princeton, 1960.
7. W. FELLER — An introduction to probability theory and its applications. J. Wiley, N.Y., 1966.
8. A. J. KHINTCHINE — Travaux sur la théorie des files d'attente (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1963.
9. E. E. SLOUTSKI — Tables de la fonction Γ incomplète et de la fonction de probabilité du χ^2 (en russe). Ed. Acad. des Sciences, Moscou, 1950.
10. K. PEARSON — Tables of the incomplete β-function. Univ. Pres. Cambr. (England), 1948.
11. K. PEARSON — Tables of the incomplete Γ-function. Univ. Pres. Cambr. (England), 1957.
12. V. I. PAGOUROVA — Tables de la fonction Γ incomplète (en russe). Centre de calcul de l'Acad. des Sciences de l'U.R.S.S., Moscou, 1964.

Articles

13. A. N. KOLMOGOROV — Théorie des probabilités (en russe), t. II, chap. 11. Ed. Acad. des Sciences de l'U.R.S.S., Moscou, 1956.
14. B. R. LÉVINE — Augmentation de la fiabilité des systèmes par réservation. « Electrosviaz », 1957, n° 11.

CHAPITRE 2

Monographies et tables

1. M. S. BARTLETT — An introduction to stochastic processes. Cambridge, 1955, chap. 1.
2. E. S. VENTZEL — Théorie des probabilités (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1962, chap. 5 à 10.
3. B. V. GNÈDENKO — The theory of probability. Chelsea Publishing Co, N.Y., 1962, chap. 4, 5.
4. H. CRAMER — Mathematical methods of statistics. Princeton Univ. press, Princeton, 1946.
5. K. PEARSON — Tables for statisticians and biometricians. Cambridge Univ. press, 1931, p. 2.

CHAPITRE 3

Monographies et manuels

1. M. S. BARTLETT — An introduction to stochastic processes. Cambridge, 1955, chap. 5.
2. B. V. GNÉDENKO — The theory of probability. Chelsea Publishing Co, N.Y., 1962, chap. 4 à 8.
3. B. V. GNÉDENKO, A. N. KOLMOGOROV — Distributions limites d'une somme de variables aléatoires indépendantes (en russe). Gostechizdat, Moscou, 1949.
4. H. CRAMER — Mathematical methods of statistics, part II. Princeton Univ. press, Princeton, 1946.
5. B. R. LÉVINE — Théorie des processus aléatoires et applications à la radiotechnique (en russe). Sovetskoe radio, Moscou, 1960. annexe IX.
6. M. LOÈVE — Probability theory. Princeton, 1960, chap. IV à VI.

Articles

7. S. N. BERNSTEIN — Extension du théorème limite de la théorie des probabilités à une somme de variables dépendantes (en russe). « Uspekhi mathematitcheski nauk », 1944, n° 10.
8. V. I. BOUNIMOVITCH — Calcul approché de la probabilité de détection sûre lors d'une réception optimale d'un signal à phase inconnue (en russe). « Radiotechnica i electronica », 1958, n° 4.
9. P. BECKMAN — Rayleigh distribution and its generalisations in radio science. Journ. Research National Bureau of Standarts, USA, 1964, v. 68D, n° 9.
10. K. A. NORTON, L. E. VOGLER, W. J. MANSFIELD, P. J. SHORT — The probability distribution of the amplitude of a constant vector plus a Rayleigh-distributed vector. Proc. IRE, 1955, v. 43, n° 10.
11. C. O. RICE — Statistical properties of a sine wave plus random noise, BSTJ, 1948, Janv., v. 27.

Tables

12. L. S. BARK, L. N. BOLCHEV, P. I. KOUZNETZOV, A. P. TCHERNYCHEV — Tables de la loi de Rayleigh-Rice (en russe). Ed. Centre de Calcul de l'Acad. des Sciences de l'U.R.S.S., Moscou, 1964.

CHAPITRE 4

Monographies

1. M. S. BARTLETT — An introduction to stochastic processes. Cambridge, 1955, chap. 6.
2. W. R. BENNETT — Methods of solving noise problems. Proc. IRE, vol. 44, p.p. 609-638, May, 1956.
3. J. S. BENDAT — Principles and applications of random noise theory. John Wiley, N.Y. 1958, chap. 1, 2, 5.
4. I. I. GUIKHMAN, A. V. SKOROKHOD — Introduction à la théorie des processus aléatoires (en russe). Ed. Nauka, 1965, chap. 1, 4, 9.
5. I. M. GUELFAND, N. J. VILENKINE — Fonctions généralisées, série 4 (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1961, chap. III.
6. W. GRENANDER — Stochastic processes and statistical inference. Arkiv. Mat., 1 (1950), n° 17, p.p. 195-277.

7. W. B. DAVENPORT. W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signals and noise. Mc Graw-Hill, 1958, chap. 6 à 8.
8. J. L. DOOB — Stochastic processes. J. Wiley, N.Y., 1953, chap. 2, 11.
9. H. CRAMER — Mathematical methods of statistics. Princeton Univ. press, Princeton, 1946.
10. F. H. LANGE — Korrelationselectronik, Veb Berlin, 1959, chap. 1, 2, 4.
11. J. H. LANING, R. H. BATTIN — Random processes in automatic control. Mc Graw-Hill, N.Y., 1956, chap. 3.
12. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, N.Y., 1960, chap. 1, 2, 3, 7, 8.
13. Y. A. ROSANOV — Processus aléatoires stationnaires (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1963, chap. 1, 4.
14. A. V. SKOROKHOD — Processus aléatoires à accroissements indépendants (en russe). Ed. Nauka, Moscou, 1964.
15. A. A. KHARKÉVITCH — Spectres et analyse. 3e éd. (en russe). Gostechizdat, Moscou, 1957, chap. 1, 3.
16. A. J. KHINTCHINE — Travaux sur la théorie mathématique des files d'attente (en russe). Physmatguiz, 1963.
17. A. BLANC-LAPIERRE, R. FORTET — Théorie des fonctions aléatoires. Paris, 1953, chap. 8 à 11.

Articles

18. A. N. KOLMOGOROV — Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert. Bulletin MGU, 1941, t. 2, nº 6.
19. N. A. GÉLEZNOV — Certaines questions relatives à la théorie spectro-corrélationnelle des signaux non stationnaires. «Radiotechnica i electronica», 1959, t. 4, nº 3.
20. B. R. LÉVINE — Spectre énergétique d'une intégrale indéfinie. « Radiotechnica », 1960, nº 6.
21. A. J. KHINTCHINE — Théorie de la corrélation des fonctions aléatoires stationnaires. « Uspekhi mathematitcheski nauk ». 1938, série 5.
22. A. M. JAGLOM — Introduction à la théorie des fonctions aléatoires stationnaires. « Uspekhi mathematitcheski nauk », 1952, série 5.
23. E. M. HOFSTETTER — Construction of time-limited functions with specified autocorrelation functions. IEEE Trans., 1964, v. IT-10, nº 2.
24. D. G. LAMPARD — Generalisation of the Wiener-Khintchine theorem to nonstationary processes. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, nº 6.
25. S. O. RICE — Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1944, v. 23, nº 3; 1945, v. 24, nº 1.
26. R. A. SILVERMAN — Locally stationary random processes. IRE Trans. 1957, v. IT-3, nº 3.

CHAPITRE 5

Monographies

1. V. I. BOUNIMOVITCH — Processus fluctuationnels dans les dispositifs de réception radio (en russe). Sovetskoe radio, 1951, chap. 3.
2. W. B. DAVENPORT, W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signals and noise. Mc Graw-Hill, 1958, chap. 9.
3. V. L. LÉBÉDEV — Processus aléatoires dans les systèmes électriques et mécaniques (en russe). Physmatguiz, 1958, chap. 2, 3.
4. N. A. LIFCHITZ, V. N. POUGATCHEV — Analyse probabiliste des systèmes de commande automatique, t. I (en russe). Sovetskoe radio, Moscou, 1963, chap. 5, 6.
5. J. H. LANING, R. H. BATTIN — Random processes in automatic control. Mc Graw-Hill, N. Y., 1956, chap. 5, 6.

6. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, N. Y., 1960, chap. 2, 3.
7. V. N. POUGATCHEV — Théorie des fonctions aléatoires et applications aux problèmes de la régulation automatique (en russe). Physmatguiz, 1960, chap. 12, 13.
8. V. V. SOLODOVNIKOV — Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande automatique (en russe). Physmatguiz, 1960, chap. 5, 10.
9. A. A. KHARKÉVITCH — Bases de la radiotechnique (en russe). Sviazizdat, Moscou, 1962, chap. 4, 5.
10. S. S. TSIEN — Engineering cybernetics. Mc. Graw-Hill, N. Y., 1954, chap. 9.
11. E. BAGHDADY — Lectures on communication system theory. Mc Graw-Hill, 1961.
12. J. S. BENDAT — Principles and applications of random noise theory. John Wiley, N. Y., 1958, chap. 1.

Articles

13. S. N. BERNSTEIN — Extension du théorème limite de la théorie des probabilités à une somme de variables dépendantes. « Uspekhi mathematitcheski nauk », 1944, nº 10.
14. P. I. KOUZNETSOV, R. L. STRATONOVITCH, V. I. TIKHONOV — Certaines fonctions aléatoires à la traversée de systèmes linéaires. « Avtomatica i telemekhanika », 1953, série 2.
15. S. O. RICE — Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1944, v. 23, nº 3; 1945, v. 24, nº 1.
16. A. ROSENBLOOM, J. HEILFRON, D. L. TRAUTMAN — Analysis of linear system with random varyng inputs and parameters. IRE. Conv. Rec., 1955, p. 4.

CHAPITRE 6

Monographies

1. V. I. BOUNIMOVITCH — Processus fluctuationnels dans les dispositifs de réception radio (en russe). Sovetskoe radio, 1951, chap. 4, 5.
2. N. WIENER — Nonlinear problems in random theory. John Wiley, N. Y., 1958.
3. W. B. DAVENPORT, W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signals and noise. Mc Graw-Hill, 1958, chap. 12, 13.
4. R. DEUTSCH — Nonlinear transformations of random processes. Prentice-Hall, 1962, chap. 1.
5. I. S. ITSKHOKI — Radiotechnique non linéaire (en russe). Sovetskoe radio, Moscou, 1955.
6. N. A. LIFCHITZ, V. N. POUGATCHEV — Analyse probabiliste des systèmes de commande automatique, t. II (en russe). Sovetskoe radio, Moscou, 1963, chap. 1 à 3.
7. I. E. KAZAKOV, B. G. DOSTUPOV — Dynamique statistique des systèmes automatiques non linéaires (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1962, chap. 1, 2, 4.
8. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, N. Y., 1960, chap. 5.
9. A. A. PERVOZVANSKI — Processus aléatoires dans les systèmes automatiques non linéaires (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1962, chap. 1.
10. A. A. SVECHNIKOV — Méthodes d'application des fonctions aléatoires (en russe). Soudpromguiz, Moscou, 1961, chap. 5.

Articles

11. P. I. KOUZNETZOV, R. L. STRATONOVITCH, V. I. TIKHONOV — Certaines fonctions aléatoires à la traversée de systèmes linéaires. « Avtomatika i telemekhanika », 1953, série 2.
12. V. I. TIKHONOV — Une méthode de détermination de l'enveloppe des fluctuations quasi harmoniques. « Radiotechnika i electronika », 1957, n° 4.
13. S. O. RICE — Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1945, v. 24, n° 1.

CHAPITRE 7

Monographies

1. V. I. BOUNIMOVITCH — Processus fluctuationnels dans les dispositifs de réception radio (en russe). Sovetskoe Radio, Moscou, 1951, chap. 5, 6, 8.
2. W. B. DAVENPORT, W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signals and noise. Mc Graw-Hill, 1958, chap. 12, 13.
3. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill. 1960, chap. 5.
4. W. W. HARMAN — Principles of the statistical theory of communication. Mc Graw-Hill, N.Y., 1963, chap. 9.

Articles

5. I. N. AMIANTOV, V. I. TIKHONOV — Action des fluctuations normales sur des éléments non linéaires types. « Izvestia Akademii nauk SSSR », 1956, n° 4.
6. A. A. KOSSIAKINE — Théorie statistique de quantification du niveau. « Avtomatika i telemekhanica », 1961, n° 6.
7. R. F. BAUM — The correlation function of smoothly limited gaussian noise. Trans. IRE. 1957, v. IT-3, n° 3.
8. H. L. Mc MAHON — An extension of Price's theorem. IEEE Trans., 1964, v. IT-10, n° 2.
9. R. A. PRICE — Useful theorem for nonlinear devices having gaussian inputs. Trans. IRE. 1958, v. IT-4, n° 2.
10. S. O. RICE — Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1944, v. 23, n° 3; 1945, v. 24, n° 1.

CHAPITRE 8

Monographies

1. V. I. BOUNIMOVITCH — Processus fluctuationnels dans les dispositifs de réception radio (en russe). Sovetskoe Radio, Moscou, 1951, chap. 5, 6, 8.
2. W. B. DAVENPORT, W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signal and noise. Mc Graw-Hill, 1958, chap. 8.
3. R. DEUTSCH — Nonlinear transformations of random processes. Prentice-Hall, 1962, chap. 3.
4. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, 1960, chap. 9.

Articles

5. V. I. TIKHONOV — Caractère markovien de l'enveloppe des fluctuations quasi harmoniques. « Radiotechnica i electronica », 1961, n° 7.
6. V. V. TSVETNOV — Propriétés statistiques des signaux et des bruits dans les systèmes bicanaux à modulation de phase. « Radiotechnica », 1957, n° 5.

7. V. V. TSVETNOV — Propriétés corrélationnelles de phase des signaux et des bruits gaussiens dans les systèmes bicanaux à modulation de phase. « Radiotechnica », 1958, nº 4.
8. W. C. HOFFMAN — The joint distribution on n successive outputs of a linear detectors. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, nº 8.
9. S. O. RICE — Statistical properties of a sine wave plus random noise. BSTJ, 1948, v. 27, nº 1.
10. I. S. REED — On the use of Laguerre polynomials in treating the envelope and phase components of narrow-band gaussian noise. Trans. IRE, 1959, v. IT-5, nº 3.
11. R. A. SILVERMAN — The fluctuation rate of the chi-process. Trans. IRE, 1958, v. IT-4, nº 1.

CHAPITRE 9

Monographies

1. W. B. DAVENPORT, W. L. ROOT — An introduction to the theory of random signal and noise. Mc Graw-Hill, 1958, chap. 9, § 5.
2. R. DEUTSCH — Nonlinear transformations of random processes. Prentice-Hall, 1962, chap. 4, 6, 7.
3. Y. S. LÉSINE — Filtres optimaux et accumulateurs de signaux impulsionnels (en russe). Sovetskoe radio, Moscou, 1963, chap. 8.
4. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, 1960, chap. 17.

Articles

5. V. I. TIKHONOV — Influence des bruits sur le fonctionnement des circuits d'accord automatique de la fréquence par déphasage. « Avtomatica i telemekhanica », 1959, nº 9.
6. R. C. EMERSON — First probability of receivers with square law detectors, J. Appl. Phys., 1953, v. 24, nº 9.
7. J. HEILFRON — On the response of a certain class of systems to random inputs. IRE Trans., v. IT-1, 1955, March.
8. D. G. LAMPARD — The probability for the filtered output of a multiplier. IRE Trans., v. IT-2, 1956, nº 2.
9. M. A. MAYER, D. MIDDLETON — On the distributions of signals and noise after rectification and filtering. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, nº 8.
10. G. M. NORTHROP, P. M. SCHULTHEISS — On the response of linear systems to certain non-gaussian random inputs. IEEE Trans., v. IT-10, 1964, nº 2.
11. D. SLEPIAN — Fluctuations of random noise power. BSTJ, 1958, nº 1.

CHAPITRE 10

Monographies et tables

1. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, 1960, chap. 9, § 9.4.
2. R. L. STRATONOVITCH — Questions choisies de la théorie des fluctuations en radiotechnique (en russe). Sovetskoe radio, 1961, chap. 3.
3. K. PEARSON — Tables for statisticians and biometricians, p. II. Cambridge Univ. press, 1931.

Articles

4. V. A. VOLKONSKI, Y. A. ROSANOV — Théorèmes limites pour les fonctions aléatoires. « Teoria veroïatnostei i eje primenenija », 1959, série 2.
5. V. P. JOUKOV — Variance du nombre de zéros de la somme d'un signal et d'un bruit. « Radiotechnica i electronica », 1964, n° 3.
6. P. I. KOUZNETSOV, R. L. STRATONOVITCH, V. I. TIKHONOV — Sur la durée des dépassements d'une fonction aléatoire. « JTF », 1954, n° 1.
7. B. R. LÉVINE, J. A. FOMINE — Détermination approchée de la distribution de la durée des dépassements de l'enveloppe de la somme d'un signal déterministe et d'un bruit normal stationnaire au-dessus d'un niveau de seuil. « Radiotechnica », 1963, n° 5.
8. B. R. LÉVINE, J. A. FOMINE — Distribution de la durée des dépassements de l'enveloppe de la somme d'un signal sinusoïdal et d'un bruit normal au-dessus d'un niveau de seuil. « Radiotechnica », 1964, n° 1.
9. B. R. LÉVINE, J. A. FOMINE — Distribution de la durée des dépassements du niveau de seuil pour les suites aléatoires stationnaires. Communication à la XXI[e] Session scientifique en l'honneur du 70[e] anniversaire de la découverte par A. S. Popov de la radio. Section de la théorie de l'information, 1965.
10. B. R. LÉVINE, J. A. FOMINE — Application de la discrétisation temporelle d'un processus aléatoire à la recherche de la distribution de la durée de ses dépassements. « Radiotechnica », 1965, n° 10.
11. V. I. TIKHONOV, E. I. KOULIKOV — Distribution des dépassements et des maxima des fluctuations. « Radiotechnica », 1962, n° 2.
12. V. I. TIKHONOV — Dépassements de la somme d'un signal et d'un bruit. « Radiotechnica i electronica », 1963, n° 11.
13. V. I. TIKHONOV — Caractéristiques des dépassements des processus aléatoires. « Radiotechnica i electronica », 1964, n° 3.
14. J. A. Mc FADDEN — The axis crossing intervals of random functions. IRE Trans., 1956, v. IT-2, n° 2; 1958, v. IT-4, n° 1.
15 S. O. RICE — Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1944, v. 23, n° 3; 1945, v. 24, n° 1.
16. S. O. RICE — Statistical properties of a sine wave plus random noise. BSTJ, 1948, v. 27, n° 1.
17. S. O. RICE — Distribution of the duration of fades in radio transmission. BSTJ, 1958, v. 37, n° 3.
18. I. MILLER, J. E. FREUND — Some result the analysis of random signals by means of a cut-couting processes. J. Appl. Phys., 1956, v. 27, n° 11.
19. H. STEINBERG, P. M. SCHULTHEISS, C. A. WOGRIN, F. ZWEIG — Short-time frequency measurment of narow-band random signal by means of a zero counting processes. J. Appl. Phys., 1955, v. 26, n° 2.
20. D. SLEPIAN — The one-side barrier problem for gaussian noise. BSTJ, 1962, v. 41, n° 2.

CHAPITRE 11

Monographies

1. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, N.Y., 1960, t. I, chap. 4.
2. M. C. WANG — Threshold signals. Mc Graw-Hill, N.Y., 1950.
3. S. S. TSIEN — Engineering cybernetics. Mc Graw-Hill, N.Y., 1954, chap. 9.

Articles

4. I. N. AMIANTOV, V. I. TIKHONOV — Fonction de corrélation d'une suite aléatoire d'impulsions rectangulaires. « Radiotechnica », 1959, nº 5.
5. M. I. DORMAN — Spectres énergétiques de suites aléatoires d'impulsions à recouvrement. « Radiotechnica », 1960, nº 12.
6. B. R. LÉVINE, J. A. FOMINE — Spectres énergétiques de signaux de groupe dans les systèmes impulsionnels de multiplexage. « Electrosviaz », 1963, nº 2.
7. B. R. LÉVINE — Certaines généralisations de la théorie des processus aléatoires impulsionnels. « Electrosviaz », 1963, nº 7.
8. B. R. LÉVINE — Calcul du nombre de canaux dans les systèmes de multiplexage à modulation d'impulsions par déplacement. « Electrosviaz », 1961, nº 6.
9. A. A. KHARKÉVITCH — Sur le calcul des spectres des processus aléatoires. « Radiotechnica », 1957, nº 5.
10. J. I. KHOURGUINE — Sur une classe de processus aléatoires impulsionnels. « Radiotechnica i electronica », 1957, nº 4.
11. H. KAUFMAN, E. H. KING — Spectral power density functions in pulse time modulation. Trans. IRE, 1955, v. IT-1, March.

CHAPITRE 12

Monographies

1. I. S. GONOROVSKI — Circuits radiotechniques et signaux (en russe). Sovetskoe radio, Moscou, 1963, chap. 12.
2. D. MIDDLETON — An introduction to statistical communication theory. Mc Graw-Hill, N.Y., 1960, chap. 12 à 14.
3. A. A. KHARKÉVITCH — Effets paramétriques non linéaires en radiotechnique (en russe). Gostechizdat, Moscou, 1956, §§ 11 à 14.

Articles

4. J. L. STEWART — The power spectrum of a carrier frequency modulated by gaussian noise. Proc. IRE, 1954, nº 10.
5. R. G. MEDHURST — The power spectrum of a carrier frequency modulated by gaussian noise. Proc. IRE, 1955, nº 6.
6. H. ROWE — Amplitude modulation with a noise carrier. Proc. IEEE, 1964, nº 4.
7. H. ROWE — Frequency or phase modulation with a noise carrier. Proc. IEEE, 1964, nº 4.

NOTATIONS UTILISÉES

A — événement aléatoire
$\overline{A}$ — événement aléatoire contraire à A
$A(t)$ — composante en quadrature lentement variable d'un processus aléatoire à bande étroite
A_0 — amplitude d'une oscillation
a — valeur moyenne, paramètre de la loi normale
$a(t)$ — enveloppe d'un signal déterministe à bande étroite
B — événement aléatoire
$B_\xi(t_1, t_2)$ — fonction de corrélation du processus aléatoire $\xi(t)$
$B_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ — fonction de corrélation mutuelle des processus aléatoires $\xi(t)$ et $\eta(t)$
$B(\tau)$ — fonction de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire
$B_{\xi\eta}(\tau)$ — fonction de corrélation mutuelle de deux processus aléatoires stationnairement liés $\xi(t)$ et $\eta(t)$
$B_E(\tau)$ — fonction de corrélation de l'enveloppe
$B_d(\tau)$ — fonction de corrélation correspondant à la partie discrète du spectre énergétique
$B_c(\tau)$ — fonction de corrélation correspondant à la partie continue du spectre énergétique
$B^*(\tau)$ — moyenne temporelle de la fonction de corrélation d'un processus aléatoire non stationnaire
$C(t)$ — composante en quadrature lentement variable d'un processus aléatoire à bande étroite
$C(\omega)$ — (réponse en fréquence) caractéristique fréquentielle d'un système linéaire
c — contour d'intégration
D — déterminant
D_{ij} — cofacteur
E — intégrale elliptique complète de seconde espèce
$E(t)$ — enveloppe
$F(u)$ — fonction de Laplace
F_n — fonction de répartition à n dimensions
${}_1F_1$ — fonction hypergéométrique dégénérée
$F(\omega)$ — spectre énergétique
$F_{\xi\eta}(\omega)$ — spectre énergétique mutuel des processus $\xi(t)$ et $\eta(t)$
$f(x)$ — caractéristique d'un élément non linéaire non inertiel
$H_n(x)$ — polynôme d'Hermite d'ordre n
$h(t)$ — fonction de transition impulsionnelle
h_{nk} — coefficients du développement en série d'une fonction de corrélation
$I_\nu(x)$ — fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν de l'argument imaginaire
$J_\nu(x)$ — fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν
K — intégrale elliptique complète de première espèce
$K(u, v)$ — noyau d'une transformation intégrale
$K_0(x)$ — fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro de l'argument imaginaire
k — coefficient d'asymétrie
$k(i\omega)$ — fonction de transfert d'un système linéaire

$L_n^\alpha(x)$ — polynôme de Laguerre
M_k — moment centré d'ordre k
m_k — moment initial d'ordre k
M_2 — variance
m_1 — valeur moyenne
N_0 — intensité du bruit blanc
p, P — probabilité
$Q_n(x)$ — polynômes orthogonaux
q — probabilité
R — coefficient de corrélation
$S(t)$ — processus déterministe
s — rapport de l'amplitude d'un signal à la moyenne quadratique du bruit
T — durée d'observation, période de répétition
$T_n(x)$ — polynôme de Tchébychev d'ordre n
t — temps
u_0, v_0 — amplitude d'une oscillation
$u(t)$, $v(t)$ — composantes en quadrature d'un signal déterministe
$V(q, h)$ — fonction de Nicholson
W_n, w_n — densité de probabilité (fonction de distribution) à n dimensions
$Z_T^{(k)}(i\omega)$ — spectre d'une réalisation tronquée
α — paramètre de la loi de Rayleigh généralisée, amortissement d'un circuit oscillant
β — grandeur proportionnelle à la bande passante
$\Gamma(x)$ — fonction gamma
γ — coefficient d'aplatissement
$\delta(t)$ — fonction delta
Δ — largeur de la bande passante
Θ_n — fonction caractéristique à n dimensions
λ — paramètre de la loi de Poisson
μ — rapport des puissances des spectres continu et discret
ν — fréquence relative de réalisation d'un événement, degré de non-linéarité
σ^2 — variance, paramètre de la loi normale
$\Phi(x)$ — fonction de Kramp
$\Phi(t, \omega)$ — spectre énergétique instantané
$\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ — phase
ω, Ω — pulsation
ω_0 — pulsation centrale du spectre d'un processus à bande étroite
ω_{moy} — pulsation moyenne
$\omega^* = \omega_{moy} - \omega_0$
$\omega_* = \omega_1^2 - 2\omega_{moy}\,\omega_0 + \omega_0^2$
τ — déplacement temporel
τ_0 — temps de corrélation, durée d'une impulsion
$\xi, \eta, \zeta, \nu, \ldots$ — variable aléatoire
$\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ — fonction aléatoire
$\xi^{(k)}(t)$ — réalisation d'une fonction aléatoire
$\bar{x}$ — grandeur imaginaire conjuguée de x
$\binom{n}{k} = C_n^k$ — coefficient binomial
$(2n-1)!!$ — produit de tous les nombres impairs de la suite naturelle jusqu'au terme $2n-1$ inclus
$(2n)!!$ — produit de tous les nombres pairs de la suite naturelle jusqu'au terme $2n$ inclus
$o(x)$, $O(x)$ — ordre de grandeur de x

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

INDEX DES NOMS

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 3. FONCTIONS DE LA VARIABLE ALÉATOIRE

CHAPITRE 4. PROCESSUS ALÉATOIRES

CHAPITRE 5. TRANSFORMATIONS DES PROCESSUS ALÉATOIRES DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES INERTIELS

CHAPITRE 6. TRANSFORMATIONS DES PROCESSUS ALÉATOIRES DANS LES CIRCUITS NON LINÉAIRES ET NON INERTIELS

CHAPITRE 7. TRANSFORMATIONS NON LINÉAIRES D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

CHAPITRE 8. ENVELOPPE ET PHASE D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL

CHAPITRE 9. PROCESSUS ALÉATOIRE NORMAL À LA TRAVERSÉE D'UN CIRCUIT RADIOTECHNIQUE TYPE

CHAPITRE 10. DÉPASSEMENTS DES PROCESSUS ALÉATOIRES

CHAPITRE 11. PROCESSUS ALÉATOIRES IMPULSIONNELS

CHAPITRE 12. CARACTÉRISTIQUES ÉNERGÉTIQUES DE LA MODULATION PAR PROCESSUS ALÉATOIRES